

О РАЗВИТИИ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ
В МЕЖТАРЕЛОЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ СЕПАРАТОРА

В. М. ЧЕСНОКОВ

(Москва)

Рассматривается задача о развитии ламинарного потока жидкости в щелевом пространстве, образованном коническими тарелками сепаратора, вращающимися с постоянной угловой скоростью в двух основных случаях подачи жидкости в межтарелочное пространство. Для этих случаев применен общий метод исследования, заключающийся в разложении решения в ряд по степеням малого параметра.

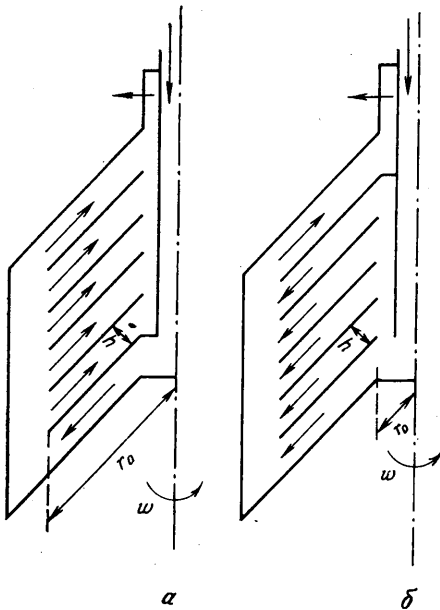
Найдены два члена разложения двух главных компонент относительной скорости потока с учетом условий на входе. Получена формула для расчета начального участка.

Изучение ламинарного течения жидкости в щелевом пространстве между двумя совместно вращающимися соосными параллельными дисками или соосными конусами с параллельными образующими представляет интерес в связи с разнообразными техническими приложениями, например, применительно к проектированию многодисковых насосов, турбин, компрессоров [1-4], а также тарельчатых сепараторов [5-7].

Методы исследования вышеуказанных потоков весьма разнообразны. Так, в [1] используется метод численного решения приближенных уравнений Навье - Стокса (типа уравнений пограничного слоя), в [2] использовалось представление решений полиномами с последующим численным решением, в [3] - метод последовательных приближений, в [6] - метод разложения решения в ряд по степеням безразмерного расстояния от вершины конуса.

Развитие течения вязкой жидкости между вращающимися дисками изучалось в [1, 2]. Однако в этих работах исследования велись при таких значениях характеристических чисел потока, которые почти не встречаются в практике сепарирования, а методы, использованные при этом, не позволяют в каждом конкретном случае провести оценку длины начального участка.

Основными результатами этих исследований следует признать выявление входной и асимптотической области потока.



Фиг. 1

Поле скоростей во входной области зависит от значений окружной V_0 и радиальной U_0 компонент скорости потока на входе, а также характеристического числа λ , являющегося аналогом числа Экмана. Поле скоростей в асимптотической области зависит только от U_0 и λ .

В сепараторах, однако, жидкость поступает в пространство между конусами (тарелками) из камеры или из вертикальных каналов (фиг. 1, а и б), вращающихся с той же угловой скоростью, что и конические тарелки. Поэтому профиль скорости потока в начальном сечении не может быть задан произвольно, поскольку на жидкость, поступающую в межтарелочное пространство, действуют те же массовые силы,

что и в самом межтарелочном пространстве, а у края тарелок окажут влияние и силы вязкости. Вследствие этого поток будет в значительной степени сформирован непосредственно перед входным участком и на входном участке лишь «согласовывается» с асимптотическим течением. С этой точки зрения представляет интерес получить профиль скорости потока во входном сечении как результат решения задачи.

Кроме того, необходимо отметить, что исследования течения вязкой жидкости между вращающимися конусами имеют весьма общий характер, поскольку решение задачи для течения жидкости между вращающимися дисками вытекает как частный случай из решения аналогичной задачи для течения между вращающимися конусами при угле раствора конуса $2\gamma = \pi$. Высказанное в [2] обратное утверждение неверно, так как уравнения движения вязкой жидкости между вращающимися дисками не могут быть сведены простыми преобразованиями к уравнениям движения вязкой жидкости между вращающимися конусами.

1. Постановка задачи. Приближенные уравнения движения вязкой жидкости. Предполагая жидкость однородной и несжимаемой, а относительное течение стационарным, изотермическим и осесимметричным, запишем уравнения Навье — Стокса и неразрывности в биконической системе координат (r, φ, η) , жестко связанной с вращающимися конусами (см. [7]), ось r направим вдоль образующей вниз, угловую координату φ будем отсчитывать против часовой стрелки, ось η направим перпендикулярно образующей вверх. В этом случае система уравнений Навье — Стокса и неразрывности примет вид

$$(1.1) \quad v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\eta \frac{\partial v_r}{\partial \eta} - \frac{v_\varphi^2 \sin \gamma}{H_\varphi} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + 2\omega v_\varphi \sin \gamma +$$

$$+ \nu \left(\Delta v_r - \frac{\sin^2 \gamma}{H_\varphi^2} v_r - \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{H_\varphi^2} v_\eta \right)$$

$$(1.2) \quad v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_\eta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \eta} + \frac{v_\varphi (v_r \sin \gamma + v_\eta \cos \gamma)}{H_\varphi} =$$

