

О СТАЦИОНАРНОЙ ФОРМЕ ТЕЛ ПРИ ИХ РАЗРУШЕНИИ ЗА СЧЕТ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО НАГРЕВА

В. Г. ВОРОНКИН, В. В. ЛУНЕВ, А. Н. НИКУЛИН

(Москва)

В упрощенной постановке (при выполнении закона локальности для давления и распределения тепловых потоков) получены решения стационарного уравнения, описывающего формы тел, не изменяющиеся в процессе уноса материала за счет аэродинамического нагрева. Показано, что исследуемая задача, как правило, не имеет решения в классе гладких функций, а контур тела стационарной формы должен иметь угловые точки: одну при чисто ламинарном или турбулентном теплообмене и до трех с учетом переходного участка. Такие тела состоят, как правило, из передней тупой части с примыкающей к ней в угловой точке боковой поверхностью малого, но вполне определенного угла наклона.

Кусочно-гладкое решение в общем случае оказывается неоднозначным, причем отбор физически единственного решения оказывается возможным лишь на основе анализа нестационарного уравнения уноса в окрестности угловых точек [1].

Частные задачи о телах стационарной формы рассмотрены в работах [2-6] и др. В частности, постановка задачи в [4] сходна с данной, однако там не удалось преодолеть принципиальную трудность, связанную с невозможностью построения гладкого стационарного решения. В других упомянутых работах экспериментальным или расчетным путем показано, что в процессе уноса притупленные тела или передняя их часть приобретают, как правило, вполне определенную форму, существенно зависящую от условий обтекания.

1. Процесс разрушения (или уноса материала) тела при нагреве описывается общим нестационарным уравнением

$$(1.1) \quad \frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{D}{\sin \alpha}$$

Здесь x_1 , r — неподвижная в пространстве прямоугольная или цилиндрическая система координат, D — скорость разрушения тела по нормали к его поверхности, наклоненной к оси x_1 под углом α , t — время. Задача о теле стационарной формы $x=F(r)$ сводится к отысканию решений этого уравнения вида

$$(1.2) \quad x_1 = F(r) + Vt, \quad V = \text{const}$$

где V — постоянная скорость перемещения контура тела вдоль оси x_1 , а ось x — неподвижно связана с контуром тела. Эти решения удовлетворяют стационарному уравнению

$$(1.3) \quad D = V \sin \alpha$$

в котором D зависит от закона теплообмена, теплофизических свойств материала и формы тела, но не зависит от времени t (в случае $D=h(t)D_1$, где D_1 не зависит от t , те же результаты получим, заменив D на D_1 и t на $\tau = \int h(t) dt$).

Воспользуемся далее широко распространенным методом локального подобия [7], предполагающим зависимость теплового потока на плоских ($v=0$) или осесимметричных ($v=1$) телах лишь от местных граничных

условий и толщины пограничного слоя. Этот метод приводит к тем же формулам теплообмена, что и для плоской пластины, но с другой, эффективной длиной s_* , отличной от длины s пограничного слоя

$$q = \frac{\bar{f}^{1-n}}{s_*^n}, \quad s_* = \frac{1}{\bar{f}^{n/(1-n)}} \int_0^s \bar{f} r^{n/(1-n)} ds$$

Здесь \bar{f} — некоторая функция местных условий, различная для ламинарного ($n=1/2$) и турбулентного ($n=1/5$) режимов и примерно пропорциональная pu , где p и u — давление и скорость на внешней границе пограничного слоя.

Предположим далее, что весь поступающий к элементу поверхности тела тепловой поток идет на его разрушение и что теплофизические характеристики материала (с плотностью ρ_m) и влияние его испарения на тепловой поток учитываются его эффективной энтальпией I . В этом случае $D=q/I\rho_m$ и можно получить формулу

$$(1.4) \quad D = U \frac{r^{vn/(1-n)} f}{z^n}, \quad z = \int_0^s r^{v/(1-n)} f ds, \quad U = \frac{A}{\text{Re}^n}$$

Здесь постоянная для простоты величина A имеет размерность скорости и учитывает влияние физических условий задачи, Re — число Рейнольдса, построенное по характерному размеру тела d . Остальные входящие в (1.4) величины будем считать безразмерными (отнеся p к скоростному напору, u — к максимальной скорости внешнего потока, r и s — к размеру d). При этом положим $f=pu$.

