

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ УНОСА

В. В. ЗНАМЕНСКИЙ

(Москва)

Рассматривается уравнение, описывающее в простейших предположениях (зависимость давления лишь от местного угла наклона поверхности, метод локального подобия для расчета тепловых потоков) изменение формы тела в результате интенсивного уноса массы с поверхности под воздействием конвективного аэродинамического нагрева. Исследуются математические вопросы, возникающие при его численном решении. Доказана неустойчивость явных схем в окрестности критической точки. Предложена устойчивая явно- неявная схема, пригодная для сквозного счета негладких решений.

1. Изменение формы осесимметричного тела в результате уноса массы с поверхности описывается уравнением [1]

$$(1.1) \quad F_t = \sqrt{1 + F_y^2} D$$

Здесь $x = F(t, y)$ — мгновенная форма тела в декартовой системе координат x, y , ось x которой направлена по его оси, t — время, D — скорость уноса по нормали к поверхности.

В предположении, что все тепло идет на разрушение материала, величину D можно представить в виде

$$(1.2) \quad D = H^{-1}(q - q_r)$$

где q — конвективный тепловой поток, q_r — радиационный поток с поверхности, H — эффективная энтальпия материала [2].

Ограничимся для простоты случаем ламинарного теплообмена. Величину q будем рассчитывать по формуле локального подобия [3]

$$(1.3) \quad q = A_\infty \frac{puy}{\sqrt{4\xi}}, \quad \xi = \int_0^y puy^2 \sqrt{1 + F_y^2} dy$$

$$u = \sqrt{1 - p^0}, \quad \omega = (\gamma - 1)/\gamma$$

Здесь p — давление на поверхности, отнесенное к давлению торможения за прямым скачком уплотнения, γ — эффективный показатель адиабаты. Величина A_∞ определяется, например, по формуле Фэя и Ридделла [4].

Примем, что распределение давления носит «ньютоновский» характер, т. е. имеет место зависимость

$$(1.4) \quad p = p(\theta), \quad \text{ctg } \theta = F_y$$

Подставляя (1.2) — (1.4) в (1.1), приходим к замкнутому интегродифференциальному уравнению

$$(1.5) \quad F_t = \Omega(t, y, \xi, F_y), \quad \Omega = H^{-1} \left[A_\infty(t) \frac{y}{\sqrt{4\xi}} \Phi(F_y) - q_r \right] \sqrt{1 + F_y^2}$$

$$\xi = \int_0^y \Psi(y, F_y) dy, \quad \Psi = y^2 \Phi(F_y)$$

$$\Phi(F_y) = pu\sqrt{1+F_y^2} \quad (p=p(F_y), u=u(p))$$

в котором t и y — независимые переменные, а $F=F(t, y)$ — искомая функция.

2. Уравнение (1.5) эквивалентно следующей системе существенно нелинейных уравнений в частных производных:

$$(2.1) \quad F_t = \Omega(t, y, \xi, F_y)$$

$$(2.2) \quad \xi_y = \Psi(y, F_y) \quad (\xi = \xi(t, y))$$

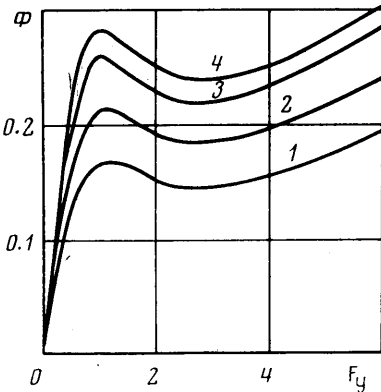
с условием $\xi(t, 0) = 0$.

