

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хозе А. Н.* Результаты изучения и применения организованного движения двухфазных потоков в трубах и каналах при создании эффективных теплообменных устройств. V Всесоюзная конференция по теплообмену и гидравлическому сопротивлению при движении двухфазного потока в элементах энергетических машин и аппаратов. Тез. докл. Секция 2. Л., 1974.
2. *Бейнусов А. Г., Хозе А. Н.* Измерение толщин жидкостной пленки на поверхности вращающегося цилиндра. Изв. вузов, Приборостроение, 1972, т. 15, № 8.
3. *Кутателадзе С. С., Сорокин Ю. Л.* О гидродинамической устойчивости некоторых газожидкостных систем. В сб. «Вопросы теплоотдачи и гидравлики двухфазных сред». М.—Л., Госэнергоиздат, 1961.
4. *Сорокин Ю. Л., Пушкина О. Л.* О режимах течения газожидкостных смесей. Тр. Центр. науч.-исслед. и проект.-констр. котлотурб. ин-та, 1964, вып. 47.
5. *Семенов П. А. и др.* Гидравлическое сопротивление при восходящем пленочном течении жидкости в плоской щели. В сб. «Массообменные процессы химической технологии». Л., 1972.
6. *Уоллис Г.* Одномерные двухфазные течения. М., «Мир», 1972.
7. *Oya Takio.* Upward liquid flow in small tube into which air streams. (3 report, pipe friction, 1.) Bull. ISME, 1972, vol. 15, No. 90.
8. *Соо К. М., Сийрде Э. К.* О перепаде давления при восходящем течении жидкостной пленки в вертикальной трубе. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, Сер. А., 1971, № 303.

УДК 532.529.6

ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН ОТ ТВЕРДОЙ СТЕНКИ В СИСТЕМЕ ПУЗЫРЬКИ ГАЗА — ЖИДКОСТЬ

Б. Е. ГЕЛЬФАНД, С. А. ГУБИН, Е. И. ТИМОФЕЕВ

(Москва)

В работе [1] впервые высказано предположение о неакустическом отражении ударных волн на границах раздела в системе пузырьки газа — жидкость. Наибольшее увеличение давления за фронтом отраженной волны ожидается по [1] при падении плоской волны на жесткую стенку. Явное количественное подтверждение неакустического отражения волн в системе пузырьки газа — жидкость получено в [2, 3], где выполнены измерения параметров отраженных волн при прохождении возмущений давления через границу раздела.

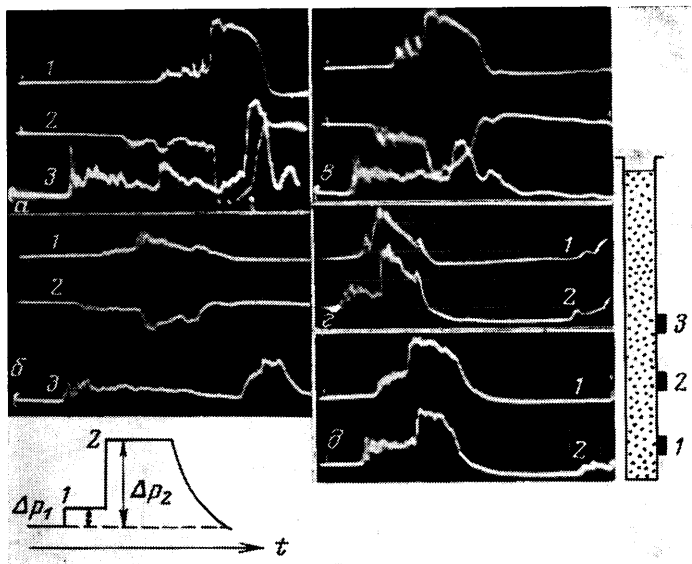
В [1] не рассматривался вопрос о влиянии начального давления P_0 на отражение от жесткой стенки, хотя ряд рассматриваемых примеров касался явления отражения на границе раздела, находящейся на глубине ~ 20 м, где гидростатическое давление достигало $p=2$ бар. Представленные в [1] расчеты показывают близкое сходство давлений в отраженной волне в двухфазной среде как в изотермическом, так и в адиабатическом случаях. Отражение слабых квазиакустических волн давления изучалось экспериментально в [4] и теоретически в [5]. В [4] двухфазная среда рассматривалась как изотермическая. В [4, 5] изменения параметров отраженной волны при различных величинах начального давления, объемного содержания газа в жидкости и интенсивности волны не анализировались.