Тогда уравнение (1.3) примет вид

$$(1.5) \quad \frac{D}{U \sin \alpha} = V_0 = \varphi(p, \alpha) \Psi(r, z), \quad \varphi = \frac{pu}{\sin \alpha},$$

$$\Psi = \frac{r^{vn/(1-n)}}{z^n}, \quad V_0 = \frac{V}{U}$$

Здесь V_0 — безразмерная величина, зависящая лишь от формы тела. В частности, полагая при $r \rightarrow 0$ на тупоносом теле $p \rightarrow p_0$, $\beta = \lim du/dr$, получим для ламинарного теплообмена $V_0 = \sqrt{2(1+\nu)} p_0 \beta$.

Так как $\text{Re} \sim d$, то одним и тем же условиям обтекания будет соответствовать целое семейство тел стационарной формы, размер которых и скорость перемещения их контура связаны соотношением $V d^n = \text{const}$.

Для переходной зоны пограничного слоя с началом s_1 и концом s_2 примем $D = (1-\Gamma)D_1 + \Gamma D_2$, $\Gamma(s_1) = 0$, $\Gamma(s_2) = 1$. Здесь функция $\Gamma(s, s_1, s_2)$ обеспечивает непрерывное или даже гладкое изменение D в переходной зоне, а индексы 1, 2 обозначают соответствующие величины при ламинарном ($n=1/2$) и турбулентном ($n=1/5$) законах теплообмена. Тогда уравнение (1.3) примет вид

$$(1.6) \quad V = U_1 \varphi \Psi, \quad \Psi = \frac{r^v}{z_1^{1/2}} (1-\Gamma) + \lambda \Gamma \frac{r^{v/4}}{z_2^{1/5}}, \quad \lambda = \frac{U_2}{U_1} = \frac{A_2}{A_1} \text{Re}^{0.3}$$

В этой формуле D отнесено к ламинарному значению $U = U_1$, параметр λ характеризует отношение уровней турбулентного и ламинарного теплообмена. Используя обычные формулы [7], можно получить $(I_2/I_1) \lambda \text{Re}^{-0.3} \approx 0.093 \div 0.109$, где Re здесь и для определенности в последующем построено по внешней скорости и по плотности и вязкости в точке торможения за прямым скачком.

Поскольку $\sin \alpha = dr/ds$, то в общем случае уравнения (1.5), (1.6) являются интегродифференциальными, свойства их будут определяться главным образом зависимостью функции φ (или давления p) от формы тела.

2. Для чисто ламинарного или турбулентного законов теплообмена уравнение (1.5) можно записать в виде

$$(2.1) \quad \sin \alpha = \frac{dr}{ds} = r' = \frac{r^{vn/(1-n)} f}{V_0 z^n}$$

Дополним его уравнением для функционала z

$$(2.2) \quad \frac{dz}{ds} = r^{v/(1-n)} f, \quad s=s_0, \quad z=z_0$$

Исключив отсюда f с помощью (2.1), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $z(r)$, интеграл которого вместе с (2.1) составит пару уравнений

$$(2.3) \quad R^{1+v} - z^{1-n} = C, \quad Z^n = R^{vn/(1-n)} \varphi$$

Для удобства здесь введены новые безразмерные величины

$$X=ax, \quad R=ar, \quad S=as, \quad Z = \frac{1+v}{1-n} a^{(1+v)/(1-n)} z, \quad a = V_0^{1/n} \frac{1-n}{1+v}$$

Наконец, исключив Z из (2.3), получим соотношение

$$(2.4) \quad \frac{R^{1+v} - C}{R^v} = \varphi^{(1-n)/n} = \Phi$$

Постоянная C определяется из (2.3), (2.4) по заданным значениям R_0 и Z_0 или R_0 и φ_0 в начальной точке S_0 контура. В силу очевидной непрерывности функционала Z функция φ , а следовательно, и величина C сохраняются при переходе через возможную угловую точку контура тела.

Уравнение (2.4) пока незамкнуто, так как в нем нужно еще связать распределение давления с формой тела. Ниже используем гипотезу локальности, т. е. будем считать давление на теле зависящим лишь от местного угла наклона тела α . Тогда $\varphi = \varphi(\alpha)$ и уравнение (2.4) будет обыкновенным нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка, которое совместно с уравнением $dX/d\alpha = \operatorname{ctg} \alpha dR/d\alpha$ даст параметрическое представление стационарной формы тела $R=R(\alpha)$, $X=X(\alpha)$.