$$= -2\omega (v_r \sin \gamma + v_\eta \cos \gamma) + \nu \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{H_\varphi^2} \right)$$

$$(1.3) \quad v_r \frac{\partial v_\eta}{\partial r} + v_\eta \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} - \frac{v_\varphi^2 \cos \gamma}{H_\varphi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + 2\omega v_\varphi \cos \gamma +$$

$$+ \nu \left(\Delta v_\eta - \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{H_\varphi^2} v_r - \frac{\cos^2 \gamma}{H_\varphi^2} v_\eta \right)$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial}{\partial r} (v_r H_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (v_\eta H_\varphi) = 0$$

$$\Phi = \frac{\omega^2 H_\varphi^2}{2} + g H_\varphi' - \frac{p}{\rho}, \quad H_\varphi = r \sin \gamma + \eta \cos \gamma$$

$$H_\varphi' = r \cos \gamma - \eta \sin \gamma, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\sin \gamma}{H_\varphi} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \gamma}{H_\varphi} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

Здесь v_r , v_φ , v_η — соответственно продольная, окружная и поперечная составляющие относительной скорости жидкости, p — давление, ω — угловая скорость вращения конических тарелок, γ — половина угла раствора конуса, ρ и ν — соответственно плотность и кинематическая вязкость жидкости, H_φ — параметр Ляме, Δ — оператор Лапласа в биконической системе координат.

Упростим полученную систему уравнений, применяя методы, изложенные в [8]. Прежде всего примем во внимание, что $\eta \cos \gamma \ll r \sin \gamma$ для лю-

бого из способов подачи жидкости в межтарелочное пространство (фиг. 1, а и б), т. е. $H_\varphi \approx r \sin \gamma$.

Пусть характерный продольный размер l равен расстоянию от вершины конуса до его внешнего края вдоль образующей. Для сходящегося потока $l=r_0$. За характерный поперечный размер примем расстояние между тарелками по нормали, равное h . Характерную скорость потока V можно принять равной среднему значению v_r на входе. Тогда, используя (1.4), можно показать, что поперечная составляющая относительной скорости $v_\eta \sim V\delta$ ($\delta = \frac{h}{l}$). Наибольшее вязкое слагаемое, зависящее

от v_η , равно $\nu \partial^2 v_\eta / \partial \eta^2 \sim \nu V \delta / h^2$. В принятых конструкциях современных сепараторов $h \ll l$ (h в большинстве случаев изменяется от 0.015 до 0.05 см, а l — от 6 до 20 см). На этом основании в уравнениях (1.1)–(1.3) можно пренебречь слагаемыми, содержащими v_η и ее производные.

Далее разделим левую и правую части (1.1) и (1.3) соответственно на $\sin \gamma$ и $\cos \gamma$ и вычтем из левой и правой частей одного уравнения соответственно левую и правую части другого уравнения. Оставляя среди вязких слагаемых наибольшие по величине и проводя обычное для рассматриваемой задачи частичное осреднение инерционных членов, получим систему уравнений.

$$\begin{aligned}
 (1.5) \quad & u(r) \frac{\partial v_r}{\partial r} - \nu \frac{\partial^2 v_r}{\partial \eta^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \\
 & u(r) \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \right) = -2\omega v_r \sin \gamma + \nu \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \eta^2} \\
 & - \operatorname{tg} \gamma f(r) - 2\omega v_\varphi \sin \gamma = \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial}{\partial \eta} (r v_\eta) = 0 \\
 & u(r) = 1/h \int_0^h v_r d\eta, \quad \operatorname{tg} \gamma f(r) = 1/h \int_0^h \frac{v_\varphi^2}{r} d\eta
 \end{aligned}$$

Систему уравнений (1.5) будем решать при граничных условиях

$$\begin{aligned}
 (1.6) \quad & \eta=0, \quad v_r=v_\varphi=v_\eta=0; \quad \eta=h, \quad v_r=v_\varphi=v_\eta=0 \\
 & r=r_0, \quad v_r=U_0(\eta), \quad v_\varphi=V_0(\eta)
 \end{aligned}$$

Кроме того, используем условие постоянства расхода Q через любое сечение межтарелочного пространства конусом, ортогональным тарелкам и имеющим вершину на оси вращения. При сделанных выше допущениях это условие примет вид

$$(1.7) \quad Q = 2\pi h r \sin \gamma \int_0^h v_r d\eta$$

В (1.7) величина Q берется в алгебраическом смысле, т. е. $Q > 0$, если v_r направлена по внешней нормали к поверхности объема, ограниченного рассматриваемым сечением; $Q < 0$, если v_r направлена против внешней нормали.

