МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1978

УДК 538.4

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ И СИЛЬНЫЕ РАЗРЫВЫ В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

Г. Л. СЕДОВА

(Москва)

Рассматривается распространение простых электромагнитных волн в ферромагнетиках, когда магнитную проницаемость среды можно считать функцией модуля магнитного поля. Показано, что существует два типа простых волн. Из исследования соотношений на поверхности сильного разрыва электромагнитного поля выведено, что при выбранных зависимостях μ от $\mathbf{H}$ существует два типа ударных волн. Найдены условия за фронтом волны, при которых разрывы, идущие со скоростью

$$v_n\sqrt{\mu_1\varepsilon}/c=[1-B_{y2}(\mu_2-\mu_1)/\mu_2(B_{y2}-B_{y1})]^{1/2},$$

устойчивы по отношению к малым возмущениям поля.

Существование простых волн, распространяющихся с различными скоростями в намагничивающихся и поляризующихся средах, обсуждалось в [1], а ударных волн – в [2]. В обеих работах предполагалось, что среда поляризуется и намагничивается по некоторому закону $\varepsilon=\varepsilon(E^2)$ и $\mu=\mu(H^2)$, но конкретный вид такой зависимости не выписывался. Это не только не позволило исследовать изменения величин в волнах, но и определить в явном виде скорость, с которой эти волны распространяются. В рассматриваемой работе в случае линейной зависимости μ от H для малых H и при обратной зависимости $1/\mu$ от H вблизи насыщения, которым соответствуют процессы намагничивания во многих реальных случаях [3], удается провести полное исследование простых и ударных волн.

1. Постановка задачи. Будем считать, что во внешнем магнитном поле ферромагнетик намагничивается так, что вектор магнитной индукции выражается через напряженность внешнего магнитного поля по формуле $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$. Магнитная проницаемость ферромагнетиков, вообще говоря, зависит от величины напряженности внешнего магнитного поля H, скорости применения $\mathbf{H}$ со временем, температуры среды, времени, влияния упругих напряжений, от формы образца и других факторов. Однако при процессах, происходящих с высокой частотой, порядка инфракрасного излучения, а также при низкочастотных процессах, порядка радиоволн, для температур ниже точки Кюри и в отсутствие внешних нагрузок можно ограничиться зависимостью μ только от модуля H.

При намагничивании ферромагнетика в слабых полях $H\sim 0.1$ *эрстед* справедлив закон Рэлея, устанавливающий линейную зависимость магнитной проницаемости среды μ от напряженности магнитного поля ($\mu=\mu_0+\mu_H H$). (Здесь μ_0 и μ_H – постоянные положительные величины.) Значения μ_H могут меняться для различных материалов от 0.1 (для 45–25 перминвара; $\mu_0=400$) до $12\cdot 10^6$ (для супермаллоя; $\mu_0=10^5$). Для железа $\mu_H=2\cdot 10^3$, а $\mu_0=200$ [3].

Физически линейная зависимость μ от H соответствует обратимому изменению объема доменов ферромагнетика. Дальнейшее увеличение напряженности магнитного поля приводит к резкому увеличению магнитной проницаемости вещества, которое связано с необратимыми изменениями объема доменов. Явления, возникающие в этой области, в данной работе не рассматриваются. При полях, близких к насыщению ($H>0.2$ *эрстед*), хорошо выполняется формула Фрелиха-Кеннели $1/\mu=a+bH$; здесь a и b — положительные постоянные величины. Для 4—79 молибденового пермаллоя $a=0.075\cdot10^{-4}$; $b=1/8570$ [3]. Намагничивание ферромагнетика в этой области связано в основном с обратимым изменением направления намагниченности домена.

Электромагнитные процессы в такой среде описываются уравнениями Максвелла, которые в отсутствие внешних токов и зарядов имеют вид [4]

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t},\qquad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\qquad \operatorname{div}\mathbf{B}=0,\qquad \operatorname{div}\mathbf{D}=0 \tag{1.1}$$

Далее предполагается, что вектор электрической индукции связан с электрическим полем равенством $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$, а диэлектрическая проницаемость ε постоянна, что характерно для большинства ферромагнетиков.