Типичные кривые $\varphi(\alpha)$ показаны на фиг. 1, а. Штрихпунктирная кривая соответствует гиперзвуковому обтеканию сферы [8]. Сплошные линии построены по формуле Ньютона для давления, качественно верной для гладких выпуклых тел:

$$(2.5) \quad p = \sin^2 \alpha + p_1, \quad u = [1 - (p/p_0')^{(\kappa-1)/\kappa}]^{1/2}, \quad p_0' = p(\pi/2)$$

при показателе адиабаты $\kappa=1.4$ для $p_1=0, 0.012, 0.1$ (кривые 1, 2, 3 соответственно). Под p_1 можно подразумевать безразмерное давление на боковой поверхности тупого тела; если оно совпадает с давлением во внешнем потоке с числом Маха M_1 то $p_1=1/\kappa M_1^2$.

Если тело в сверхзвуковой области течения имеет малый участок большой кривизны, то давление на нем описывается волной разрежения Прандтля — Майера. Соответствующие кривые показаны на фиг. 1, а пунктиром для начальных местных чисел $M=1$ (кривая 4) и $M=2$ (кривая 5).

Важным свойством этих кривых является наличие экстремумов (точки A и B на фиг. 1, б). Для закона давления (2.5) экстремумы $\varphi(\alpha)$ имеются лишь при $p_1 < 0.078$.

3. Пусть передняя точка контура тела лежит на оси симметрии, т. е. отвечает начальным условиям $S_0 = R_0 = Z_0 = 0$. Тогда $C = 0$ и уравнение (2.4) независимо от v примет вид

$$(3.1) \quad R = \Phi(\alpha)$$

Следовательно, в начальной точке $\varphi = 0$ и $\alpha = \pi/2$, т. е. соответствующее тело будет тупоносым. В силу (2.5) $u \sim \cos \alpha$ при $\alpha \rightarrow \pi/2$, поэтому при $R \rightarrow 0$ из (3.1) получим

$$(3.2) \quad R^{n/(1-n)} = \varphi \sim \cos \alpha \approx dX/dR$$

или $X \sim R^{1/(1-n)}$

Таким образом, вблизи оси контур тела стационарной формы при ламинарном режиме теплообмена касается параболы $R \sim \sqrt{X}$, а при турбулентном (т. е. в предельном случае исчезающе малой протяженности ламинарного и переходного пограничного слоя) имеет особенность: $R \sim X^{1/5}$ с убывающим радиусом кривизны $R_1 \sim R^{3/4} \sim X^{3/5}$. При $\alpha \rightarrow 0$ имеем $\varphi \sim 1/\sin \alpha \sim dX/dR$ и, в результате, ту же асимптотику, что и (3.2), но уже соответствующую большим X и R .

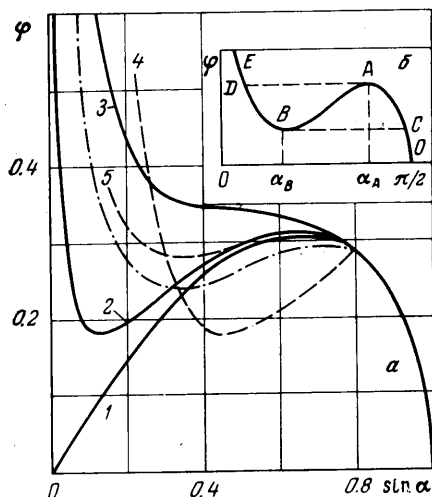
Решение в целом определяется видом функции $\varphi(\alpha)$ и очевидным условием $dR/dS = \sin \alpha \geq 0$. Если $d\varphi/d\alpha < 0$ всюду (фиг. 1, а), то согласно (3.1) решением будет гладкий контур $R = R(S)$ с монотонно убывающим углом α наклона касательной.

Но если функция $\varphi(\alpha)$ имеет экстремумы, то функция $R(S)$ достигает локального максимума и дальнейшее гладкое продолжение решения с возрастанием R невозможно. Как видно из фиг. 1, б, в этом случае возможно построение лишь кусочно-гладкого решения, т. е. контура тела с угловой точкой, соответствующей переходу в ней функции φ из точки A в точку D согласно условию $\varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha_2)$, где α_1 и α_2 — углы наклона образующей до и после угловой точки: в данном случае $\alpha_1 = \alpha_A$, $\alpha_2 = \alpha_D$.

