

Обратное отображение на физическую плотность дается соотношениями

$$(3.6) \quad \frac{x}{C} = -\frac{1}{\lambda^* w} + \frac{1}{\lambda^2} \ln \frac{w+\lambda}{w} + \frac{\sin^2 \theta}{w(w+\lambda)}, \quad \frac{y}{C} = -\frac{\sin 2\theta}{2w(w+\lambda)}$$

При этом на свободной поверхности

$$w+\lambda = -\sin \theta, \quad 0 \leq w \leq 1-\lambda^*$$

$$(3.7) \quad \frac{x}{C} = -\frac{1}{\lambda w} + \frac{w+\lambda}{w} + \frac{1}{\lambda^2} \ln \frac{w+\lambda}{w}, \quad \frac{y}{C} = \frac{\sqrt{1-(w+\lambda)^2}}{w}$$

Форма свободной поверхности, отвечающей решению Энгелунда для тех же значений λ^* , показана на фиг. 4 пунктиром. Различие между решениями невелико, однако это не меняет того факта, что «естественной» физической постановке задачи в данном случае отвечают два решения (меняя условия на отрезке BB можно построить сколько угодно столь же «приемлемых» решений) и отсутствует принцип выбора единственного решения. Напомним, что та же неединственность имеет место и в задачах напорной фильтрации с предельным градиентом [2], но там до сих пор удавалось выделить «основное» решение из соображений симметрии.

Необходимость особо задавать течение на бесконечности может возникнуть и в других задачах безнапорной фильтрации с предельным градиентом. В качестве примера укажем на задачу о притоке к дренажной щели в неограниченном массиве грунта, рассмотренную в [8] для специального вида условий на бесконечности.

Поступила 12 IV 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1969). М., «Наука», 1969.
2. Бернадинер М. Г., Енгов В. М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М., «Наука», 1975.
3. Христианович С. А. Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси. ПММ, 1940, т. 4, вып. 1.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., «Мир», 1975.
5. Енгов В. М., Одишария М. Г. Применение метода конечных элементов к решению задач нелинейной фильтрации со свободной поверхностью. Сообщ. АН ГССР, 1974, т. 75, № 1.
6. Данилова Г. В., Салимов Н. Б., Шешуков Е. Г. Задача нелинейной фильтрации в земляной плотине. Тр. Семинара по краевым задачам, вып. 10. Казанск. ун-т, 1973.
7. Englund F. On the laminar and turbulent flows of ground water through homogeneous sand. Trans. Danish Acad. Techn. Sci., 1953, No. 3.
8. Одишария М. Г. Двупараметрические задачи безнапорной нелинейной фильтрации и их решение методом конечных элементов. Конференция молодых ученых по математике и механике. Тбилиси, 1976.

УДК 532.616

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИСТЕМЫ СТРУЙ В СНОСЯЩЕМ ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. Л. ДОРФМАН

(Ленинград)

В работе на основе решения уравнений Навье — Стокса теоретически исследованы эффекты взаимодействия струй со сносящим потоком.

1. Рассмотрим задачу о пространственном взаимодействии системы струй, вдуваемых по нормали в сносящий поток. Схема течения показана на фиг. 1: основной поток (большая стрелка) течет внутри канала высотой h , образованного двумя па-

параллельными пластинами. Струи вдуваются с постоянной скоростью V_0 через ряд прямоугольных отверстий в верхней стенке канала, расположенных с шагом L .

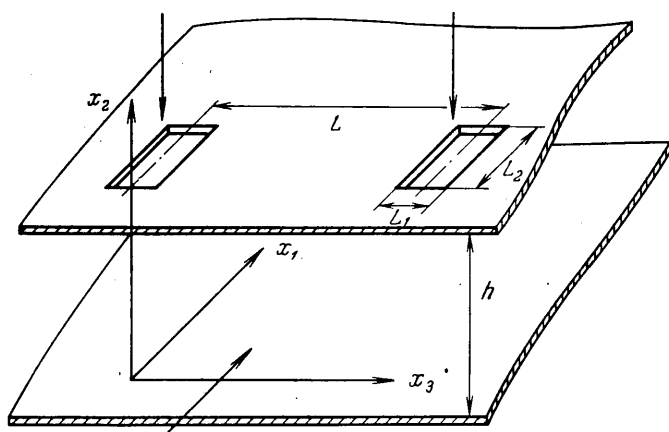
Движение жидкости описывается системой уравнений Навье — Стокса и уравнением неразрывности

$$(1.1) \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} v_j v_i - \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (i=1, 2, 3)$$

$$(1.2) \quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$$

Здесь v_i — компоненты вектора скорости в направлениях x_i ; p — отношение статического давления к постоянной плотности; ν — коэффициент кинематической вязкости.