2. Простые волны. Для нахождения решений уравнений Максвелла в виде простых волн необходимо предположить, что все величины являются функциями некоторой комбинации $\varphi(x, t)$ переменных времени t и координаты x. Тогда, обозначив скорость распространения волны посредством λ, где $\lambda=dx/dt=-\varphi_t/\varphi_x$, получим из системы (1.1) следующую систему уравнений (здесь и далее штрихом обозначается производная по φ):

$$\frac{B_y'}{\mu}-\frac{B_y}{\mu^2}\mu_B B'-\frac{\lambda\varepsilon}{c}E_z'=0,\qquad -\frac{B_z'}{\mu}+\frac{B_z}{\mu^2}\mu_B B'-\frac{\lambda\varepsilon E_y'}{c}=0$$
$$\frac{\lambda B_y'}{c}+E_z'=0,\qquad \frac{\lambda B_z'}{c}-E_y'=0,\quad B_x'=0,\quad E_x'=0 \tag{2.1}$$

Дисперсионное уравнение, вытекающее из системы (2.1), запишется в виде

$$\frac{\lambda^4\varepsilon^2\mu^2}{c^4}+\frac{\lambda^2\varepsilon\mu}{c^2}\left[2-\frac{\mu_B(B_z^2+B_y^2)}{\mu B}\right]-\left[1-\frac{\mu_B(B_y^2+B_z^2)}{\mu B}\right]=0$$

Можно показать, что корнями этого уравнения будут

$$\lambda_{1,2}=\pm\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}},\qquad \lambda_{3,4}=\pm\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[1-\frac{\mu_B(B_y^2+B_z^2}{\mu B}\right]^{1/2} \tag{2.2}$$

В волне, скорость которой $\lambda=\pm c/\sqrt{\mu\varepsilon}$, величины $H_x'=0$, $H'=0$ и $B'=0$. Таким образом, данная волна перемещается без изменения величины магнитного поля и в ней меняются лишь поперечные составляющие поля. Связь величин в такой волне имеет вид

$$H_z^2+H_y^2=\mathrm{const},\qquad B_z^2+B_y^2=\mathrm{const},$$
$$E_z=-B_y/\sqrt{\mu\varepsilon}+\mathrm{const},\qquad E_y=B_z/\sqrt{\mu\varepsilon}+\mathrm{const} \tag{2.3}$$

Волна не меняет своей формы и представляет собой аналог альфвеновской простой волны в магнитной гидродинамике.

Случай, когда

$$\lambda^2=\frac{c^2}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[1-\frac{\mu_B(B_y^2+B_z^2)}{\mu B}\right] \tag{2.4}$$

соответствует простой волне, в которой изменяются все параметры.

Связь величин в волне представляется формулами

$$H_y'=-\frac{H_y}{H_x}\frac{c^2}{\lambda^2\mu\varepsilon-c^2}H_x',\quad H_z'=-\frac{H_z}{H_x}\frac{c^2}{\lambda^2\mu\varepsilon-c^2}H_x' \tag{2.5}$$

$$H_y'=\frac{H_y}{H_z}H_z',\quad E_z'=-\frac{c}{\lambda\varepsilon}H_y',\quad E_y'=\frac{c}{\lambda\varepsilon}H_z'$$

Из равенств (2.4) следует, что можно выбрать систему координат так, что если в этой системе $H_z=0$, то и $H_z'=0$, а следовательно, и $B_z=0$.

Из третьего уравнения системы (2.1) $\lambda B_y'+cE_z'=0$ получаем

$$\frac{dE_z}{dB_y}=-\frac{\lambda}{c}=-\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left[1-\frac{\mu_B B_y^2}{\mu B}\right]^{1/2} \tag{2.6}$$

Используя конкретный вид зависимости μ от H, приведенной в п. 1, получим следующие выражения для λ^2.