Кроме предельного стационарного контура с угловой точкой при $\alpha = \alpha_A$ существует непрерывное множество других угловых точек при $\alpha_A \leq \alpha_1 \leq \alpha_C$, соответствующих всевозможным переходам между дугами CA , AB , BD кривой $\varphi(\alpha)$ (см. фиг. 1, б). При этом после каждой угловой точки угол α должен изменяться таким образом, чтобы обеспечить возрастание $R = \Phi(\alpha)$. Эти решения также удовлетворяют условию непрерывности функции φ и — по обе стороны угловой точки — уравнению (3.1).

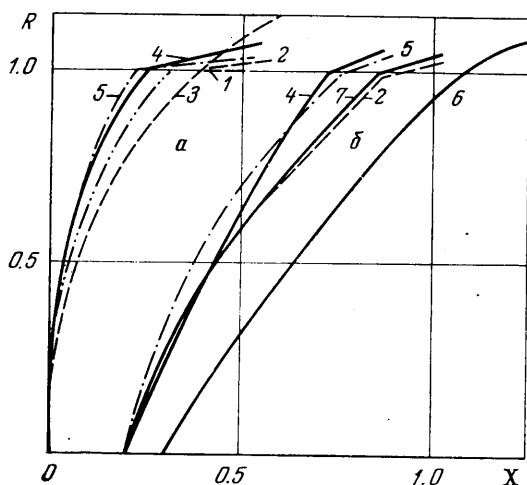
Выбрать из совокупности этих решений однозначное можно, лишь ответив на вопрос, все ли решения вырожденного стационарного уравнения (1.3) являются стационарными решениями (1.2) исходного уравнения (1.1), т. е. сохраняют ли они со временем свою форму, будучи взятыми в качестве начального (при $t=0$) контура для уравнения (1.1).

Положительный ответ здесь очевиден в области гладкости решения, но в угловой точке начального контура первые производные решения терпят разрыв, поэтому требуется специальный анализ.

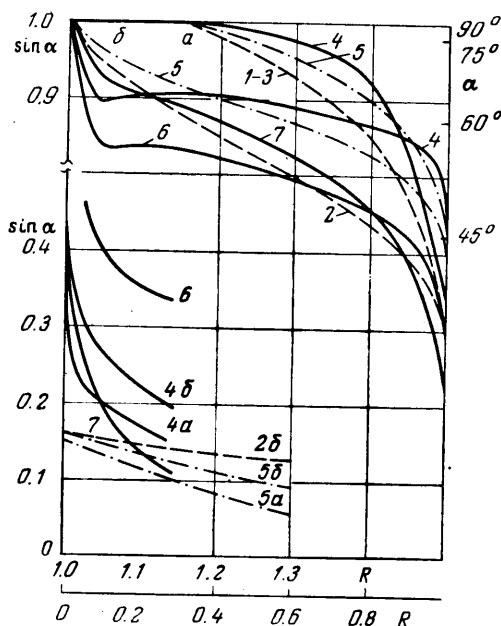


Фиг. 1

Такой анализ проведен в работе [1], где показано, что угловая точка может быть стационарной (движущейся в процессе уноса параллельно оси x_1) лишь в том случае, если она соответствует переходу с восходящей дуги BA кривой $\varphi(\alpha)$ на нисходящие AC и DB . В других случаях угловые точки начального контура будут либо сглаживаться, либо смещаться по вертикали, так что содержащий их начальный контур, хотя и удовлетворяет уравнению (1.3), не будет стационарным.



Фиг. 2



Фиг. 3

тановления [°], а стационарная форма тела, удовлетворяющая уравнению (3.1), определялась путем итераций¹. Кривые 4 соответствуют $M_1=20$, $\kappa=1.4$. Влияние числа Маха и κ проиллюстрировано только для турбулентного случая: при $\kappa=1.4$ кривая 4 соответствует также $M_1=6$, кри-

Но из всех точек дуги BA , достижимой в процессе решения уравнения (3.1), оказывается лишь точка A . Поэтому единственно возможным стационарным решением является кусочно-гладкий контур с углом наклона $\alpha_1=\alpha_A$ перед угловой точкой, соответствующим максимуму кривой $\varphi(\alpha)$, и углом $\alpha_2=\alpha_D$ на нисходящей ее дуге в области малых значений α . Подчеркнем, что эти углы определяются только функцией $\varphi(\alpha)$ и не зависят от ν и n .