В численном исследовании верхняя и нижняя границы области интегрирования уравнений Навье — Стокса совпадают с верхней и нижней стенками канала, на ко-



Фиг. 1

торых ставятся условия прилипания и непротекания. В месте вдува задается нормальная к стенке компонента скорости, касательные компоненты вектора скорости полагаются равными нулю. Боковые границы расположены в плоскостях симметрии $x_2=0$ и $x_2=L/2$. Соответственно на этих плоскостях требуется выполнение условий симметрии и непротекания. Передняя граница расположена на расстоянии h вверх по потоку ($x_1/h=-1$) от переднего края прямоугольного отверстия ($x_1/h=0$), а задняя — на расстоянии $3h$ вниз по потоку ($x_1/h=3$).

На входе в канал (передняя граница области интегрирования) задается равномерный профиль продольной скорости U_0 основного потока, а поперечные скорости полагаются равными нулю. На задней границе используется условие

$$\partial v_i / \partial x_1 = 0 \quad (i=1, 2, 3)$$

а также условие сохранения общей массы жидкости.

2. Задача (1.1), (1.2) решалась численным методом, использующим физическое расщепление [1-4]. Этот метод характеризуется тем, что на каждом шаге по времени решение проводится в два этапа. На первом этапе рассчитывается предварительный вектор скорости с учетом конвективных ускорений и вязкостной диффузии и без учета уравнения неразрывности. Окончательные значения скорости получаются на втором этапе в результате комбинации предварительных значений вектора скорости и члена, учитывающего градиент сил давления.

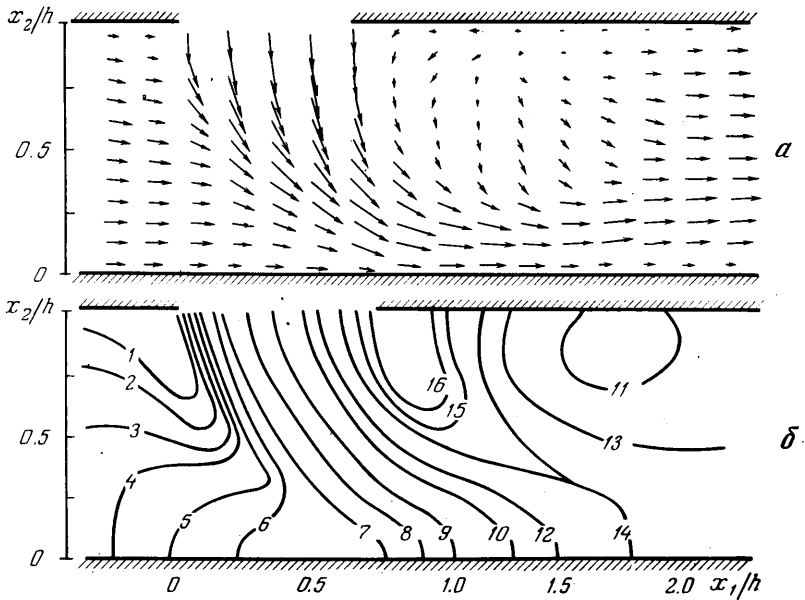
При этом значения давления должны обеспечить удовлетворение уравнения неразрывности, что приводит к необходимости решения задачи Неймана для уравнения Пуассона относительно давления. Использование в [1-4] на первом этапе явной аппроксимации уравнений движения ограничивает сеточный шаг по времени Δt соотношением $\Delta t \ll \nu$, что весьма обременительно для большинства практических приложений.

В данной работе предлагается использовать на этапе предварительного нахождения вектора скорости разностную схему, которая является модификацией для случая несжимаемой жидкости схемы предиктор — корректор Мак-Кормака [5]

$$(2.1) \quad v_{i,p}^* = v_{i,p}^n - \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\Delta t}{\Delta x_j} (1 - \delta(v_{j,p}^n) \nabla_j) \Delta_j (v_{i,p}^n v_{j,p}^n) - \frac{v \Delta t}{(\Delta x_j)^2} \nabla_j \Delta_j v_{i,p}^n \right\}$$

$$(2.2) \quad v_{i,p}^{**} = \frac{1}{2} \left[v_{i,p}^n + v_{i,p}^* - \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\Delta t}{\Delta x_j} (1 + \delta(v_{j,p}^n) \Delta_j) \nabla_j (v_{i,p}^* v_{j,p}^*) - \frac{v \Delta t}{(\Delta x_j)^2} \nabla_j \Delta_j v_{i,p}^* \right\} \right]$$