В случае $\mu=\mu_0+\mu_H H$ или $\mu=\sqrt{\mu_H B+\mu_0^2/4}+\mu_0/2$ и $\mu_B=\mu_H\mu/(\mu^2+\mu_H B)$

$$\lambda^2=\frac{c^2}{\varepsilon\mu}\left[1-\frac{\mu_H B_y^2}{(\mu^2+\mu_H B)B}\right]$$

Производная

$$\frac{d\lambda^2\varepsilon/c^2}{dB}=$$

$$=-\frac{3\mu^4\mu_B B^2+\mu^5 B+\mu_H^2 B_x^2 B^2\mu_B+2\mu\mu_H^2 BB_x^2+3\mu^2\mu_B\mu_H BB_x^2+\mu^3\mu_H B_x^2+\mu_H\mu_B\mu^2 B^3}{\mu^2(\mu_H B^2+\mu B)^2}$$

отрицательна. Функция $\lambda^2\varepsilon/c^2$ монотонно убывает с ростом B и при $B\to 0$ имеет вертикальную касательную.

График этой функции представлен на фиг. 1 (кривая *1*).

В случае $1/\mu=a+bH$ или $a\mu=1-bB$ и $\mu_B=-b/a$

$$\lambda^2=\frac{c^2}{\varepsilon\mu}\left(1+\frac{bB_y^2}{a\mu B}\right)$$

Производная

$$\frac{d\lambda^2\varepsilon/c^2}{dB}=\frac{b[2B^2(1-bB_x^2/B)+B_x^2(1-bB)]}{a(1-bB)^3B^2}$$

положительна, поскольку из очевидного неравенства $B_x^2/B<B$ получаем $1-bB_x^2/B>$ $>1-bB>0$ и знаменатель дроби $2B^2(1-bB_x^2/B)+B^2(1-bB)>0$.

Функция $\lambda^2\varepsilon/c^2$ монотонно возрастает с ростом B, и при B, стремящемся к бесконечности, $\lambda^2\varepsilon/c^2$ стремится к $1/a$.

График этой функции представлен на фиг. 1 (кривая *2*).

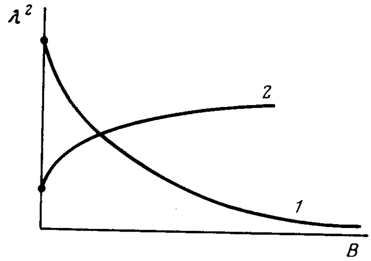
3. Ударные волны. Условия, которые должны выполняться на поверхности сильного разрыва электромагнитных величин, вытекающие из уравнений Максвелла, запишутся в виде [5]

$$\mathbf{H}_{\tau_1}-\mathbf{H}_{\tau_2}=-\frac{v_n}{c}[\mathbf{n}\times(\mathbf{D}_1-\mathbf{D}_2)]_\tau, \tag{3.1}$$

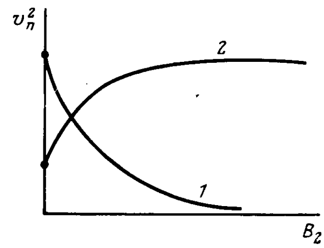
$$\mathbf{E}_{\tau_1}-\mathbf{E}_{\tau_2}=\frac{v_n}{c}[\mathbf{n}\times(\mathbf{B}_1-\mathbf{B}_2)]_\tau$$

$$\mathbf{B}_{n_1}=\mathbf{B}_{n_2},\quad \mathbf{D}_{n_1}=\mathbf{D}_{n_2}$$

Здесь $\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\tau}$ — направления нормали от *1* к *2* и касательной к поверхности разрыва соответственно, v_n — скорость распространения разрыва.



Фиг. 1



Фиг. 2

В случае $v_n=0$ получаем, что разрыв терпит только нормальная к плоскости разрыва компонента магнитного поля, причем $\mu_1 H_{n_1}=\mu_2 H_{n_2}$ или $H_{n_2}=H_{n_1}(\mu_1/\mu_2-1)$.

При $H_{n_2}>H_{1n}$ получаем $\mu_1>\mu_2$ и наоборот. Так что при выбранной ранее линейной зависимости μ от H разрывы с $v_n=0$ невозможны. Такие разрывы возможны лишь в случае $1/\mu=a+bH$.