Решения уравнения (3.1) для ламинарного (кривые a , $n=1/2$) и турбулентного (кривые b , $n=1/5$) законов теплообмена показаны на фиг. 2. Пунктирные кривые получены в приближении (2.5) при $\kappa=1.4$ (кривая 1 — $p_1=0$, кривые 2 — $p_1=0.05$, кривая 3 — $p_1=0.1$), штрихпунктирные кривые 5 — при $\kappa=1.4$ и для той же зависимости давления $p(\alpha)$, что и для сферы («приближение местной сферы» [8]). Сплошные кривые получены численным решением точной газодинамической задачи, в которой параметры обтекания находились методом ус-

¹ Описание численного алгоритма решения этой задачи (как и задачи с заданной $p(\alpha)$) опускаем. Отметим только, что угол наклона α_1 перед угловой точкой (несколько размазанной в расчете) получался однозначным, без принятия каких-либо специальных мер.

вая 6 — $M_1=3$. Кривая 7 получена при $M_1=20$, $\kappa=1.2$. На фиг. 3 для этих тел показаны кривые для угла наклона $\alpha(R)$ лобовой ($R \leq 1$) и боковой ($R > 1$) поверхностей.

Как следует из фиг. 2, 3, стационарные формы тел заметно зависят как от условий обтекания, так и от способа задания $p(\alpha)$. «Ламинарные» кривые a имеют сегментообразную, сильно притупленную форму. Наоборот, «турбулентные» кривые b более заостренные и ближе к конусу.

В соответствии с видом кривых $\varphi(\alpha)$ (фиг. 1) пунктирные кривые на фиг. 2 не имеют угловой точки при $p_1 > 0.078$, как и точная кривая 6 для $M_1=3$, которая тем самым отличается от аналогичных (практически совпадающих) кривых при $M_1=20$ и 6.

Если в (2.5) положить $u = \cos \alpha$, то при $n = 1/2$ можно получить решение в аналитическом виде (пунктир с двумя точками на фиг. 2, $p_1=0$)

$$\begin{aligned} R &= \varphi(\alpha) = (\sin^2 \alpha + p_1) \operatorname{ctg} \alpha \\ (3.3) \quad X &= F(\alpha) = \ln \sin \alpha + \cos^2 \alpha + 1/2 p_1 \operatorname{ctg}^2 \alpha, \quad \alpha \geq \alpha_A \\ X &= F(\alpha) + F(\alpha_A) - F(\alpha_D), \quad \alpha \leq \alpha_D \end{aligned}$$

Соответствующая функция $\varphi(\alpha)$ имеет экстремумы лишь при $p_1 < 1/8$.

4. В п. 3 показано, что при чисто ламинарном или турбулентном законах теплообмена функция $\varphi(\alpha)$ возрастает вдоль тела, а функция $\Psi(r, z, s)$ в (1.5) убывает. При смешанном законе теплообмена, например, на пластине при $\nu=0$, функция Ψ убывает на ламинарном и турбулентном участках и возрастает на переходном, так что можно предполагать аналогичное ее поведение и в более общих случаях (хотя экстремумы ее и не будут, вообще говоря, совпадать с началом s_1 и концом s_2 переходного участка, см. п. 5).

Возможное влияние такой немонотонности Ψ продемонстрируем на модельном примере, заменив функционал $\Psi(r, z, s)$ известной функцией длины $\Psi(s)$, удовлетворяющей условиям, качественно соответствующим смешанному закону теплообмена

$$\begin{aligned} (4.1) \quad \Psi' &< 0, \quad s < s_1, \quad s > s_2 \\ \Psi' &> 0, \quad s_1 < s < s_2, \quad \Psi'(s_1) = \Psi'(s_2) = 0 \\ \Psi &\sim s^{-1}, \quad s \rightarrow 0, \quad \Psi \rightarrow 0 \quad s \rightarrow \infty \end{aligned}$$

При монотонной функции $\varphi(\alpha)$ стационарное тело по-прежнему будет гладким, поэтому в дальнейшем предположим наличие у нее экстремумов φ_A и φ_B (фиг. 1, б). При этом учтем, что стационарной угловой точке согласно [1] отвечает лишь переход с дуги BA этой кривой направо или налево и что в угловой точке функции $\Psi(s)$ и $\varphi(\alpha)$ не терпят разрыва. Тогда решение уравнений (1.5) и (1.6)