В (2.1), (2.2) приняты следующие обозначения: Δx_j — пространственный сеточный шаг по координате x_j ; Δt — сеточный шаг по времени; Δ_j, ∇_j — операторы нис-

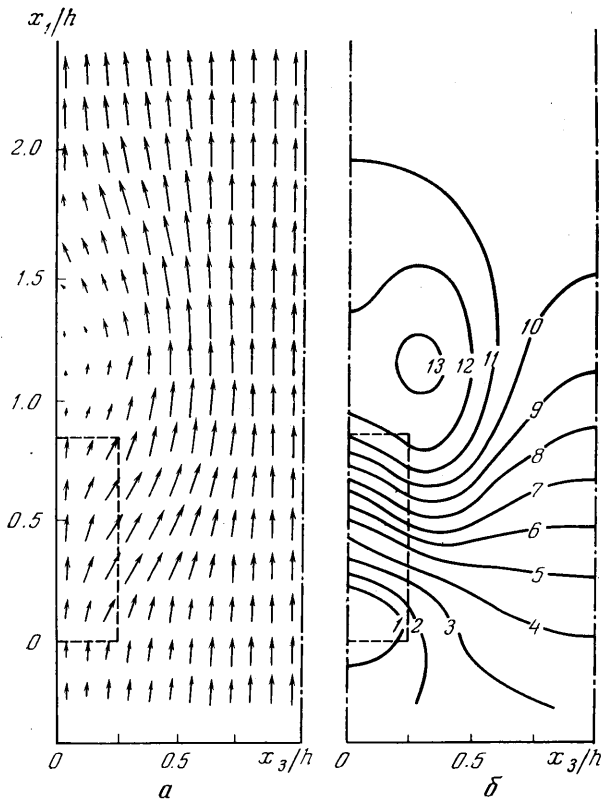


Фиг. 2

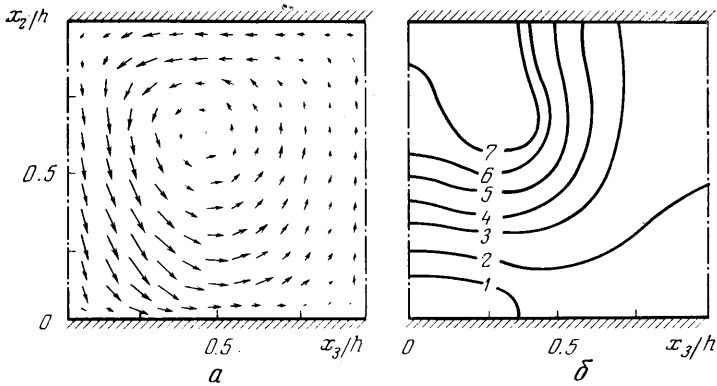
ходящих и восходящих разностей по координате x_j [6]; δ — асимметричная единичная функция [6]. Нижний индекс p указывает пространственные сеточные координаты компоненты вектора скорости (см. [2]), верхний индекс n — номер временного слоя. Звездочкой и двумя звездочками обозначены предварительные значения вектора скорости.

Если учесть, что $(1 - \nabla_j) \Delta_j = \nabla_j$ и $(1 + \Delta_j) \nabla_j = \Delta_j$, то (2.1), (2.2) можно трактовать следующим образом: для аппроксимации конвективных членов системы (1.1) применяются односторонние разности, при этом на шаге «предиктор» (2.1) всегда используется противоположная шагу «корректор» (2.2) ориентация разностей.

Отличие используемого алгоритма от оригинальной схемы Мак-Кормака [5] заключается в том, что выбор порядка чередования восходящих и нисходящих разностей в каждой точке. Благодаря этому разностное интегрирование происходит в характеристическом направлении гиперболической части (1.1), так что при определенном соотношении между пространственными и временными шагами область зависимости разностной схемы всегда будет содержать область зависимости дифференциальных уравнений, т. е. будет выполняться необходимое условие сходимости [7].