Предположим, что нормаль к поверхности разрыва совпадает с осью x, а перед разрывом $B_{z_1}=0$.

Из соотношений (3.1) получаем

$$\frac{B_{y_1}}{\mu_1}-\frac{B_{y_2}}{\mu_2}=-\frac{v_n\varepsilon}{c}(E_{z_1}-E_{z_2}),\qquad \frac{B_{z_2}}{\mu_2}=-\frac{v_n\varepsilon}{c}(E_{y_1}-E_{y_2}) \tag{3.2}$$

$$E_{y_1}-E_{y_2}=-\frac{v_n}{c}B_{z_2},\qquad E_{z_1}-E_{z_2}=-\frac{v_n}{c}(B_{y_1}-B_{y_2})$$

Из второго и третьего уравнений этой системы находим, что за разрывом $E_{z_2}\neq 0$ и $B_{z_2}\neq 0$ только при $v_n=c/\sqrt{\mu_2\varepsilon}$. Этот случай соответствует вращательному разрыву.

Из уравнений (3.2) видно, что при этом

$$(B_{y_1}-B_{y_2})(E_{y_2}-E_{y_1})+(E_{z_2}-E_{z_1})B_{z_2}=0$$

т. е. в таком разрыве изменения магнитного и электрического полей ортогональны.

В случае $v_n\neq c/\sqrt{\mu_2\varepsilon}$ за скачком $B_{z_2}=0$ и $E_{y_2}=0$ и происходит разрыв только компонент B_y и E_z электромагнитного поля. Если параметры перед скачком в состоянии *1* известны, то за скачком при заданной скорости разрыва все параметры определяются однозначно.

Легко показать, что скорость распространения разрыва связана с параметрами за и перед скачком формулой

$$v_n=\pm\frac{c}{\sqrt{\mu_1\varepsilon}}\left[1-\frac{H_{y_2}(\mu_1-\mu_2)}{\mu_1 H_{y_1}-\mu_2 H_{y_2}}\right]^{1/2} \tag{3.3}$$

$$v_n=\pm\frac{c}{\sqrt{\mu_1\varepsilon}}\left[\frac{\mu_2 B_{y_1}-B_{y_2}\mu_1}{\mu_2(B_{y_1}-B_{y_2})}\right]^{1/2}=$$

$$=\pm\frac{c}{\sqrt{\mu_1\varepsilon}}\left[1-\frac{B_{y_2}(\mu_1-\mu_2)}{\mu_2(B_{y_1}-B_{y_2})}\right]^{1/2}$$

Убедимся, что при ослаблении интенсивности скачка, т. е. при B_2, стремящемся к B_1, скорость распространения разрыва стремится к скорости распространения простых волн λ. Действительно

$$\frac{v_n^2}{c^2}\mu_1\varepsilon=1-\frac{B_{y_2}(\mu_1-\mu_2)}{\mu_2(B_{y_1}-B_{y_2})}\approx 1-\frac{B_y\,\Delta\mu}{\mu\Delta B_y}=$$
$$=1-\frac{B_y\Delta\mu/\Delta B}{\mu\Delta B_y/\Delta B}\approx 1-\frac{B_y^2\mu_B}{\mu B},\quad \Delta B/\min(B_1,B_2)\ll 1$$

Рассмотрим значения v_n^2 в случае $\mu=\mu_0+\mu_H H$. Покажем, что выражение, стоящее в квадратных скобках в формуле (3.3), положительно. В самом деле, при $B_{y_1}-B_{y_2}>0$ разность $\mu_2 B_{y_1}-\mu_1 B_{y_2}$ также будет положительна, поскольку при подстановке в нее выражения для μ получаем

$$\frac{\mu_0}{2}(B_{y_1}-B_{y_2})+\left(\sqrt{\mu_H B_2+\frac{\mu_0^2}{4}}B_{y_1}-\sqrt{\mu_H B_1+\frac{\mu_0^2}{4}}B_{y_2}\right)$$

При $B_{y_1}>B_{y_2}$ выражения в скобках положительны, следовательно, $B_{y_1}\mu_2-B_{y_2}\mu_1>0$. Аналогично при $B_{y_2}-B_{y_1}>0$ выполняется неравенство $B_{y_2}\mu_1-B_{y_1}\mu_2>0$.