Приведем систему уравнений (1.5), а также условия (1.6) и (1.7) к безразмерному виду, используя соотношения

$$(1.8) \quad r = l\bar{r}, \quad \eta = h\bar{\eta}, \quad v_r = V\bar{v}_r, \quad v_\varphi = V\bar{v}_\varphi, \quad v_\eta = V\bar{v}_\eta, \quad \Phi = V^2\bar{\Phi}$$

Опуская для простоты черточки над безразмерными величинами, получим, используя (1.8), уравнения (1.5) и граничные условия (1.6) и (1.7)

в безразмерной форме

$$(1.9) \quad \delta^2 \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\partial^2 v_r}{\partial \eta^2} = \delta \frac{hV}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{hV}{v} \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$$

$$(1.10) \quad \delta^2 \kappa \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \right) = -2\lambda^2 v_r + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \eta^2}$$

$$(1.11) \quad -\delta \frac{hV}{v} \operatorname{tg} \gamma f(r) - 2\lambda^2 v_\varphi = \frac{hV}{v} \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$$

$$(1.12) \quad \delta \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial}{\partial \eta} (rv_\eta) = 0$$

$$(1.13) \quad \eta=0, \quad v_r=v_\varphi=v_\eta=0; \quad \eta=1, \quad v_r=v_\varphi=v_\eta=0 \\ r=r_0 \quad v_r=U_0(\eta), \quad v_\varphi=V_0(\eta)$$

$$(1.14) \quad \frac{Q}{lVh} = 2\pi r \sin \gamma \int_0^1 v_r d\eta$$

Здесь κ и λ — безразмерные комплексы, определяемые формулами

$$(1.15) \quad \kappa = \frac{Q}{2\pi h v \sin \gamma}, \quad \lambda = h \sqrt{\frac{\omega \sin \gamma}{v}}$$

В (1.15) величина κ , так же как и Q , берется в алгебраическом смысле. На основании (1.14) функция $u(r)$ в безразмерной форме имеет вид

$$(1.16) \quad u(r) = \int_0^1 v_r d\eta = \frac{Q}{2\pi l V h r \sin \gamma} = \frac{\kappa v}{l V r}$$

2. Определение поля скоростей v_r и v_φ в нулевом приближении. Определяя сначала v_φ из (1.11), а затем v_r из (1.10), получим

$$(2.1) \quad v_\varphi = -\operatorname{tg} \gamma \frac{hV}{2\lambda^2 v} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - \operatorname{tg} \gamma \frac{hV \delta}{2\lambda^2 v} f(r)$$

$$(2.2) \quad v_r = -\operatorname{tg} \gamma \frac{hV}{4\lambda^4 v} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \eta^3} + \operatorname{tg} \gamma \frac{hV \delta^2 \kappa}{4\lambda^4 v} \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \eta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \right. \\ \left. + \delta \left(\frac{df}{dr} + \frac{1}{r} f \right) \right]$$

Подставляя выражения для v_φ и v_r из (2.1) и (2.2) в (1.9), получим дифференциальное уравнение для функции $\Phi(r, \eta)$

$$(2.3) \quad \frac{\partial^5 \Phi}{\partial \eta^5} - \delta^2 \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial r \partial \eta^3} - \\ - \delta^2 \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \eta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \delta \left(\frac{df}{dr} + \frac{1}{r} f \right) \right] + \\ + \delta^2 \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \eta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \delta \left(\frac{df}{dr} + \frac{1}{r} f \right) \right] \right\} - \\ - 4\lambda^2 \delta \operatorname{ctg} \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} + 4\lambda^4 \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0$$

Поскольку безразмерные комплексы κ и λ зависят от h , но не зависят от δ , то решение уравнения (2.3) может быть представлено рядом по степеням малого параметра δ , т. е.

$$(2.4) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} + \delta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} + \dots$$

При этом необходимо предположить, что функция $f(r)$ также может быть представлена рядом по степеням δ

$$(2.5) \quad f(r) = f_0(r) + \delta f_1(r) + \dots$$

Вследствие (2.4) и (2.5) функции $v_r(r, \eta)$ и $v_\varphi(r, \eta)$ будут представлены рядами по степеням малого параметра δ . Сходимость разложения (2.4) будет вытекать из сходимости разложений (2.1), (2.2). Кроме того, для справедливости разложения (2.1) и (2.2), а значит и (2.4), необходимо показать, что

$$(2.6) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} v_r = \lim_{\delta \rightarrow 0} v_r^{(0)} \neq 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} v_\varphi = \lim_{\delta \rightarrow 0} v_\varphi^{(0)} \neq 0$$

Здесь $v_r^{(0)}$ и $v_\varphi^{(0)}$ — компоненты скорости нулевого приближения.

Подставляя (2.4) и (2.5) в уравнение (2.3) и собирая слагаемые при одинаковых степенях δ , получим уравнения для определения функций $\partial \Phi_0 / \partial \eta$, $\partial \Phi_1 / \partial \eta$, ...

$$(2.7) \quad \frac{\partial^5 \Phi_0}{\partial \eta^5} + 4\lambda^4 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} = 0$$

$$(2.8) \quad \frac{\partial^5 \Phi_1}{\partial \eta^5} + 4\lambda^4 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} = 4\lambda^4 \operatorname{ctg} \gamma \frac{\partial \Phi_0}{\partial r}$$

.....