Фиг. 3



Фиг. 4

Дальнейшая реализация схемы расщепления аналогична [1-4]. Условие устойчивости (2.1) при малых ν (больших числах Рейнольдса) имеет вид

$$\Delta t \leq 1 / \sum_{j=1}^3 (|v_j| / \Delta x_j)$$

Сравнивая с условием $\Delta t \propto \nu$ для схем [1-4], заметим, что схема (2.1), (2.2) обладает таким преимуществом в отношении размера шага по времени по сравнению со

схемами [1-4], которое значительно перекрывает недостатки, связанные с несколько большей сложностью расчета. Стационарное распределение вектора скорости и давления достигается в процессе установления.

3. На фиг. 2-4 представлены картины установившегося поля течения для одного из режимов, которому соответствуют следующие параметры:

$$\beta = V_0/U_0 = 2, \quad Re = V_0 h/\nu = 10^3, \quad L = 2h, \quad L_1/L_2 = 0.6$$

Величины скоростей отнесены к скорости истечения струй V_0 , давление — к V_0^2 . Результаты были получены при использовании сетки, состоящей из 28, 14 и 14 плоскостей в направлениях x_1 , x_2 и x_3 соответственно.

На фигурах показаны распределение проекций векторов скорости на плоскость симметрии $x_3=0$ (фиг. 2, а), плоскость $x_2=h/2$ (фиг. 3, а) и плоскость $x_1=h$ (фиг. 4, а), а также распределение безразмерного статического давления в этих плоскостях (фиг. 2, б, 3, б, 4, б). Изобарам соответствуют следующие значения: на фиг. 2, б. 1—0.375, 2—0.35, 3—0.325, 4—0.3, 5—0.275, 6—0.25, 7—0.2, 8—0.1, 9—0.0, 10—-0.1, 11—-0.1125, 12—-0.15, 13—-0.1625, 14—-0.2, 15—-0.225, 16—-0.2375; на фиг. 3, б. 1—0.325, 2—0.3, 3—0.25, 4—0.2, 5—0.15, 6—0.1, 7—0.05, 8—0.0, 9—-0.05, 10—-0.1, 11—-0.15, 12—-0.2, 13—-0.25; на фиг. 4, б. 1—0.075, 2—0.0, 3—-0.075, 4—-0.125, 5—-0.175, 6—-0.225, 7—-0.25. Пунктиром на фиг. 3, а, б нанесена проекция прямоугольного сопла на плоскость $x_2=h/2$.

Приведенные графики изобар свидетельствуют о значительном влиянии вдуваемых струй на основной поток, которое простирается как вниз по потоку, так и против основного потока. Вдуваемая струя воздействует на основное течение как препятствие: перед отверстием образуется зона повышенного давления, а позади — зона разрежения, в которой наблюдаются положительные градиенты давления. Область возвратного течения, примыкающая к заднему краю отверстия, распространяется вниз по потоку и имеет сложную пространственную форму. Численные эксперименты показали, что с увеличением параметра β непрерывно увеличиваются ее характерные размеры (расчеты велись до $\beta=3$). Однако при малых β (например, при $\beta<0.05$) область возвратного течения исчезает: струя сразу же после выхода из отверстия прилипает к верхней стенке и развивается как пристеночная. Несмотря на это, возмущение статического давления перед отверстием остается существенным.

Интересной особенностью развития системы струй в ограниченном сносящем потоке является образование в результате взаимодействия струй и стенок канала вихреобразного течения в плоскостях, перпендикулярных оси канала, которое способствует быстрому перемешиванию жидкости (см. фиг. 4). Интенсивность этого течения уменьшается с увеличением высоты канала и расстояния между струями.

Следует отметить, что, несмотря на некоторую идеализацию течения (например, использование равномерного начального профиля скорости истекающих струй), сравнительно грубую сетку и т. п., полученные результаты позволяют выявить характерные особенности течения и приблизительно оценить влияние на него геометрических и режимных параметров.

В заключение автор благодарит Л. Г. Лойцянского за интерес, проявленный к настоящей работе.

Поступила 14 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский О. М., Гуцин В. А., Щенников В. В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой жидкости. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 1.
2. Гуцин В. А. Пространственное обтекание трехмерных тел потоком вязкой жидкости. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 2.
3. Fortin M., Peyret R., Temam R. Calcul des ecoulements d'un fluide visqueux incompressible. Lect. Notes Phys., 1971, vol. 8, p. 337-342.
4. Harlow F. H., Hirt C. W. Recent extensions to Eulerian methods for numerical fluid dynamics. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 3.
5. MacCormac R. W. Numerical solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer. Lect. Notes Phys., 1971, vol. 8, p. 151-163.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., «Наука», 1973.
7. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М., «Наука», 1973.