$$(4.2) \quad \varphi(\alpha) \Psi(s) = V_0$$

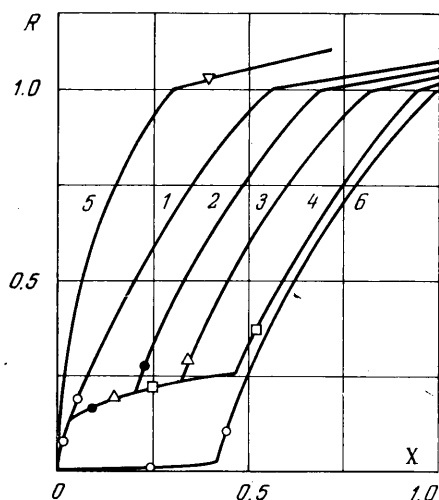
с начальными данными $s=0$, $\alpha=\pi/2$, $r=0$ будет качественно различным в зависимости от реализации одного из трех условий

$$(4.3) \quad V_0 > (\varphi_A \Psi_1, \varphi_B \Psi_2); \quad \varphi_A \Psi_1 < \varphi_B \Psi_2; \quad V_0 < \varphi_A \Psi_1, \quad \Psi_1 = \Psi(s_1)$$

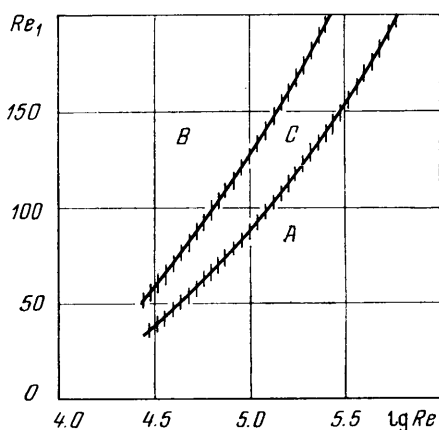
В первых двух случаях функция $\varphi(\alpha)$ достигнет максимума φ_A еще при $s_A < s_1$, на нисходящей дуге $\Psi(s)$, и дальнейшее возрастание $\varphi(\alpha)$ будет возможным лишь на дуге DE , после угловой точки $A \rightarrow D$. Последующая часть тела в первом случае будет гладкой, так как на ней не достигается минимум φ_B функции $\varphi(\alpha)$. Во втором же случае минимум φ_B будет достигнут на восходящей дуге $\Psi(s)$ при $s_1 < s_B < s_2$, и дальнейшее убывание $\varphi(\alpha)$ будет возможно лишь на дуге CO этой функции, после второй

угловой точки $B \rightarrow C$. Но при $s > s_2$ функция $\Psi(s)$ будет убывать, а $\varphi(\alpha)$ — возрастать, пока не будет вновь достигнут максимум φ_A , что приведет к появлению третьей угловой точки тела $A \rightarrow D$. И наконец, в третьем случае (4.3) максимум φ_A может быть достигнут лишь в точке $s_A > s_2$, в которой $\Psi_A < \Psi_1$, так что весь переходный участок $s_1 < s < s_2$ будет располагаться на лобовой части тела до угловой точки, которая оказывается единственной.

Таким образом, в случае немонотонной функции $\Psi(s)$ стационарное тело может иметь одну или три угловые точки в зависимости от отношения Ψ_1/Ψ_2 (т. е. от параметра $\lambda \sim Re^{0.3}$) и величин s_1, s_2 (см. (1.6)).



Фиг. 4



Фиг. 5

Первое условие (4.3) соответствует достаточно большим значениям s_1/d (малым числам Рейнольдса Re) и в пределе приводит к ламинарной стационарной форме передней части тела, третье — малым s_1/d и турбулентной предельной форме, второе — как бы существенно переходному режиму теплообмена.

На фиг. 4 показаны тела стационарной формы, полученные решением уравнений (2.4) и (1.6) в приближении местной сферы для давления при

$$\Gamma(s) = (s - s_1)/(s_2 - s_1), \quad M_1 = 20, \quad \kappa = 1.4$$

Одинаковыми значками на каждой кривой указаны начало s_1 и конец s_2 зоны перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный.

Число Рейнольдса, построенное по расстоянию d от оси тела до последней его угловой точки, $Re = 1.8 \cdot 10^6$ для кривых 1—4 и $3 \cdot 10^4$ и 10^{11} для кривых 5 и 6 соответственно.

Как видно, в зависимости от расположения и длины переходной зоны действительно реализуются конфигурации как с одной, так и с тремя угловыми точками. Кривая 1 практически совпадает с чисто турбулентной, а кривая 5 — с ламинарной формой, показанными штрихпунктиром на фиг. 2.

Результат зависит также и от Re . Так, при примерно одинаковом относительно первой угловой точки расположении s_1 , кривая 5 имеет одну угловую точку, а кривая 2 — три.