Система (2.1), (2.2) обладает двумя семействами характеристик, задаваемых соотношениями

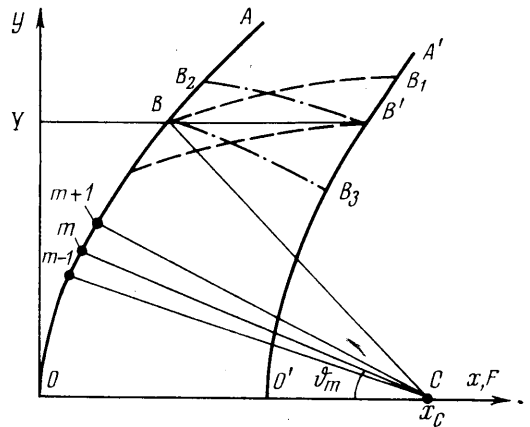
$$(2.3) \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial F_y}, \quad \frac{dF}{dt} = F_t + \frac{dy}{dt} F_y \quad \left(\sim \frac{dF}{dy} = F_y - \Omega / \frac{\partial \Omega}{\partial F_y} \right)$$

$$(2.4) \quad t = \text{const}, \quad \frac{d\xi}{dy} = \Psi$$

Характеристики (2.4) порождены уравнением (2.2) и тривиальны (само уравнение имеет характеристический вид). Характеристики же (2.3) играют принципиальную роль. Во-первых, они определяют постановку краевых задач для уравнения (1.5), во-вторых, их направление необходимо учитывать при выборе схемы численного решения этого уравнения.



Фиг. 1



Фиг. 2

Ниже для краткости будем называть характеристиками как сами трехмерные характеристики (2.3), так и их проекции на плоскости t, y и x, y . Заметим, что направление характеристик определяется в основном видом функции $\Phi(F_y)$, так как член с q_r в выражении для Ω обычно мал. Функция $\Phi(F_y)$ для зависимости (1.4) по формуле местных сфер [5]

$$(2.5) \quad p = 1 - 1.17 \cos^2 \theta + 0.225 \cos^6 \theta$$

изображена на фиг. 1. Кривые 1—4 соответствуют $\gamma = 1.1, 1.2, 1.3, 1.4$.

3. Пусть при $t=0$ на отрезке $0 \leq y \leq Y$ задана начальная форма уносимой поверхности

$$(3.1) \quad F(0, y) = F_0(y)$$

Область определения решения уравнения (1.5) по начальным данным (3.1) ограничена сверху характеристикой, выходящей из точки $t=0$, $y=Y$ и определяемой только в процессе решения. Численное решение уравнения (1.5) удобнее, однако, строить в области с заранее известными границами, например в прямоугольнике $0 \leq t \leq T$, $0 \leq y \leq Y$. Поясним постановку граничного условия при $y=Y$ для соответствующей краевой задачи (граница $y=0$, как будет показано в п. 4, свободна от постановки граничного условия для функции F).

Рассмотрим плоскость x, y (фиг. 2). Пусть OBA и $O'B'A'$ соответственно начальная и конечная форма уносимой поверхности. Если характеристики пересекают отрезок BB' снизу вверх (как показано штриховыми линиями на фиг. 2), то граница $y=Y$ свободна от постановки граничного условия, так как начальные данные (3.1) позволяют определить участок $O'B'B_1$ конечной формы (т. е. даже больше, чем требуется по постановке задачи). Если же характеристики пересекают отрезок BB' сверху вниз (штрихпунктирные линии на фиг. 2), то конечная форма на участке B_2B' определяется начальной формой на участке OBB_2 (участок OB влияет через величину ξ) и для построения решения во всей рассматриваемой области требуется задать какое-либо граничное условие при $y=Y$. При этом естественно использовать условие, заведомо не вносящее сильных возмущений в область определения решения по начальным данным (3.1), т. е. условие, область влияния которого действительно была бы ограничена снизу характеристикой BB_2 . В качестве такого граничного условия в настоящей работе использовалось условие

$$(3.2) \quad F_{yy}(t, Y) = 0$$

4. Для численного решения задачи введем на плоскости t, y прямоугольную сетку t^n, y_m ($m=0, 1, \dots, M$; $y_0=0, y_M=Y$), шаги которой τ и h могут, вообще говоря, меняться от слоя к слою. Пусть F_m^n (значения F на n -м слое) известны. Имеем $\xi_0^n = 0$. Значения ξ^n в остальных узлах рассчитаем последовательно, интегрируя (2.2) по формуле трапеций. Величину F_y в правой части (2.2) при этом можно задавать, например, центральными разностями. Подчеркнем, что практически любая замена уравнения (2.2) конечно-разностным не грозит возникновением неустойчивости, так как это уравнение содержит производную от ξ только по одному направлению.

