

3. Гельфанд Б. Е., Губин С. А., Когарко С. М., Когарко Б. С. Исследование воды сжатия в смеси жидкости с пузырьками газа. Докл. АН СССР, 1973, т. 213, № 5.
4. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р., Кузнецов В. В., Малых Н. В. Экспериментальное исследование ударных волн в жидкости с пузырьками газа. В сб. «Волновые процессы в двухфазных системах». Новосибирск, 1975.
5. Губайдуллин А. А., Ивандаев А. И., Нигматуллин Р. И. Нестационарные волны в жидкости с пузырьками газа. Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 6.
6. Нигматуллин Р. И., Шагапов В. Ш. Структура ударных волн в жидкости, содержащей пузырьки газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.
7. Бетчелор Г. К. Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости. Механика. Период. сб. иностр. статей, 1968, № 3.
8. Уоллис Г. Ш. Одномерные двухфазные течения. М., «Мир», 1972.

УДК 532.546

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ БЕЗНАПОРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В. М. ЕНТОВ, М. Г. ОДИШАРИЯ

(Москва, Тбилиси)

Рассматриваются безнапорные течения при фильтрации с предельным градиентом давления. В плоскости годографа скорости фильтрации отыскание функции тока сводится к решению краевой задачи для эллиптического уравнения в области с криволинейными границами. Строится численное решение этой задачи методом конечных элементов, после чего численным интегрированием восстанавливается вся картина течения. Проанализировано влияние предельного градиента на интегральные характеристики потока. Отмечены принципиальные особенности задач безнапорной фильтрации при наличии предельного градиента: неединственность решения, возможность образования застойных зон, примыкающих к свободной поверхности и т. д.

1. Рассмотрим плоское фильтрационное течение в вертикальной плоскости $xу$, считая ось $у$ направленной вверх. Уравнения движения при нелинейном законе фильтрации имеют вид

$$(1.1) \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \quad \operatorname{grad} H = -\frac{\mathbf{w}}{w} \Phi(w), \quad H = C \left(y + \frac{p}{\rho g} \right), \quad C = \frac{k \rho g}{\mu}$$

Здесь \mathbf{w} — вектор скорости фильтрации, H — обобщенный напор, k — проницаемость среды, ρ и μ — плотность и характерная вязкость жидкости, g — ускорение силы тяжести, функция $\Phi(w)$ описывает закон фильтрации.

После введения функции тока ψ и перехода к переменным годографа скорости фильтрации получаем известным образом [1, 2] линейное уравнение для $\psi(w, \theta)$

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial w} \frac{\Phi^2}{w \Phi'(w)} \frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{\Phi}{w^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0$$

При этом, как было показано еще С. А. Христиановичем [3], неизвестная свободная поверхность жидкости, на которой давление и функция тока сохраняют постоянные значения, переходит в линию

$$(1.3) \quad \Phi(w) + C \sin \theta = 0$$

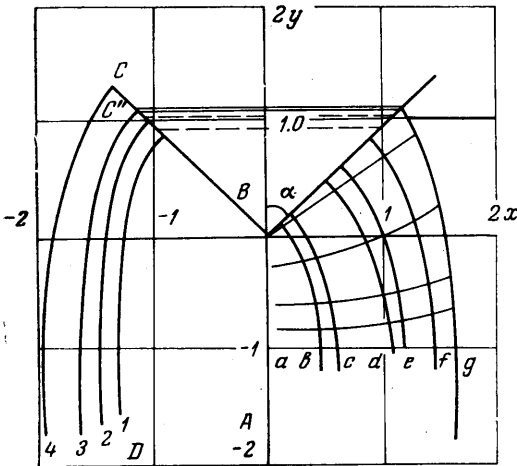
В результате типичные задачи безнапорной фильтрации приводятся к отысканию $\psi(w, \theta)$ как решения краевой задачи для уравнения (1.2) в области плоскости w, θ , имеющей криволинейный участок границы. Так, отображение на плоскость годографа безнапорного течения из канала треугольного сечения (фиг. 1) имеет вид, показанный на фиг. 2. Как отображение, так и все последующие результаты расчетов относятся к случаю фильтрации с предельным градиентом давления

$$(1.4) \quad \Phi(w) = w + \lambda$$

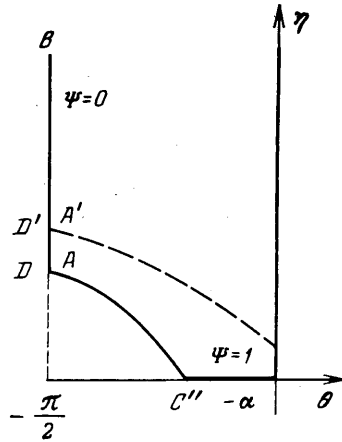
2. Для решения сформулированной краевой задачи естественно применить вариационно-разностный метод конечных элементов [4]. При использовании метода ко-

нечных элементов легко преодолеваются трудности, связанные с вырождением уравнения (1.2) и с нерегулярностью области, в которой ищется решение.