Предположим, что функцию $\partial \Phi_0 / \partial \eta$ можно представить в виде произведения двух функций ($R_0(r)$ и $H_0(\eta)$)

$$(2.9) \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} = R_0 H_0$$

В этом случае из (2.7) получим

$$(2.10) \quad H_0^{(IV)} + 4\lambda^4 H_0 = 0$$

Решение этого уравнения согласно [9] имеет вид

$$(2.11) \quad H_0 = C_1^{(0)} \operatorname{ch} \lambda \eta \cos \lambda \eta + C_2^{(0)} \operatorname{ch} \lambda \eta \sin \lambda \eta + C_3^{(0)} \operatorname{sh} \lambda \eta \cos \lambda \eta + \\ + C_4^{(0)} \operatorname{sh} \lambda \eta \sin \lambda \eta$$

Из граничных условий (1.13) и формул (2.1) и (2.2) вытекает

$$(2.12) \quad \left[\frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial \eta^3} \right]_{\eta=0} = \left[\frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial \eta^3} \right]_{\eta=1} = 0, \\ \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} + \delta f_0 \right]_{\eta=0} = \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} + \delta f_0 \right]_{\eta=1} = 0$$

Для выполнения условий (2.12) с учетом (2.9) необходимо положить

$$(2.13) \quad f_0(r) = KR_0(r)$$

Здесь K — коэффициент пропорциональности, подлежащий определению.

Определив постоянные интегрирования $C_n^{(0)}$ ($n=1, \dots, 4$), при использовании (2.12), (2.13) с учетом (2.9), (2.11) найдем

$$(2.14) \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} = -\delta K R_0(r) F_2(\lambda, \eta)$$

$$(2.15) \quad \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial \eta^3} = 2\delta K \lambda^2 R_0(r) F_1(\lambda, \eta)$$

$$(2.16) \quad F_1(\lambda, \eta) = \operatorname{sh} \lambda \eta \sin \lambda \eta - \frac{\sin \lambda}{\operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda} \operatorname{sh} \lambda \eta \cos \lambda \eta - \\ - \frac{\operatorname{sh} \lambda}{\operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda} \operatorname{ch} \lambda \eta \sin \lambda \eta$$

$$(2.17) \quad F_2(\lambda, \eta) = \operatorname{ch} \lambda \eta \cos \lambda \eta + \frac{\sin \lambda}{\operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda} \operatorname{ch} \lambda \eta \sin \lambda \eta - \\ - \frac{\operatorname{sh} \lambda}{\operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda} \operatorname{sh} \lambda \eta \cos \lambda \eta$$

Подставив (2.14) и (2.15) в (2.1) и (2.2), получим выражение для компонент относительной скорости v_r и v_φ в нулевом приближении

$$(2.18) \quad v_r^{(0)} = -\operatorname{tg} \gamma \frac{\delta h V}{2\lambda^2 v} K R_0 F_1 + \\ + \operatorname{tg} \gamma \frac{\delta^3 \kappa h V}{4\lambda^4 v} K \left(\frac{1}{r} R_0' + \frac{1}{r^2} R_0 \right) (1 - F_2)$$

$$(2.19) \quad v_\varphi^{(0)} = -\operatorname{tg} \gamma \frac{\delta h V}{2\lambda^2 v} K R_0 (1 - F_2)$$

Функцию $R_0(r)$ находим, используя уравнение неразрывности потока. Для этого проинтегрируем (1.12) по переменной η в пределах от 0 до 1, а затем по координате r . Учитывая условия (1.13), получим

$$(2.20) \quad \int_0^1 r v_r d\eta = M$$

Здесь M — постоянная интегрирования.

Подставляя $v_r^{(0)}$ из (2.18) в (2.20) и решая полученное уравнение относительно $R_0(r)$, найдем

$$(2.21) \quad R_0(r) = -\frac{2\lambda^2 v M \operatorname{ctg} \gamma}{K A_1 h V \delta} \frac{1}{r} + \frac{B}{r} \exp \frac{A_1}{1 - A_2} \frac{\lambda^2}{\kappa \delta^2} r^2$$

$$(2.22) \quad A_1 = \int_0^1 F_1(\lambda, \eta) d\eta = -\frac{\operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda}{\lambda (\operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda)}$$

$$A_2 = \int_0^1 F_2(\lambda, \eta) d\eta = \frac{\operatorname{sh} \lambda + \sin \lambda}{\lambda (\operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda)}$$

Здесь B — постоянная интегрирования.

С учетом (2.21) формулы (2.18), (2.19) примут вид

$$(2.23) \quad v_{r,0} = \frac{M}{A_1} \frac{1}{r} F_1(\lambda, \eta) - \operatorname{tg} \gamma \frac{KBhV\delta}{2\lambda^2\nu} \frac{1}{r} \left(\exp \frac{A_1}{1-A_2} \frac{\lambda^2}{\kappa\delta^2} r^2 \right) \times \\ \times F_1(\lambda, \eta) + \operatorname{tg} \gamma \frac{KBhV\delta}{2\lambda^2\nu} \frac{A_1}{1-A_2} \times \\ \times \frac{1}{r} \left(\exp \frac{A_1}{1-A_2} \frac{\lambda^2}{\kappa\delta^2} r^2 \right) [1-F_2(\lambda, \eta)]$$

$$(2.24) \quad v_{\theta,0} = \frac{M}{A_1} \frac{1}{r} [1-F_2(\lambda, \eta)] - \\ - \operatorname{tg} \gamma \frac{KBhV\delta}{2\lambda^2\nu} \frac{1}{r} \left(\exp \frac{A_1}{1-A_2} \frac{\lambda^2}{\kappa\delta^2} r^2 \right) [1-F_2(\lambda, \eta)]$$