При аппроксимации уравнения (2.1) конечно-разностным значения ξ можно брать с n -го слоя, так как Ω не зависит от производных этой величины. При этом в зависимости от того, на каком слое будет вычисляться F_y , получаемая схема будет явной или неявной. Остановимся сначала на явных схемах, имеющих вид

$$(4.1) \quad (F_m^{n+1} - F_m^n) / \tau = \Omega(t^n, y_m, \xi_m^n, F_y^n) = \Omega(F_y^n)$$

В ряде работ, например [6, 7], величина F_y в (4.1) определялась с помощью центральных разностей. Однако из теории разностных схем известно, что это приводит к неустойчивой схеме при $\tau \sim h$ (здесь считаем, что масштабами длины и времени служат соответственно характерный размер тела и отношение этой величины к характерному значению D). В принципе при $\tau \ll h$ такая схема позволяет рассчитывать гладкие решения до t порядка нескольких единиц (вне области $y \ll 1$, о чем см. ниже). Однако

в случае, когда F_y разрывно, а, как будет показано в п. 7, 8, именно такие решения представляют наибольший интерес, явный счет с центральными разностями для F_y неустойчив практически при любом τ/h .

К устойчивой явной схеме привела бы односторонняя аппроксимация F_y^n в сторону, противоположную направлению характеристик в рассматриваемой точке, если бы при этом во всех узлах выполнялось условие Куранта

$$(4.2) \quad \frac{\tau}{h} \leq \left| \frac{dy}{dt} \right|^{-1} = \left| \frac{\partial \Omega}{\partial F_y} \right|^{-1}$$

Рассмотрим малую окрестность критической точки ($y \ll 1, F_y \ll 1$). Здесь имеем

$$(4.3) \quad \begin{aligned} F &\approx F(t, 0) + y^2/(2R), & F_y &\approx y/R, & p &\approx 1 - aF_y^2, & u &\approx \sqrt{\omega a} F_y \approx \beta y \\ \Phi(F_y) &\approx \sqrt{\omega a} F_y, & \Phi_{F_y} &\approx \sqrt{\omega a}, & \xi &\approx \beta y^4/4 \quad (a=1.17, \beta=\sqrt{\omega a}/R) \end{aligned}$$

(R — радиус кривизны при $y=0$). Подставляя (4.3) в (2.3), получаем

$$(4.4) \quad \frac{dy}{dt} \approx -A\sqrt{\beta} \frac{R}{y} < 0, \quad A = H^{-1}A_\infty$$

$$(4.5) \quad \frac{dF}{dy} \approx \frac{q_r}{A_\infty \sqrt{\beta}} \frac{y}{R} > 0$$

Из (4.4) видим, что характеристики в носке идут в сторону оси тела и, следовательно, граница $y=0$ свободна от постановки граничного условия для функции F . Выражение (4.5) показывает, что характеристики в плоскости x, y имеют положительный наклон (т. е. идут «назад») и падают на ось $y=0$ почти вертикально.

Отметим, что при $q_r=0$ оценки значения dF/dy требуют удержания большего числа членов в разложении функции $\Phi(F_y)$ по степеням F_y . В этом случае можно получить

$$\frac{dF}{dy} \approx -a \frac{\omega + 3}{2} F_y^3 < 0$$

т. е. наклон характеристик в плоскости x, y имеет другой знак.

Далее, подставив (4.4) в (4.2), получаем $\tau/h \leq y/A\sqrt{\beta}R$, т. е. вблизи оси тела условие Куранта нарушается при любом конечном τ/h . Это есть очевидное следствие того обстоятельства, что характеристики в плоскости t, y касаются линий $t=\text{const}$ при $y=0$ (см. (4.4)).

Полученный результат заставляет отказаться от использования явных схем для численного решения задачи — они заведомо неустойчивы при малых y .

Следует отметить, что вывод о невозможности явного счета в окрестности носка является прямым следствием использования формулы (2.5) для давления. Очевидно, что к тому же результату приводит любая «ньютоновская» аппроксимация давления, дающая в носке $p \approx 1 - aF_y^2$ ($a = \text{const}$).