С целью дополнения известных данных о процессе отражения и уточнения существующих зависимостей приведены описанные ниже экспериментальные исследования.

1. **Основные результаты опытов.** Приведены прямые опытные данные, демонстрирующие зависимость давления за фронтом отраженной волны от концентрации газа в жидкости, интенсивности падающей ударной волны и от начального давления в среде. Все эксперименты проведены на установке, описанной в [3]. На фиг. 1, а показана регистрируемая изменения давления в падающей (обозначена цифрой 1 на пояснительном рисунке) и отраженной волнах (обозначена цифрой 2) для $\beta=2.4\%$, $\Delta p_1=12$ бар, $p_0=1$ бар при размере пузырьков азота в воде $d_0=3$ мм. Отношение $\Delta p_2 \Delta p_1^{-1} \sim 5 \div 6$ по показаниям ближнего к торцу датчика согласуется с [1]. На фиг. 1, б показана регистрируемая для $\beta=1\%$, $\Delta p_1=11$ бар, $d_0=3$ мм и

$p_0=1$ бар. Как видно, $\Delta p_2 \Delta p_1^{-1} \sim 3$. На фиг. 1, в приведен случай $\beta=2.4\%$, $\Delta p_1=28$ бар, $d_0=3$ мм и $p_0=1$ бар. Снова отмечается снижение отношений $\Delta p_2 \Delta p_1^{-1}$ до величины ~ 3 . На фиг. 1, г представлен случай пузырьков (80% глицерина и 20% воды) при $\beta=0.7\%$, $\Delta p_1=7$ бар, $d_0 \sim 3$ мм и $p_0=1$ бар. Снижение величины $\Delta p_2 \Delta p_1^{-1}$ до $1.5 \div 2$ раз по сравнению с чистой жидкостью необъяснимо по [1], хотя параметры воды и водоглицеринового раствора, за исключением вязкости, мало отличимы друг от друга.

Наблюдения за отражением сильных ударных волн в воде с пузырьками и в водоглицериновом растворе с пузырьками исключают возможность достоверного объяснения наблюдаемых эффектов за счет колебательных процессов отдельных газовых включений, так как убывание величины $\Delta p_2 \Delta p_1^{-1}$ происходит и в случае интенсификации колебаний при росте Δp_1 и $p_0 = \text{const}$ и при демпфировании колебаний в среде с повышенной вязкостью. На фиг. 1, д представлена регистрируемая



Фиг. 1

движения ударных волн в газожидкостной среде при $p_0=10$ бар, $p_1 p_0^{-1}=12$, $\beta=4\%$, $d_0 \sim 3$ мм. Величина $\Delta p_2 \Delta p_1^{-1} \sim 3$, т. е. меньше, чем при $p_0=1$ бар. Масштабы времени равны 900 мксек на деление горизонтальной шкалы для всех лучей на фиг. 1, а-г и 1500 мксек на фиг. 1, д. Следует заметить, что при $p_0=1$ бар величины Δp_1 и Δp_2 близки к $p_1 p_0^{-1}$ и $p_2 p_0^{-1}$, если $p_1 \gg 1$ и $p_2 \gg 1$.

На фиг. 2, а показана зависимость отношения $\varphi = \Delta p_2 \Delta p_1^{-1}$ от концентрации пузырьков азота при $\Delta p_1=10$ бар, $p_0=1$ бар и $d_0=3 \div 4$ мм, а на фиг. 2, б зависимость $\varphi = \varphi(p_1 p_0^{-1})$ при $p_0=1,5$ и 10 бар (кривые 1-3 соответственно), $\beta=5\%$, $d_0=3 \div 4$ мм. Представленные экспериментальные данные отражают основные особенности зависимости $\varphi = \varphi(\beta)$ и $\varphi = \varphi(p_0, \Delta p_1)$.

2. Обсуждение результатов. Опыты показали, что уменьшение объемной концентрации пузырьков газа в жидкости, увеличение интенсивности падающей волны и повышение начального давления ведут к убыванию давления за фронтом отраженной волны по сравнению с тем его значением, которое дает теория в [1, 2].