3. Определение поля скоростей v_r и v_θ в первом приближении. Для решения неоднородного уравнения (2.8) определим функцию $\Phi_0(r, \eta)$. Интегрируя (2.14) по переменной η с учетом (2.17), имеем

$$(3.1) \quad \Phi_0 = -R_0 \delta K \int F_2(\lambda, \eta) d\eta + \psi(r) = \\ = -R_0 \frac{\delta K}{2\lambda} \left(-\frac{\operatorname{sh} \lambda + \sin \lambda}{\operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda} \operatorname{ch} \lambda \eta \cos \lambda \eta + \operatorname{ch} \lambda \eta \sin \lambda \eta + \right. \\ \left. + \operatorname{sh} \lambda \eta \cos \lambda \eta - \frac{\operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda}{\operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda} \operatorname{sh} \lambda \eta \sin \lambda \eta \right) + \psi(r)$$

Тогда на основании (3.1) решение (2.8) относительно функции $\partial\Phi_1/\partial\eta$ имеет вид

$$(3.2) \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta} = R_1 (C_1^4 \operatorname{ch} \lambda \eta \cos \lambda \eta + C_2^4 \operatorname{ch} \lambda \eta \sin \lambda \eta + C_3^4 \operatorname{sh} \lambda \eta \cos \lambda \eta + \\ + C_4^4 \operatorname{sh} \lambda \eta \sin \lambda \eta) + R_0' \operatorname{ctg} \gamma \frac{\delta K}{6} \eta F_2(\lambda, \eta) + \psi'(r) \operatorname{ctg} \gamma$$

Здесь первое слагаемое представляет собой общее решение соответствующего однородного уравнения, которое ищется аналогично (2.7); два последних слагаемых представляют собой частное решение неоднородного уравнения (2.8).

Учитывая, что $F_2''(\lambda, \eta) = -2\lambda^2 F_1(\lambda, \eta)$, получим выражение для функции $\partial^3\Phi_1/\partial\eta^3$

$$(3.3) \quad \frac{\partial^3\Phi_1}{\partial\eta^3} = 2\lambda^2 R_1 (C_1^4 \operatorname{ch} \lambda \eta \cos \lambda \eta - C_3^4 \operatorname{ch} \lambda \eta \sin \lambda \eta + C_2^4 \operatorname{sh} \lambda \eta \cos \lambda \eta - \\ - C_4^4 \operatorname{sh} \lambda \eta \sin \lambda \eta) + R_0' \operatorname{ctg} \gamma \frac{\delta K}{6} [2F_2'(\lambda, \eta) - 2\lambda^2 \eta F_1(\lambda, \eta)]$$

Для нахождения постоянных C_n^4 ($n=1, \dots, 4$) используем соотношения, аналогичные (2.12), вытекающие из граничных условий (1.13)

$$(3.4) \quad \left[\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial\eta^3} \right]_{\eta=0} = \left[\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial\eta^3} \right]_{\eta=1} = 0 \\ \left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta} + \delta f_1 \right]_{\eta=0} = \left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta} + \delta f_1 \right]_{\eta=1} = 0$$

Для выполнения второго условия (3.4) необходимо, чтобы в этом выражении линейная комбинация функций, зависящих только от r , была пропорциональна R_0' , т. е.

$$(3.5) \quad \psi'(r) \operatorname{ctg} \gamma + \delta f_1(r) = NR_0'$$

Для выполнения первого из условий (3.4) необходимо принять, что R_1 пропорциональна R_0' , т. е.

$$(3.6) \quad R_1 C_n^1 = R_0' C_n \quad (n=1, \dots, 4)$$

Используя условия (3.4) с учетом (3.5) и (3.6) и определяя постоянные C_n , получим для функций $\partial\Phi_1/\partial\eta$ и $\partial^3\Phi_1/\partial\eta^3$ выражения вида

$$(3.7) \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta} = R_0' \left\{ -NF_2(\lambda, \eta) + \operatorname{ctg} \gamma \frac{\delta K}{6} [F_4(\lambda, \eta) + \eta F_2(\lambda, \eta)] \right\} + \psi'(r) \operatorname{ctg} \gamma$$

$$(3.8) \quad \frac{\partial^3\Phi_1}{\partial\eta^3} = R_0' 2\lambda^2 \left\{ NF_1(\lambda, \eta) + \operatorname{ctg} \gamma \frac{\delta K}{6} [F_3(\lambda, \eta) - \eta F_1(\lambda, \eta)] \right\}$$

$$(3.9) \quad F_3(\lambda, \eta) = \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda} \left[\left(A_1 \sin \lambda - \frac{A_1 - A_2}{2} \lambda \cos \lambda - \frac{\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda}{\lambda} \right) \operatorname{ch} \lambda \eta \sin \lambda \eta + \right. \\ \left. + \left(A_1 \operatorname{sh} \lambda - \frac{A_1 + A_2}{2} \lambda \operatorname{ch} \lambda + \frac{\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda}{\lambda} \right) \operatorname{sh} \lambda \eta \cos \lambda \eta + \right. \\ \left. + A_2 (\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda) \operatorname{sh} \lambda \eta \sin \lambda \eta \right]$$