Рассмотрим производную

$$\frac{dv_n^2}{dB_2}=\frac{c^2\mu_1[B_{y_2}\mu_H-(2\mu_2-\mu_0)\mu_2B_2](B_{y_1}-B_{y_2})+B_2(\mu_2B_{y_1}-\mu_1B_{y_2})(2\mu_2-\mu_0)}{\varepsilon\mu_1\mu_2^2B_{y_2}(B_{y_1}-B_{y_2})^2(2\mu_2-\mu_0)}\tag{3.4}$$

Поскольку знаменатель дроби (3.4) всегда положителен, то для выяснения знака dv_n^2/dB рассмотрим отдельно числитель. При $B_1>B_2$ имеем

$$\begin{aligned}&B_{y_2}^2(B_{y_1}-B_{y_2})\mu_1\mu_H+B_{y_1}B_2(2\mu_2-\mu_0)\mu_2(\mu_2-\mu_1)=\\&=B_2[B_2(B_{y_1}-B_{y_2})\mu_1\mu_H+B_{y_1}\mu_2(\mu_2-\mu_1)(2\mu_2-\mu_0)]-\\&-B_x^2(B_{y_1}-B_{y_2})\mu_1\mu_H<B_2[\mu_2B_{y_1}(2\mu_2-\mu_1-\mu_0)-\\&-\mu_1B_{y_2}(\mu_2-\mu_0)]=B_2\mu_H/\mu_2\mu_1[(2B_2\mu_1-\\&-\mu_2B_1)\mu_2B_{y_1}-\mu_2^2B_2B_{y_2}]=\\&=B_2^2\mu_H/\mu_2\mu_1[B_2\mu_1(2\mu_2B_{y_1}-\mu_1B_{y_2})-\mu_2^2B_2B_{y_2}]\end{aligned}\tag{3.5}$$

Выражение в квадратных скобках может быть положительным только в том случае, если $2B_2\mu_1>\mu_2B_1$ и $2\mu_2B_{y_1}>\mu_1B_{y_2}$, но легко показать, что при $B_1>B_2$ одновременно эти два неравенства выполняться не могут, следовательно выражение в одной из круглых скобок в последних двух формулах (3.5) отрицательно, но тогда отрицательно и все выражение, стоящее в квадратных скобках. Таким образом, $dv_n^2/dB_2<0$ при $B_1>B_2$.

Рассмотрим случай $B_2>B_1$, тогда

$$\begin{aligned}&B_{y_2}^2(B_{y_1}-B_{y_2})\mu_1\mu_H+B_{y_1}B_2(2\mu_2-\mu_0)\mu_2(\mu_2-\mu_1)<\\&<B_{y_2}B_2(B_1-B_2)\mu_1\mu_H+(2\mu_2-\mu_0)B_{y_1}B_2(\mu_2-\mu_1)=\\&=B_2(\mu_2-\mu_1)[-\mu_1(\mu_1+\mu_2-\mu_0)B_{y_2}+B_{y_1}(2\mu_2-\mu_0)\mu_2]=\\&=B_2(\mu_2-\mu_1)(\mu_2^2B_{y_1}-\mu_1^2B_{y_2})+(\mu_2-\mu_0)(\mu_2B_{y_1}-\mu_1B_{y_2})\end{aligned}\tag{3.6}$$

При $B_2>B_1$ или $B_{y_2}>B_{y_1}$ выполняются неравенства $\mu_2B_{y_1}<\mu_1B_{y_2}$ и $\mu_2^2B_{y_1}<\mu_1^2B_{y_2}$, следовательно, и в этом случае $dv_n^2/dB_2<0$.

График зависимости v_n^2 от B_2 представлен на фиг. 2 (кривая *1*).

Используя третье соотношение системы (3.1), получаем зависимость E_{z_2} от B_{y_2}, представленную на фиг. 3.