Такая процедура для безнапорной нелинейной фильтрации впервые реализована в [5] (задача об оросителе бороздового типа); в [6] для задачи о фильтрации через плотину применен другой метод решения краевой задачи в плоскости годографа. Ниже использована схема решения (разбиение области сеткой конечных элементов, введение вспомогательной переменной $\eta=w^2$, улучшающей аппроксимацию при малых w , регуляризация функционала задачи, принимающего при формальном подходе бесконечно большие значения), которая описана в [5], и здесь не воспроизводится. Укажем лишь, что после отыскания узловых значений $\psi(w, \theta)$ возвращение на физическую плоскость осуществляется по известным формулам (например, [2]) при помощи численных квадратур. В [5] используемый метод был проверен на за-



Фиг. 1



Фиг. 2

даче напорной фильтрации, имеющей аналитическое решение, и точность его оказалась удовлетворительной. Поэтому ниже он применяется без изменения.

3. На фиг. 1 показана сетка течения для задачи о фильтрации из канала треугольного сечения с углом раствора $2\alpha=1/2\pi$ при значении безразмерного предельного градиента давления $\lambda^*=\lambda/C=0.13$. Линиям a, b, c, d, e, f, g отвечают значения функции тока $\psi=0, 0.27, 0.37, 0.67, 0.75, 0.9, 1.0$ соответственно. В левой части фигуры (толстыми линиями 1—4) показана форма свободной поверхности при $\lambda^*=0, 0.065, 0.13, 0.194$ соответственно. В рассматриваемой задаче наибольший интерес представляет влияние предельного градиента на расход из канала.

Из соображений размерности очевидно, что расход на единицу длины канала Q связан с глубиной потока в канале h соотношением

$$(3.1) \quad Q=ChZ(\alpha, \lambda^*)$$

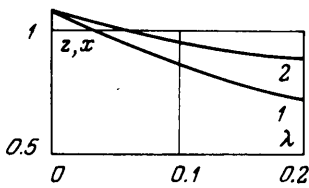
и при фиксированном значении угла α задача расчета сводится к определению зависимости $Z(\lambda^*)$.

Результат для $\alpha=1/4\pi$ приведен на фиг. 3 (кривая 1). Ширина потока по мере удаления от канала стремится к постоянному значению B , равному

$$(3.2) \quad B=QC^{-1}(1-\lambda^*)^{-1}=hZ(\alpha, \lambda^*)/(1-\lambda^*)=h\chi(\alpha, \lambda^*)$$

так что при увеличении предельного градиента и при фиксированном расходе поток расширяется, а при фиксированном уровне в канале сужается (см. кривую 2 на фиг. 3).

Заметим, наконец, что при фильтрации с предельным градиентом область, на которую отображается течение в плоскости годографа, $w\theta$, различна в зависимости от значения предельного градиента. Именно, если $\theta_0=-\arcsin \lambda^* > -\alpha$, то отображение на плоскость годографа имеет вид, показанный на фиг. 2 пунктиром, а при $\theta_0 < -\alpha$ — сплошной линией. В последнем случае граница содержит отрезок $\theta_0 < \theta < -\alpha$, $w=0$. На этом отрезке функция тока сохраняет постоянное значение, и потому он является образом границы застойной зоны. Отсюда следует, что для задач без-



Фиг. 3

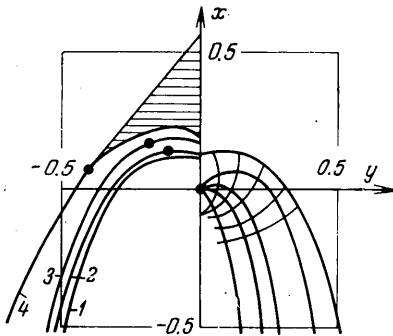
напорной фильтрации с предельным градиентом возможно образование застойных зон, примыкающих к свободной поверхности.

В случае фильтрации из канала застойные зоны такого типа образуются лишь при достаточно больших значениях предельного градиента или малых углах α . Для течения рассматриваемого ниже типа застойные зоны, граничащие со свободной поверхностью, образуются всегда. Речь идет о течении, создаваемом источником, который помещен в слое грунта бесконечной мощности.

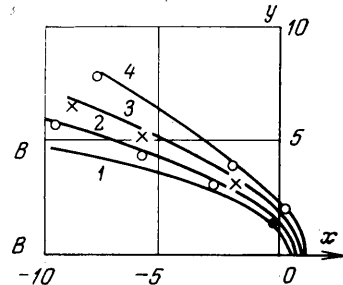
На фиг. 4 показана сетка течения для источника интенсивности Q при $\lambda^*=0.13$; толстыми линиями 1—5 показана форма свободной поверхности при $\lambda^*=0, 0.034, 0.13, 0.292$ и 0.74 соответственно. Заштрихованная область — область, где может располагаться застойная зона (для $\lambda^*=0.74$). Несколько неожиданное появление застойной зоны «над» свободной поверхностью имеет весьма простой смысл: при движении с предельным градиентом движение вдоль свободной поверхности возможно, лишь если ее уклон превышает предельный градиент напора.