Анализируя обнаруженное расхождение, легко установить, что снижение величины давления от отраженной волны наблюдается во всех случаях, когда скорость звука в двухфазной среде возрастает. В работе [2] при решении задачи об отражении от жесткой стенки для расчета скорости звука использовали простейшее соотношение

$$c^2 = p_0 [\rho_f \beta (1 - \beta)]^{-1}$$

Это соотношение при $\beta \rightarrow 0$ не дает предельного перехода к скорости звука в жидкости, т. е. не отражает влияния сжимаемости жидкости. В [6] указано, что приближение скорости ударной волны к скорости звука в жидкости требует учета сжимаемости жидкости.

Рассмотрим подробнее задачу об отражении ударной волны от стенок для системы пузырьки газа — жидкость. Известно [7, 8], что если ударная волна с давлением за фронтом p_1 движется по двухфазной среде с давлением p_0 и объемным содержанием газа β_0 , то

$$p_1 - p_0 = \Delta p_1 = \rho_0 c_0 u_1 \left[\frac{1}{\gamma} \left(\frac{p_1}{p_0} - 1 \right) (1 - p_0^{1/\gamma} p_1^{-1/\gamma})^{-1} \right]^{0.5}$$

Здесь u_1 — скорость среды за волной, а $\rho_0 = (1 - \beta_0) \rho_f + \beta_0 \rho_2$ — плотность двухфазной среды задаваемая плотностью газа ρ_2 и жидкости ρ_f . За фронтом проходящей волны плотность и скорость звука возрастают вследствие уменьшения β_0 и увеличения давления. Уменьшение объемной концентрации газа можно рассчитать по формуле

$$\beta_1 = \beta_0 [(1 - \beta_0) (p_1 p_0^{-1})^{1/\gamma} + \beta_0]^{-1}$$

В связи с полным торможением двухфазного потока на стенке перепад давления в отраженной волне

$$\Delta p_2 = p_2 - p_0 = \Delta p_1 + \rho_1 c_1 u_1 \left[\frac{1}{\gamma} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) (1 - p_1^{1/\gamma} p_2^{-1/\gamma})^{-1} \right]^{0.5}$$

Здесь ρ_1, c_1 — плотность и скорость звука за падающей волной.

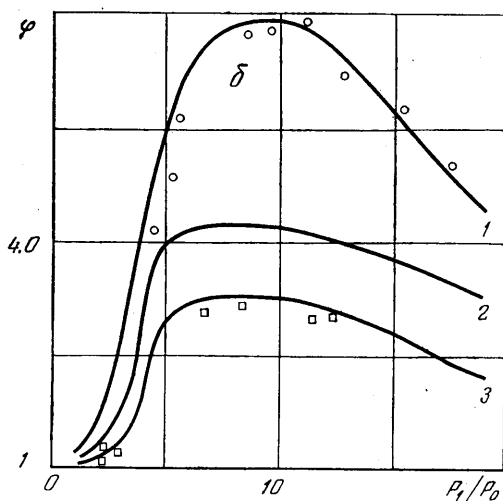
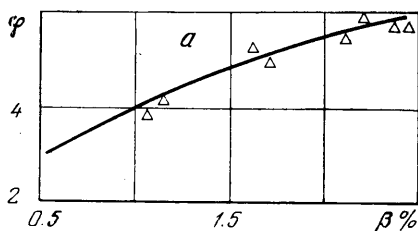
Из анализа приведенных соотношений следует линейная зависимость изменения давления на фронте отраженной волны от скорости звука за фронтом падающей волны. Если задать уравнение состояния смеси жидкости с пузырьками газа в виде [7]

$$p [\beta (1 - \beta)^{-1}]^\gamma = \text{const}$$

то выражение для скорости звука будет [7, 8]

$$c^2 = \gamma p c_f^2 [(1 - \beta)^2 p \gamma + \beta (1 - \beta) \rho_f c_j^2]^{-1}$$

Для изотермического случая $\gamma = 1$, а для адиабатического $\gamma = 1.4$. Использование приведенного выражения позволяет учесть изменение скорости звука в области малых концентраций газа и жидкости. Малая концентрация газа за фронтом бегущей волны образуется из-за малости начальной величины концентрации или в сильных волнах с большим значением отношения давлений $p_1 p_0^{-1}$. При некоторых значениях начальной концентрации $\beta_0 \leq \beta_0^*$ и интенсивности волны $p_1 p_0^{-1} \leq (p_1 p_0^{-1})^*$ скорость звука за падающей волной приближается к скорости звука в чистой жидкости и далее не возрастает с ростом $p_1 p_0^{-1} > (p_1 p_0^{-1})^*$. Отношение перепадов давления $\Delta p_2 \Delta p_1^{-1}$ перестает зависеть от скорости звука за падающей волной. Аналогичным образом увеличение начального давления в двухфазной среде ведет



Фиг. 2

к снижению давления за отраженной волной через повышение скорости звука в невозмущенной среде.