Рассмотрим случай $1/\mu=a+bH$. Выражение, стоящее в квадратных скобках формулы (3.3), также будет положительным, поскольку при $B_{y_1}-B_{y_2}>0$

$$(1-bB_2)B_{y_1}-(1-bB_1)B_{y_2}=(B_{y_1}b/a)(B_1-B_2)+\mu_1(B_{y_1}-B_{y_2})>0$$

Аналогично в случае $B_{y_2}-B_{y_1}>0$ можно показать, что числитель дроби (3.3) положителен.

Вычислим производную

$$\frac{dv_n^2}{dB_2}=\frac{c^2\mu_1(B_{y_1}-B_{y_2})(B_{y_2}^2\mu_B-\mu_2B_2)+\mu_2(B_{y_1}\mu_2-\mu_1B_{y_2})B_2}{\varepsilon\mu_1\mu_2^2B_{y_2}(B_{y_1}-B_{y_2})}\tag{3.7}$$

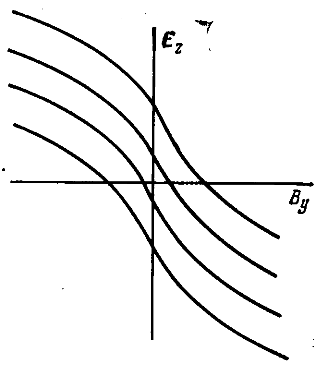
Как и раньше, рассмотрим сначала случай $B_1>B_2$, тогда, преобразуя отдельно числитель дроби (3.5), получим

$$\mu_1(B_{y_2}{}^2b+a\mu_2B_2)(B_{y_2}-B_{y_1})-a\mu_2(B_{y_1}\mu_2-B_{y_2}\mu_1)B_2=$$
$$(3.8)\qquad =b[\mu_2B_2B_{y_1}(B_1-B_2)-\mu_1B_{y_2}{}^2(B_{y_1}-B_{y_2})]>$$
$$>bB_{y_2}[\mu_2B_2(B_1-B_2)+\mu_1B_2(B_1-B_2)]=b^2/aB_{y_2}B_2(B_1-B_2)^2>0$$

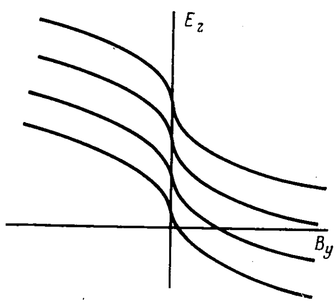
Аналогично доказывается положительность числителя в случае $B_2>B_1$.

Итак, с ростом B_2 функция $v_n{}^2$ монотонно возрастает и при $B_2\to\infty$ величина $v_n{}^2$ стремится к c^2/ε.

График зависимости $v_n{}^2$ от B_2 представлен на фиг. 2 (кривая *2*). Зная зависимость v_n от B_{y_2}, можно, используя первую формулу системы (3.2), представить графически зависимость E_{z_2} от B_{y_2} (фиг. 4).



Фиг. 3



Фиг. 4

4. Эволюционность сильных разрывов. При взаимодействии сильного разрыва с малыми возмущениями, которые возникают в электромагнитном поле слева и справа от разрыва, может появиться неустойчивость, связанная с возникновением конечных возмущений отраженных волн. Легко показать, что малые возмущения в рассматриваемой среде распространяются с теми же скоростями, что и простые волны, рассмотренные в п. 1.

Для эволюционности ударной волны, необходимо, чтобы линеаризованные условия на сильном разрыве, которым должны удовлетворять соответствующие возмущения $\delta\mathbf{A}$ электромагнитных величин, позволяли однозначно определить амплитуды расходящихся волн [6]. Условия на сильном разрыве, записанные через малые возмущения поля слева и справа от разрыва, для компонент H_x, H_y и E_z имеют вид

$$\delta\mu_1H_{x_1}+\mu_1\delta H_{x_1}=\mu_2\delta H_{x_2}+H_{x_2}\delta\mu_2$$
$$(4.1)\qquad \delta E_{z_1}-\delta E_{z_2}=\frac{v_n}{c}(\mu_1\delta H_{y_1}+H_{y_1}\delta\mu_1-\mu_2\delta H_{y_2}-H_{y_2}\delta\mu_2)+$$
$$+\frac{\delta v_n}{c}(\mu_1H_{y_1}-\mu_2H_{y_2})$$
$$\delta H_{y_1}-\delta H_{y_2}=\frac{v_n\varepsilon}{c}(\delta E_{z_1}-\delta E_{z_2})+\frac{\delta v_n{}^2\varepsilon}{c}(E_{z_1}-E_{z_2})$$