5. Для численного решения уравнения (1.5) используем следующую явно- неявную схему. Значения F_m^{n+1} будем вычислять последовательно в направлении убывания m , используя простейшие трехточечные шаблоны вида «уголок», явный при $y' > 0$ и абсолютно устойчивый неявный при $y' < 0$, с соответствующими направлениями аппроксимации F_y .

Величина F_M^{n+1} вычисляется по явному шаблону с использованием при $y'(t, Y) < 0$ условия (3.2).

Отыскание значения F_m^{n+1} при использовании неявного шаблона требует решения трансцендентного уравнения

$$(5.1) \quad x = \varphi(x)$$

$$\varphi(x) = F_m^n + \tau \Omega((F_{m+1}^{n+1} - x)/(y_{m+1} - y_m)), \quad x = F_m^{n+1}$$

Заметим, что решение этого уравнения прямыми итерациями невозможно, так как условие их сходимости $|\varphi'(x)| < 1$ эквивалентно, как нетрудно видеть, условию Куранта (4.2). В настоящей работе уравнение (5.1) решалось методом Ньютона.

6. Рассмотрим более общую краевую задачу. Пусть начальная форма задана на отрезке $0 \leq y \leq Y$. Введем в плоскости x, y полюс — точку C на оси $y=0$ с абсциссой $x_c > 0$ (фиг. 2). Точка пересечения мгновенных форм $x = F(t, y)$ с прямой BC определяет зависимость $y = y(t)$, которая в плоскости t, y задает кривую, выходящую из точки $(0, Y)$. Будем эту кривую считать верхней границей области, в которой решается уравнение (1.5). На тех участках этой границы, через которые характеристики входят внутрь рассматриваемой области, используем граничное условие $F_{yy} = 0$.

Нетрудно видеть, что краевая задача, сформулированная в п. 3, есть частный случай рассматриваемой здесь, соответствующей $x_c \rightarrow \infty$.

Пусть начальная форма задана набором точек $\{x_m^0, y_m^0\}$. Соединим эти точки прямыми линиями с полюсом и будем называть эти линии координатными (фиг. 2). При численном решении поставленной здесь задачи естественно отказаться от использования прямоугольной сетки в плоскости t, y — удобнее следить за перемещением точек пересечения мгновенных форм с координатными линиями.

Уравнения, описывающие движение указанных точек, получаются из простых геометрических соображений и имеют вид

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \frac{dx_m}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial t} \cos \vartheta_m, & \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial t} \sin \vartheta_m \\ \frac{\partial R}{\partial t} &= -\frac{D}{\sin(\vartheta_m + \theta)} \end{aligned}$$

Здесь $R = R(t, y)$ — расстояние от рассматриваемой точки на мгновенной форме $x = F(t, y)$ до полюса, ϑ_m — угол между m -й координатной линией и осью x .

Не выписывая здесь расчетных формул, укажем, что устойчивый счет при интегрировании системы (6.1) обеспечивает явно-неявная схема, полностью аналогичная описанной в п. 5: там, где характеристики в плоскости x, y , выпущенные вперед, идут выше координатных линий, F_y при вычислении D берется по соответствующей односторонней разности на n -м слое, в противном случае — по соответствующей разности на $(n+1)$ -м слое. Очевидно, что при $x_c \rightarrow \infty$ эта схема переходит в описанную в п. 5.