На фиг. 5 показаны полученные в результате систематических расчетов примерные границы области C существования решений с тремя угловыми

точками, построенные в координатах (Re_1, Re) при $Re_2/Re_1 \approx 2$, где числа Рейнольдса начала Re_1 и конца Re_2 переходной области построены по местным невязким параметрам на границе пограничного слоя и толщине потери импульса [10]. Область A соответствует одной турбулентной, а область B — одной ламинарной угловой точке.

Заметим, что для тел с тремя угловыми точками приближение местной сферы, как и вообще схема невязкого обтекания, непригодно, но они качественно пригодны для тел с одной угловой точкой, т. е. в областях A и B , и, следовательно, проведенный анализ вполне пригоден для определения границ этих областей.

При $Re \rightarrow \infty$ переходная зона с заданными Re_1 и Re_2 будет стремиться к оси. Но в передней точке тела всегда реализуется ламинарный режим теплообмена с тепловым потоком $q_0 \sim Re^{-1/2} (d/r_0)^{1/2}$, где r_0 — радиус кривизны тела на оси. На основной же части тела турбулентный тепловой поток $q_2 \sim Re^{-1/3}$. Поскольку $q_2/q_0 = \sin \alpha = O(1)$ на теле стационарной формы, то при $Re \rightarrow \infty$ радиус $r_0/d \sim Re^{-3/5} \rightarrow 0$.

Рассмотрим еще особый случай совпадения экстремумов функций $\Psi(s)$ и $\varphi(\alpha)$. Очевидно, что при стремлении $s_A \rightarrow s_1$ или $s_B \rightarrow s_2$ справа или слева будет сохраняться свой тип решения: с переходом через угловую точку или же с гладким возвращением по соответствующей дуге кривой $\varphi(\alpha)$. Однако при точном совпадении экстремумов φ и Ψ (т. е. при $s_A = s_1$ или $s_B = s_2$) возможно также движение на восходящую дугу BA кривой $\varphi(\alpha)$, с любой точки которой возможен переход через угловую точку на дуги BD или AC , т. е. в этом случае допустимо бесчисленное множество решений.

Таким образом, совпадение экстремумов функций $\Psi(s)$ и $\varphi(\alpha)$ приводит к неустойчивости решения, так как малое различие координат этих экстремумов того или иного знака приводит к качественно различным последствиям.

5. Рассмотрим поле интегральных кривых уравнения (2.4) в общем случае $C \neq 0$ (что соответствует, например, смещению эффективного начала пограничного слоя за счет изменения в характере теплообмена на некоторой предшествующей части поверхности $S < S_0$, $R < R_0$). Уравнение (2.4) описывает, например, турбулентный участок, которому предшествовали ламинарный и переходный участки теплообмена.

В плоском случае ($v=0$) это уравнение $R = \Phi + C$ качественно схоже с (3.1). Поэтому ниже положим $v=1$. В этом случае

$$(5.1) \quad \frac{d\Phi}{dR} = 1 + \frac{C}{R^2}$$

и функция Φ должна возрастать с ростом R при $R^2 > -C$ и убывать при $R^2 < -C$.

Уравнение (2.4) относительно $R(\alpha)$ имеет два корня

$$(5.2) \quad R(\alpha) = R_{\pm} = 1/2 \Phi \pm \sqrt{1/4 \Phi^2 + C}$$

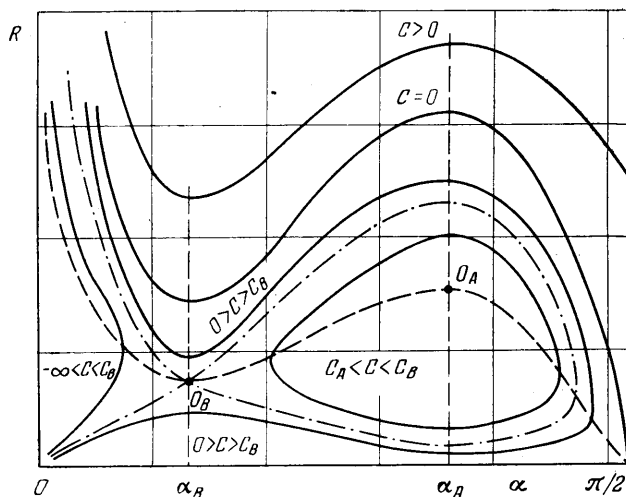
При $C > 0$ физический смысл имеет лишь корень R_+ , при $C < 0$ — оба. Семейство кривых $R(\alpha)$ качественно изображено на фиг. 6. Корни (5.2) здесь разделены пунктирной кривой $R = 1/2 \Phi(\alpha)$ (выше нее — $R_+(\alpha)$, ниже — $R_-(\alpha)$), на которой $d\Phi/dR = 0$. При $\alpha \rightarrow 0$ имеем $R_+ \rightarrow \infty$, $R_- \rightarrow 0$.