$$(3.10) \quad F_4(\lambda, \eta) = \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda} \left[\left(A_1 \operatorname{sh} \lambda - \frac{A_1 + A_2}{2} \lambda \operatorname{ch} \lambda \right) \operatorname{ch} \lambda \eta \sin \lambda \eta - \right. \\ \left. - \left(A_1 \sin \lambda - \frac{A_1 + A_2}{2} \lambda \cos \lambda \right) \operatorname{sh} \lambda \eta \cos \lambda \eta - \right. \\ \left. - A_1 (\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda) \operatorname{sh} \lambda \eta \sin \lambda \eta \right]$$

Постоянные N и M найдем, используя условие (2.20) и (1.14). Поскольку

$$\int_0^1 [F_3(\lambda, \eta) - \eta F_1(\lambda, \eta)] d\eta = \int_0^1 [F_4(\lambda, \eta) + \eta F_2(\lambda, \eta)] d\eta = 0$$

для выполнения (2.20) необходимо, чтобы $N=0$, а сравнивая (1.14) и (2.20), найдем

$$(3.11) \quad M = \frac{Q}{2\pi h l V \sin \gamma} = \frac{\kappa v}{l V}$$

Подставляя функцию $\partial\Phi_1/\partial\eta$ в (2.4) с учетом $N=0$ и уже имеющихся формул нулевого приближения, представим (2.1) и (2.2) в виде

$$(3.12) \quad v_r = v_r^0 - \delta^2 \frac{hV}{v} \frac{K}{12\lambda^2} R_0' [F_3(\lambda, \eta) - \eta F_1(\lambda, \eta)] + \\ + \delta^4 \kappa \frac{hV}{v} \frac{K}{24\lambda^4} \left(\frac{1}{r} R_0'' + \frac{1}{r^2} R_0' \right) [F_4(\lambda, \eta) + \eta F_2(\lambda, \eta)]$$

$$(3.13) \quad v_{\varphi} = v_{\varphi}^0 - \delta^2 \frac{hV}{\nu} \frac{K}{12\lambda^2} R_0' [F_4(\lambda, \eta) + \eta F_2(\lambda, \eta)]$$

После подстановки функции $R_0(r)$ из (2.21) и ее производных в формулы (3.12) и (3.13) можно заметить, что останется неопределенным только произведение постоянных KB , которое определим, используя последнее из граничных условий (1.13). При этом воспользуемся приближенными граничными условиями, примененными в [10]

$$(3.14) \quad r=r_0, \quad \int_0^1 v_r d\eta = U_0, \quad \int_0^1 v_{\varphi} d\eta = V_0$$

Здесь U_0 и V_0 — средние значения компонент v_r и v_{φ} во входном сечении. Величина U_0 определяется заданием расхода жидкости из (1.17), а V_0 может не зависеть от расхода и путем применения различных устройств при подаче жидкости в межтарелочное пространство (направляющие, перегородки, захватывающие жидкость, и т. д.) может варьироваться в широких пределах.

Обычно принимается, что на входе в межтарелочное пространство относительная окружная компонента скорости $V_0=0$, что приемлемо в большинстве случаев при подаче жидкости с периферии (фиг. 1, а) и, видимо, не соответствует действительности при подаче жидкости из центральной зоны (фиг. 1, б), поскольку в последнем случае должно быть интенсивное закручивание жидкости еще до подачи ее в межтарелочное пространство из-за наличия значительной величины окружной составляющей кориолисовой силы инерции. Некоторыми экспериментами установлена высокая интенсивность закручивания жидкости в сторону, противоположную вращению тарелок, при ее подаче в межтарелочное пространство из центральной зоны тарелок [11].

Осредняя (3.13) по безразмерному расстоянию между тарелками и используя второе условие (3.14), с учетом (1.17), (2.21) и (2.24) найдем

$$(3.15) \quad KB = \frac{2\lambda^2 \nu \operatorname{ctg} \gamma}{hV\delta} \frac{\kappa \nu}{lVA_1} \left(1 - \frac{A_1}{1-A_2} \frac{V_0}{U_0} \right) \times \\ \times \exp \left(-\frac{A_1}{1-A_2} \frac{\lambda^2}{\kappa \delta^2} r_0^2 \right)$$

На основании (3.11)–(3.13), (3.15) и с учетом (2.23) и (2.24) получим формулы для продольной и окружной компонент относительной скорости течения для первого приближения в виде