Во избежание загромождения чертежа для других значений λ^* застойные зоны не показаны, лишь точками на соответствующих кривых отмечен переход от застойной зоны к свободной поверхности.

Другая специфическая особенность фильтрации с предельным градиентом обнаруживается в следующей задаче. Рассматривается безнапорный приток к дренажной



Фиг. 4



Фиг. 5

щели, лежащей на водоупоре. При отображении на плоскость годографа $w\theta$ бесконечно удаленная область потока, в которой скорости стремятся к нулю, переходит в отрезок границы BB ($w=0, -\arcsin \lambda^* < \theta < 0$). На всех остальных участках границы в плоскости $w\theta$ граничные условия очевидны. Что касается отрезка BB , то в силу характера вырождения уравнения (1.2) при $\Phi(w)$ вида (1.4) на линии $w=0$ в плоскости годографа необходимо ставить краевое условие для $\psi(w, \theta)$. Поэтому, задавая различные $\psi(w, 0)$, можно строить различные решения исходной задачи, по-разному ведущие себя на бесконечности.

На фиг. 5 сплошными линиями 1—4 показана для $\lambda^*=0, 0.13, 0.25, 0.38$ соответственно форма свободной поверхности, рассчитанная при граничном условии отвечающем осесимметричному на бесконечности течению

$$(3.3) \quad \psi(\theta, 0) = -\theta/\theta_0, \quad \theta_0 = \arcsin \lambda^4$$

С другой стороны, Энгелундом⁴ [7] найдено точное решение задачи о притоке к дренажной щели, имеющее в плоскости годографа вид

$$(3.4) \quad \psi = -C \sin \theta / \Phi(w)$$

или в рассматриваемом случае

$$(3.5) \quad \psi = -C \sin \theta / (w + \lambda)$$

⁴ На решение Энгелунда внимание авторов обратили Н. Б. Ильинский и Е. Г. Шешуков.

Обратное отображение на физическую плотность дается соотношениями

$$(3.6) \quad \frac{x}{C} = -\frac{1}{\lambda^* w} + \frac{1}{\lambda^2} \ln \frac{w+\lambda}{w} + \frac{\sin^2 \theta}{w(w+\lambda)}, \quad \frac{y}{C} = -\frac{\sin 2\theta}{2w(w+\lambda)}$$

При этом на свободной поверхности

$$w+\lambda = -\sin \theta, \quad 0 \leq w \leq 1-\lambda^*$$

$$(3.7) \quad \frac{x}{C} = -\frac{1}{\lambda w} + \frac{w+\lambda}{w} + \frac{1}{\lambda^2} \ln \frac{w+\lambda}{w}, \quad \frac{y}{C} = \frac{\sqrt{1-(w+\lambda)^2}}{w}$$

Форма свободной поверхности, отвечающей решению Энгелунда для тех же значений λ^* , показана на фиг. 4 пунктиром. Различие между решениями невелико, однако это не меняет того факта, что «естественной» физической постановке задачи в данном случае отвечают два решения (меняя условия на отрезке BB можно построить сколько угодно столь же «приемлемых» решений) и отсутствует принцип выбора единственного решения. Напомним, что та же неединственность имеет место и в задачах напорной фильтрации с предельным градиентом [2], но там до сих пор удавалось выделить «основное» решение из соображений симметрии.

Необходимость особо задавать течение на бесконечности может возникнуть и в других задачах безнапорной фильтрации с предельным градиентом. В качестве примера укажем на задачу о притоке к дренажной щели в неограниченном массиве грунта, рассмотренную в [8] для специального вида условий на бесконечности.

Поступила 12 IV 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1969). М., «Наука», 1969.
2. Бернадинер М. Г., Енгов В. М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М., «Наука», 1975.
3. Христианович С. А. Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси. ПММ, 1940, т. 4, вып. 1.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., «Мир», 1975.
5. Енгов В. М., Одишария М. Г. Применение метода конечных элементов к решению задач нелинейной фильтрации со свободной поверхностью. Сообщ. АН ГССР, 1974, т. 75, № 1.
6. Данилова Г. В., Салимов Н. Б., Шешуков Е. Г. Задача нелинейной фильтрации в земляной плотине. Тр. Семинара по краевым задачам, вып. 10. Казанск. ун-т, 1973.
7. Englund F. On the laminar and turbulent flows of ground water through homogeneous sand. Trans. Danish Acad. Techn. Sci., 1953, No. 3.
8. Одишария М. Г. Двупараметрические задачи безнапорной нелинейной фильтрации и их решение методом конечных элементов. Конференция молодых ученых по математике и механике. Тбилиси, 1976.

УДК 532.616

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИСТЕМЫ СТРУЙ В СНОСЯЩЕМ ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. Л. ДОРФМАН

(Ленинград)

В работе на основе решения уравнений Навье — Стокса теоретически исследованы эффекты взаимодействия струй со сносящим потоком.

1. Рассмотрим задачу о пространственном взаимодействии системы струй, вдуваемых по нормали в сносящий поток. Схема течения показана на фиг. 1: основной поток (большая стрелка) течет внутри канала высотой h , образованного двумя па-