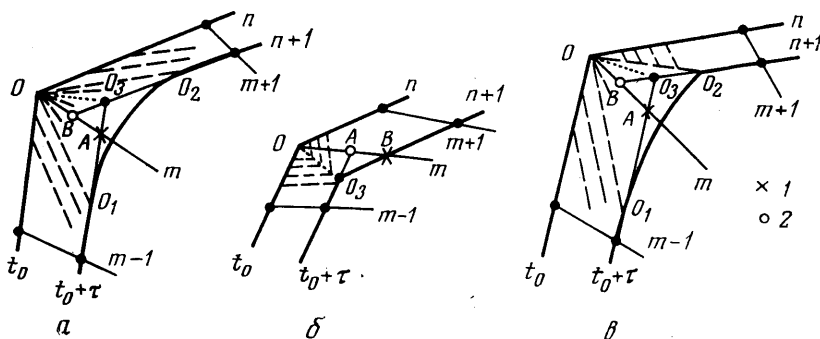
7. Рассматриваемая краевая задача не имеет, вообще говоря, решения в классе непрерывно дифференцируемых функций. Действительно, интегральная поверхность уравнения (1.6) может состоять из пересекающихся листов гладких поверхностей, даже если начальные и граничные условия заданы гладкими функциями. В этом случае физически очевидное требование непрерывности искомой функции $F(t, y)$ заставляет строить решение в классе функций с кусочно-непрерывными производными. В плоскости x, y таким решениям соответствуют кривые с угловыми точками, т. е. мгновенные формы в этом случае имеют изломы образующей.

Заметим, что образование угловых точек характерно для тел, начальная форма которых имеет участки с малыми θ . Действительно, из вида функции $\Phi(F_y)$ следует, что при $F_y \sim 1 \div 2.5$ характеристики идут в направ-

лении от оси, а при больших F_y — к оси тела, т. е. здесь имеется тенденция к их пересечению.

Численная схема, описанная в п. 5 и 6, нуждается в определенной модификации для счета в окрестности угловых точек. Достаточно заметить, что здесь она становится даже внутренне противоречивой — направление характеристик в точке излома, оцененное по наклону поверхности по разные стороны от нее, может быть совершенно различным, и неясно, по какому шаблону следует рассчитывать новое положение точки на соответствующей координатной линии.

Пусть в момент времени t_0 на уносимой поверхности имеется излом (для определенности выпуклый). Тогда, как показано в [8], в окрестности этой точки реализуется один из трех типов решения, качественно изображенных на фиг. 3:



Фиг. 3

а) излом исчезает (F_y при $t > t_0$ непрерывно), из угловой точки O выходит веер характеристик (штриховые линии на фиг. 3);

б) излом сохраняется и перемещается вдоль линии, изображенной на фиг. 3, б пунктиром;

в) из угловой точки выходит веер характеристик, верхняя из которых OO_2 является одновременно траекторией «ослабленного» излома (F_y на линии OO_2 при $t > t_0$ терпит разрыв, но меньший по величине, чем в точке O при $t = t_0$).

Заметим, что все линии на фиг. 3, кроме криволинейных отрезков O_1O_2 , можно считать прямыми, так как рассматривается малая окрестность излома и малые τ . Аналогичные ситуации возникают и в случае вогнутого излома.

В настоящей работе расчет в окрестности угловых точек предлагается вести на основании следующих соображений. Пусть (m, n) — узел, соответствующий излому, индексы 1 и 2 присвоим значениям параметров непосредственно до и после излома.

Расчет значений x_m^{n+1} и y_m^{n+1} по конечно-разностным аппроксимациям уравнений

(6.1) с использованием односторонних разностей для F_y , может дать два качественно различных результата — точки A и B на фиг. 3 (тонкими сплошными линиями на фиг. 3 изображены координатные линии). Точка A (соответственно B) получается, если при вычислении F_y использовать $(m-1)$ -й ($(m+1)$ -й) слой, и соответствует перемещению плоского участка, имеющего наклон θ_1 (θ_2), с нормальной скоростью D_1 (D_2).

Используется следующая гипотеза: устойчивый счет обеспечивает такая схема, в которой из двух указанных значений (точек A и B) берется более близкое к точному. Такие значения отмечены на фиг. 3 точками 1, в отличие от «неверных» значений — точек 2.

Отметим, что получающееся при этом значение в случае б) всегда ложится на точное решение (которое «портится» за счет сеточной аппроксимации только на следующем шаге по времени), а в случаях а) и в) оказывается на точном решении, только если координатная линия проходит вне веера характеристик. Однако во всех случаях указанный выбор обеспечивает более регулярное приближение точной мгновенной формы сеточной функцией.

Заметим, что если в случае, изображенном на фиг. 3, в, направление аппроксимации F_y выбрать по характеристикам, соответствующим θ_1 и θ_2 , то это дает неверное с точки зрения принятой гипотезы направление шаблона.