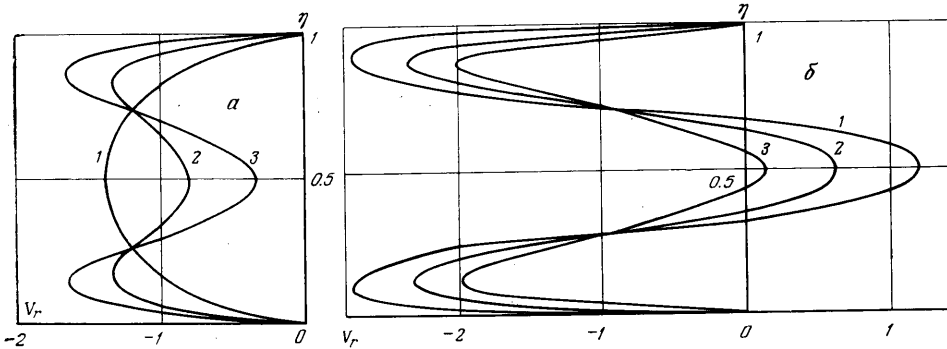
$$(3.16) \quad v_r = \frac{U_0}{A_1} \frac{r_0}{r} \left\{ \chi(r) F_1(\lambda, \eta) + \frac{A_1}{1-A_2} [1-\chi(r)] [1-F_2(\lambda, \eta)] \right\} - \\ - \frac{U_0}{A_1} r_0 \frac{\delta \operatorname{ctg} \gamma}{6} \left\{ 2 \frac{A_1}{1-A_2} \frac{\lambda^2}{\kappa \delta^2} [1-\chi(r)] + \frac{1}{r^2} \chi(r) \right\} \times \\ \times [F_3(\lambda, \eta) - \eta F_1(\lambda, \eta)] + \frac{U_0}{A_1} r_0 \frac{\kappa \delta^3 \operatorname{ctg} \gamma}{6} \times \\ \times \left\{ \left(2 \frac{A_1}{1-A_2} \frac{\lambda^2}{\kappa \delta^2} \right) \left[1-\chi(r) - \frac{1}{r^2} \chi(r) \right] \right\} [F_4(\lambda, \eta) + \eta F_2(\lambda, \eta)]$$

$$(3.17) \quad v_{\varphi} = \frac{U_0}{A} \frac{r_0}{r} \chi(r) [1-F_2(\lambda, \eta)] - \frac{U_0}{A} r_0 \frac{\delta \operatorname{ctg} \gamma}{6} \times \\ \times \left\{ 2 \frac{A_1}{1-A_2} \frac{\lambda^2}{\kappa \delta^2} [1-\chi(r)] + \frac{1}{r^2} \chi(r) \right\} [F_4(\lambda, \eta) + \eta F_2(\lambda, \eta)]$$

$$(3.18) \quad \chi(r) = 1 - \left(1 - \frac{A_1}{1-A_2} \frac{V_0}{U_0} \right) \exp \frac{A_1}{1-A} \frac{\lambda^2}{\kappa \delta^2} (r^2 - r_0^2)$$

Анализ формул (3.17) и (3.18) подтверждает сделанные [1, 2] выводы о существовании входной и асимптотической области течения. Действительно как для сходящегося потока ($\kappa < 0$, $U_0 < 0$, $r < r_0$), так и для расходящегося потока ($\kappa > 0$, $U_0 > 0$, $r > r_0$) при увеличении разности $r^2 + \dot{r}_0^2$ функция $\chi(r) \rightarrow 1$ и течение в асимптотической области не будет зависеть от V_0 , но будет зависеть от U_0 и λ . Такие течения достаточно хорошо изучены, например, [6, 10], и результаты хорошо согласуются между собой и с другими аналогичными исследованиями. Практически асимптотическая область будет при $r > r_0 + L$ для расходящегося потока и при $r = r_0 - L$ для сходящегося потока (L — длина начального участка).

На фиг. 2, а и б представлены профили $v_r(r, \eta)$ на участке входа для распространенных значений параметров сепарирования: $\delta = 0.003$, $\lambda = 6$, $\kappa \delta^2 = -0.05$, $A_1 = -0.17$, $A_1/1 - A_2 = -0.2$, $U_0 = -1$, $r_0 = 1$, $\text{ctg } \gamma = \text{ctg } 40^\circ = 1.19$. Данные взяты для сходящегося потока при двух значениях V_0 : (а) $V_0 = 0$ и (б) $V_0 = 10$. Профили 1, 2 и 3 соответствуют



Фиг. 2

координатам $r = 1$, 0.998 и 0.994. Случай (б) в практике сепарирования не встречается и взят для сравнения. Из фиг. 2, б видно, что при сильном закручивании жидкости на входе в профиле v_r появляется зона противотока, расположенная в середине межтарелочного зазора, которая уменьшается по мере приближения к асимптотической области. Появление этой зоны на входе обусловлено значительной величиной продольной компоненты кориолисовой силы инерции, направленной в сторону, противоположную v_r . В решении аналогичной задачи для дисков [1, 2] это явление не могло быть обнаружено, поскольку входные профили v_r и v_ϕ задавались произвольно.

Расчет по формулам (2.18) и (3.16) показал, что разница между первым и нулевым приближениями незначительна. Например, для случая (а), приняв $\eta = 1/2$, при $r = 1$, $v_r^{(0)} = -1.4$, $v_r = -1.38$; при $r = 0.994$ $v_r^{(0)} = -0.317$, $v_r = -0.314$. Для случая (б) при $r = 1$ $v_r^{(0)} = 1.24$, $v_r = 1.22$; при $r = 0.994$ $v_r^{(0)} = 0.152$, $v_r = 0.149$. Таким образом, сходимость разложения v_r и v_ϕ в ряд по степеням параметра δ достаточно хорошая.