Для эволюционности необходимо, чтобы от разрыва расходились две волны. Это возможно только при $v_n>\lambda_1$ и $v_n<\lambda_2$. При $B_{y_2}=B_{y_1}$ величина $v_n=\lambda_1$. В случае $\mu=\mu_0+\mu_HH$ функции v_n и λ монотонно убывают, поэтому $v_n>\lambda_1$ при $B_{y_2}<B_{y_1}$. Покажем, что при $B_{y_2}<B_{y_1}$ и $\lambda_2>v_n$. Действительно, из

(1.5) и (2.3) следует:

$$\frac{1}{\mu_2}-\frac{\mu_H B_{y_2}^2}{\mu_2(\mu_2 B_2+\mu_H B_2^2)}>\frac{B_{y_1}\mu_2-B_{y_2}\mu_1}{\mu_1\mu_2(B_{y_1}-B_{y_2})}$$

при $B_{y_1}\mu_2^2(\mu_2-\mu_0)[\mu_2(\mu_1-2\mu_2+\mu_0)+\mu_H\mu_1 B_x^2]>B_{y_2}\mu_2^2(\mu_2-\mu_0)[\mu_1(\mu_0-\mu_2)+$ $+\mu_H\mu_1 B_x^2]$.

Последнее неравенство справедливо при $B_{y_1}>B_{y_2}$.

Таким образом, разрыв будет эволюционен только в том случае, если магнитное поле за фронтом разрыва падает.

При $1/\mu=a+bH$, как было показано выше, функции v_n и λ монотонно возрастают, поэтому $v_n>\lambda_1$ при $B_{y_2}>B_{y_1}$. Покажем, что при возрастании магнитного поля за скачком выполняется и второе условие устойчивости ударной волны, т. е. при $B_{y_2}>B_{y_1}$, $v_n<\lambda_2$ действительно неравенство

$$1+\frac{bB_{y_2}^2}{a\mu_2 B_2}>1+\frac{B_{y_1}(\mu_1-\mu_2)}{\mu_1(B_{y_2}-B_{y_1})}$$

после преобразования принимает вид

$$B_{y_2}^2(B_{y_2}-B_{y_1})\mu_1-B_{y_1}(B_2-B_1)\mu_2>0$$

Заменяя это неравенство более сильным, получаем

$$B_2(B_2-B_1)(B_{y_2}\mu_1-B_{y_1}\mu_2)>0$$

При $B_2>B_1$ имеем

$$B_{y_2}\mu_1-B_{y_1}\mu_2=(B_{y_2}-B_{y_1})\mu_1-B_{y_1}(\mu_1-\mu_2)>0$$

Таким образом, доказано, что $\lambda_2>v_n$ при $B_2>B_1$. В случае зависимости μ от B в виде $a\mu=1-bB$ разрыв будет эволюционным, если за разрывом магнитное поле будет возрастать.

Автор благодарит В. В. Гогосова и А. Г. Куликовского за предложенную тему.

Поступила 13 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ruggeri T.* Sulla propagazione di onde electromagnetiche di discontinuita in mezzi non lineari. Rend. Ist. Lombardo Accad. Sci. e Lett., 1973, vol. A, 107, No. 2.
2. *Ruggeri T.* On some properties of electromagnetic shock waves in isotropic non-linear materials. Bollettino della Unione Matematica Italiana, 1974, Ser. 4, t. 9, No. 2.
3. *Бозорт Р.* Ферромагнетизм. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
5. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1, М., «Наука», 1976.
6. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.