Проанализируем подробнее условия, при которых скорость падающей или отраженной волны приближается к скорости звука в чистой жидкости. Зависимость скорости падающей волны от ее интенсивности задается выражением

$$D^2 = (p_1 - p_0) (p_1 p_0^{-1})^{1/\gamma} \times [(p_1 p_0^{-1})^{1/\gamma} - 1]^{-1} [\beta_0 (1 - \beta_0) \rho_f]^{-1}$$

Приравняв скорость волны к скорости звука в жидкости, получим, что при $\beta = 10$ и 1% скорость звука в чистой жидкости достигается при $p_1 p_0^{-1} \sim 10^3$ и 10^2 соответственно.

Отраженная волна по своей скорости быстрее приближается к скорости звука в чистой жидкости, так как эта волна движется по среде с концентрацией газа $\beta_1 > \beta_0$, сжатой до давления $p_1 > p_0$. Это обстоятельство накладывает основное ограничение на величину перепада давления в отраженной волне, так как последняя не может иметь скорость больше скорости звука в жидкости. Поэтому при выполнении расчетов необходимо сравнивать скорость отраженной волны D_1 со скоростью звука в жидкости. При $D_1 = c_f$ изменение давления на фронте отраженной волны будет

$$p_2 - p_1 = \rho_1 u_1 (c_f + u_1), \quad u_1^2 = [(p_1 - p_0) \beta_0 (1 - \beta_0)^{-1} \rho_f^{-1} (1 - p_0^{1/\gamma} p_1^{-1/\gamma})]$$

Ввиду того что $c_f \gg u_1$ и $\rho_1 \sim \rho_f$, при $\gamma = 1$

$$p_2 - p_1 = c_f (p_1 - p_0) (\beta_0 \rho_f)^{-0.5} [(1 - \beta_0) p_1]^{-0.5}$$

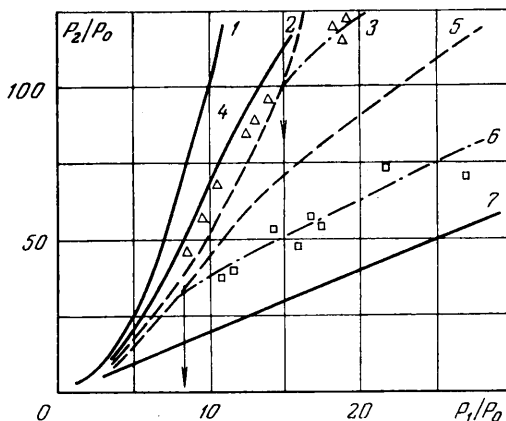
Представленное выражение для u_1 дает $u_1 = 0$ при $\beta_0 = 0$. В действительности при $\beta \rightarrow 0$ $u_1 = u_f$, т. е. стремится к скорости жидкости за фронтом волны давления.

На графиках фиг. 3 показаны зависимости отношений давлений на фронте отраженной волны от отношения давления на падающей волне при концентрации пузырьков азота в жидкости 3 и 0.5% для адиабатического (кривые 2, 5) и изотермического (кривые 1, 4) случаев. Концентрация газа для кривых 1-3 - 3%, а для 4-6 - 0.5%. Расчеты выполнены по схеме, представленной в [1, 2]. Без учета ограничения $D_1 \leq c_f$ получается неограниченное возрастание коэффициента увеличения давления при отражении на стенке. При этом при прочих равных условиях давление за отраженной волной в адиабатическом случае в 1.2-1.4 раза меньше, чем в изотермическом. На кривых 2, 5 стрелками отмечены точки, когда $D_1 = c_f$, а ветви 3 и 6 построены с учетом ограничения $D_1 \leq c_f$. Анализ расчетных и опытных значений $p_2 p_0^{-1}$ и $p_1 p_0^{-1}$ показывает, что при $p_1 p_0^{-1} < 10$, $p_0 = 1 \text{ бар}$, $\beta \geq 2\%$ можно не учитывать приближение D_1 к c_f и в этой области сжимаемость жидкости не проявляется. В остальных случаях наилучшее согласие расчета и эксперимента наблюдается при использовании адиабатической модели двухфазной среды с учетом упомянутых ограничений на скорость распространения ударных волн в двухфазной среде. Первым указал на отмеченную особенность двухфазных систем Л. И. Седов. Таким образом, обнаруженное в опытах снижение давления за отраженной волной в двухфазной среде связано с приближением скорости звука и ударных волн к скорости звука в чистой жидкости при повышении начального давления, интенсивности ударной волны и снижения объемной концентрации газа в жидкости.