4. Длина начального участка. Для вычисления длины начального участка предположим, что асимптотическим течением является течение между безграничными конусами. Поскольку $\delta \rightarrow 0$ при неограниченном возрастании характерного продольного размера, то, переходя в формулах (3.16) и (3.17) с учетом (3.18) к пределу при $\delta \rightarrow 0$, получим

$$(4.1) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} v_r = \frac{U_0}{A_1} \frac{r_0}{r} F_1(\lambda, \eta)$$

$$(4.2) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} v_\phi = \frac{U_0}{A_1} \frac{r_0}{r} [1 - F_2(\lambda, \eta)]$$

Этим доказывается справедливость (2.6), а значит и справедливость разложения v_r и v_φ в ряды по степеням δ . Формулы (4.1) и (4.2) были впервые получены [5] при изучении течения жидкости между бесконечными конусами. Попутно можно заметить, что

$$(4.3) \quad \int_0^1 (\lim_{\delta \rightarrow 0} v_r) d\eta / \int_0^1 (\lim_{\delta \rightarrow 0} v_\varphi) d\eta = \frac{A_1}{1-A_2}$$

Для определения длины начального участка воспользуемся для простоты формулой (3.17), пренебрегая вторым слагаемым, т. е. учитывая только нулевое приближение. Согласно общей методике определения длины начального участка потребуем, чтобы при $r=r_0 \pm L$ величина v_φ из (3.17) отличалась бы от $\lim_{\delta \rightarrow 0} v_\varphi$ из (4.2) менее чем на 1%. Условие $\eta=1/2$ в данном случае необязательно. На основании этого для длины начального участка получим

$$(4.4) \quad L = \mp \left(r_0 - \sqrt{r_0^2 - \frac{1-A_2}{A_1} \frac{\kappa \delta^2}{\lambda^2} \left[4.6 + \ln \left| 1 - \frac{A_1}{1-A_2} \frac{V_0}{U_0} \right| \right]} \right)$$

Минус перед скобкой соответствует расходящемуся потоку, плюс — сходящемуся.

Подсчитаем величину начального участка для $\lambda=6$, $\delta=0.003$, $\kappa \delta^2=-0.05$, $r_0=1$, $A_1/(1-A_2)=-0.2$, $U_0=1$. В случае, когда $V_0=0$, $L=0.016$; при $V_0=15$, $L=0.02$. Если взять размерное значение L при размерном значении $r_0=10$ см, то в первом случае $L=0.16$ см, а во втором случае $L=0.2$ см. Отсутствие экспериментальных данных не позволяет сравнить этот результат с результатами эксперимента. Однако некоторые косвенные данные позволяют сделать вывод, что вышеприведенные результаты не противоречат имеющимся наблюдениям. Так, в [12] утверждается, что участок стабилизации потока при поступлении жидкости с периферии тарелок составляет несколько процентов радиуса тарелки. Если под этим понимать величину меньше 5%, то полученные результаты укладываются в такие пределы и составляют 1.6–2% радиуса.

В заключение автор благодарит Н. А. Слезкина за обсуждение работы и высказанные критические замечания.

Поступила 23 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Boyd K. E., Rice W. Laminar inward flow of an incompressible fluid between rotating disks with full peripheral admission. Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1968, vol. 35, No. 2. (Рус. перев.: Ламинарное течение между вращающимися дисками при переводе несжимаемой жидкости с периферии. Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Прикл. механ., 1968, т. 35, № 2.)
2. Boyack B. E., Rice W. Integral method for flow between corotating disks. Trans. ASME, Ser. D. J. Basic Engng, 1971, vol. 93, No. 3. (Рус. перев.: Интегральный метод анализа течения между совместно вращающимися дисками. Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Теорет. основы инж. расчетов, 1971, т. 93, № 3.)
3. Мисюра В. И. Ламинарное течение несжимаемой жидкости между двумя вращающимися дисками. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 5.
4. Adams R., Rice W. Experimental investigation of the flow between corotating disks. Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1970, vol. 37, No. 3.
5. Гольдин Е. М. Гидродинамический поток между тарелками сепаратора. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 7.
6. Семенов Е. В. К построению асимптотического решения для ламинарного течения жидкости между тарелками сепаратора. Теорет. основы хим. технологии, 1975, № 5.

7. Карпычев В. А. Течение вязкой несжимаемой жидкости в межтарелочном пространстве сепараторов. Тр. ВНИИ молочной промышленности, 1974, вып. 34.
8. Тара С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
10. Matsch L., Ricè W. An asymptotic solution for laminar flow of an incompressible fluid between rotating disks. Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1968, vol. 35, No. 3. (Рус. перев.: Асимптотическое решение для ламинарного течения несжимаемой жидкости между вращающимися дисками. Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Прикл. механ., 1968, т. 35, № 3.)
11. Сурков В. Д., Золотин Ю. П. Экспериментальное исследование потока однородной жидкости в межтарелочном пространстве барабана сепаратора. В сб. «Проблема интенсификации технологических процессов в мясной и молочной промышленности». М., Пищепромиздат, 1959.
12. Липатов Н. Н. Сепарирование в молочной промышленности. М., «Пищевая промышленность», 1971.