Нетрудно получить геометрический критерий, определяющий направление аппроксимации F_y . Пусть O_3 — точка пересечения прямых, получаемых продолжением прямолинейных участков поверхности при $t=t_0+\tau$ (в случае б) O_3 — новое изложение излома), а α — угол между прямой OO_3 и осью x . Легко видеть, что требуемое направление шаблона определяется взаимным расположением прямой OO_3 и координатной линии: если линия OO_3 идет выше последней, то счет следует вести «снизу вверх», в противоположном случае — «сверху вниз».

Из простых геометрических соображений легко получить

$$(7.1) \quad \operatorname{tg} \alpha = (D_1 \sin \theta_2 - D_2 \sin \theta_1) / (D_1 \cos \theta_2 - D_2 \cos \theta_1)$$

Весьма примечательным является то обстоятельство, что формулу (7.1) можно использовать для определения направления шаблона как в точках сильных изломов, так и на гладких участках поверхности. Действительно, при $\theta_2 \rightarrow \theta_1$ (и, следовательно, $D_2 \rightarrow D_1$) выражение (7.1) переходит во вторую из формул (2.3) (с заменой $dF/dy = \operatorname{ctg} \alpha$). Это есть простое отражение того факта, что траекториями слабых изломов являются характеристики.

Таким образом, для сквозного расчета негладких решений можно применять описанную в п. 5 и 6 схему с единственной модификацией: направление (а следовательно, и вид) шаблона в каждом узле связывать не с направлением характеристик, а с взаимным расположением линий OO_3 и координатных линий, для чего использовать формулу (7.1).

8. В качестве примера расчета по описанной выше схеме на фиг. 4 представлены мгновенные формы, возникающие при разрушении первоначально затупленных по сфере конуса с углом полурастора 10° (сплошные кривые) и цилиндра (штриховые). Параметры набегающего потока полагались постоянными, $\gamma=1.2$. Линейные размеры на фиг. 4 отнесены к радиусу затупления начальной формы, время t указано в условных единицах, так как одна и та же последовательность форм соответствует различным абсолютным значениям величины H и параметров набегающего потока.

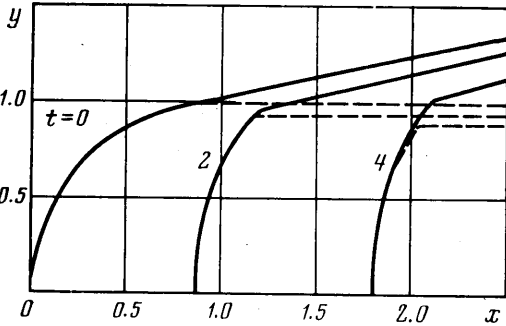
Представленные результаты показывают, что для рассмотренных тел характерным является образование в процессе уноса массы угловой точки. Укажем, что лобовые поверхности мгновенных форм, соответствующих конусу и цилиндру, начинают заметно расходиться при $t \geq 6$.

Автор благодарит В. В. Лулева за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

Поступила 5 IV 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Мурзинов И. Н. О форме тел, разрушающихся под действием интенсивного нагревания при движении в атмосфере. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4.
2. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. М., «Машиностроение», 1975.



Фиг. 4

3. *Lees L.* Laminar heat transfer over blunt-nosed bodies at hypersonic flight speeds. *Jet Propulsion*, 1956, vol. 26, No. 4.
 4. *Фэй, Риддел.* Теоретический анализ теплообмена в передней критической точке, омываемой диссоциированным воздухом. В сб. «Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций». М., Изд-во иностр. лит., 1962.
 5. *Лунев В. В.* Некоторые свойства и решения уравнения абляции. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1977, № 3.
 6. *Лунев В. В.* Гиперзвуковая аэродинамика. М., «Машиностроение», 1975.
 7. *Baker R. L.* Low temperature ablator nosetip shape change at angle of attack. *AIAA paper*, 1972, No. 90.
 8. *Чин.* Изменение формы и теплопроводности носовых частей, обтекаемых под углом атаки. *Ракетная техника и космонавтика*, 1975, т. 13, № 5.
-