При $C < 0$ это семейство имеет две особые точки: O_A — центр и O_B — седло, соответственно в точках экстремума A и B функции $\varphi(\alpha)$ (фиг. 1, б). Через седло проходит петлеобразная особая кривая (штрихпунктир) $R^* = R(\alpha, C_B)$, где $C_B = -1/4 \Phi_B^2$. В области $\alpha > \alpha_B$ она охватывает замкнутые кривые с параметром $C_A < C < C_B$, где $C_A = -1/4 \Phi_A^2$. В области $\alpha < \alpha_B$, левее штрихпунктирных кривых, расположены кривые с $-\infty < C < C_B$. Кривые с $C_B < C < 0$ заполняют область ниже особой кривой и между ней и кривой $R = \Phi(\alpha)$ (при $C = 0$). Кривые с $C > 0$ располагаются выше кривой $R = \Phi(\alpha)$.

Характер этих интегральных кривых определяет зависимость последующего (при $S > S_0$) контура тела от совокупности начальных параметров C , R_0 и α_0 . При анализе решения необходимо выбирать такое направление движения вдоль соответствующей кривой $R(\alpha, C)$, которое обеспечивает возрастание R .

Если $\alpha_0 > \alpha_A$, то на рассматриваемом участке контура тела реализуется одна угловая точка при $\alpha = \alpha_A$. Если при этом $R_0 < 1/2 \Phi(\alpha_0)$, то на теле будет участок, которому соответствует убывание $\varphi(\alpha)$ и, следовательно, возрастание $\Psi(r, z, s)$.

При $\alpha_0 < \alpha_B$ возможны два варианта. Первый реализуется, если начальная точка попадает выше ветви OO_B особой кривой (т. е. при $R_0 > R_-(\alpha_0)$). Тогда решение будет гладким с возможной одной точкой перегиба.



Фиг. 6

Во втором варианте, при $R_0 < R_*(\alpha_0)$, тело получит две дополнительные угловые точки с переходом $B \rightarrow C$, а затем $A \rightarrow D$ (фиг. 1, б) в них.

Попадание начальной точки на ветвь R_- особой кривой ($R_0 = R_*(\alpha_0)$, $\alpha_0 < \alpha_B$) приведет решение в особую точку O_B и к тем же последствиям, что и в случае совпадения экстремумов $\varphi(\alpha)$ и $\Psi(s)$, описанном в п. 4.

Если предшествующий участок является телом стационарной формы, то попадание α_0 в диапазон $\alpha_B < \alpha_0 < \alpha_A$ невозможно, поскольку в угловых точках контура допустимы лишь переходы $A \rightarrow D$ и $B \rightarrow C$ (фиг. 1, б) независимо от режима теплообмена.

Поступила 11 IV 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Лунев В. В. Некоторые свойства и решения уравнения абляции. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 3.
2. Simpkins P. G. On the stable shape of subliming bodies in a high-enthalpy gas stream. J. Fluid Mech., 1963, vol. 15, pt 1.
3. Мурзинов И. Н. О форме тел, разрушающихся под действием интенсивного нагревания при движении в атмосфере. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4.
4. Хейнс. Устойчивая конфигурация аблирующего носка при ламинарном гиперзвуковом обтекании. Ракетная техника и космонавтика. 1970, т. 8, № 7.
5. Siegelman D., Buss H. Equilibrium shape change. AIAA paper, 1975, No. 111.
6. Чудецкий Ю. В., Широков Н. Н., Экономов А. П. Экспериментальное исследование взаимодействия высокотемпературного потока с материалами. В сб. «Аэромеханика и газовая динамика». М., «Наука», 1976.
7. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. М., «Машиностроение», 1975.
8. Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика. М., «Машиностроение», 1975.
9. Красильников А. В., Никулин А. Н., Холодов А. С. Некоторые особенности обтекания затупленных по сфере конусов с большими углами полураствора при гиперзвуковых скоростях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 2.
10. Cresci R. J., McKenzie D. A., Libby P. A. An investigation of laminar, transitional and turbulent heat transfer on blunt-nosed bodies in hypersonic flow. J. Aero/Space Sci., 1960, vol. 27, No. 6.