Поступила 16 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Паркин Б. Р., Гилмор Ф. Р., Брод Г. Л. Ударные волны в воде с пузырьками воздуха. В сб. «Подводные и подземные взрывы». М., «Мир», 1974.
2. Гельфанд Б. Е., Губин С. А., Когарко С. М., Тимофеев Е. И. Прохождение ударных волн через границу раздела в двухфазных газожидкостных средах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.



Фиг. 3

3. Гельфанд Б. Е., Губин С. А., Когарко С. М., Когарко Б. С. Исследование воды сжатия в смеси жидкости с пузырьками газа. Докл. АН СССР, 1973, т. 213, № 5.
4. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р., Кузнецов В. В., Малых Н. В. Экспериментальное исследование ударных волн в жидкости с пузырьками газа. В сб. «Волновые процессы в двухфазных системах». Новосибирск, 1975.
5. Губайдуллин А. А., Ивандаев А. И., Нигматуллин Р. И. Нестационарные волны в жидкости с пузырьками газа. Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 6.
6. Нигматуллин Р. И., Шагапов В. Ш. Структура ударных волн в жидкости, содержащей пузырьки газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.
7. Бетчелор Г. К. Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости. Механика. Период. сб. иностр. статей, 1968, № 3.
8. Уоллис Г. Ш. Одномерные двухфазные течения. М., «Мир», 1972.

УДК 532.546

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ БЕЗНАПОРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В. М. ЕНТОВ, М. Г. ОДИШАРИЯ

(Москва, Тбилиси)

Рассматриваются безнапорные течения при фильтрации с предельным градиентом давления. В плоскости годографа скорости фильтрации отыскание функции тока сводится к решению краевой задачи для эллиптического уравнения в области с криволинейными границами. Строится численное решение этой задачи методом конечных элементов, после чего численным интегрированием восстанавливается вся картина течения. Проанализировано влияние предельного градиента на интегральные характеристики потока. Отмечены принципиальные особенности задач безнапорной фильтрации при наличии предельного градиента: неединственность решения, возможность образования застойных зон, примыкающих к свободной поверхности и т. д.

1. Рассмотрим плоское фильтрационное течение в вертикальной плоскости $xу$, считая ось $у$ направленной вверх. Уравнения движения при нелинейном законе фильтрации имеют вид

$$(1.1) \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \quad \operatorname{grad} H = -\frac{\mathbf{w}}{w} \Phi(w), \quad H = C \left(y + \frac{p}{\rho g} \right), \quad C = \frac{k \rho g}{\mu}$$

Здесь \mathbf{w} — вектор скорости фильтрации, H — обобщенный напор, k — проницаемость среды, ρ и μ — плотность и характерная вязкость жидкости, g — ускорение силы тяжести, функция $\Phi(w)$ описывает закон фильтрации.

После введения функции тока ψ и перехода к переменным годографа скорости фильтрации получаем известным образом [1, 2] линейное уравнение для $\psi(w, \theta)$

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial w} \frac{\Phi^2}{w \Phi'(w)} \frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{\Phi}{w^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0$$

При этом, как было показано еще С. А. Христиановичем [3], неизвестная свободная поверхность жидкости, на которой давление и функция тока сохраняют постоянные значения, переходит в линию

$$(1.3) \quad \Phi(w) + C \sin \theta = 0$$

В результате типичные задачи безнапорной фильтрации приводятся к отысканию $\psi(w, \theta)$ как решения краевой задачи для уравнения (1.2) в области плоскости w, θ , имеющей криволинейный участок границы. Так, отображение на плоскость годографа безнапорного течения из канала треугольного сечения (фиг. 1) имеет вид, показанный на фиг. 2. Как отображение, так и все последующие результаты расчетов относятся к случаю фильтрации с предельным градиентом давления

$$(1.4) \quad \Phi(w) = w + \lambda$$

2. Для решения сформулированной краевой задачи естественно применить вариационно-разностный метод конечных элементов [4]. При использовании метода ко-