

К ТЕОРИИ ВИХРЕВЫХ ЗАКРУЧЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ
ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В СОПЛАХ ЛАВАЛЯ

Ю. А. ГОСТИНЦЕВ, О. А. УСПЕНСКИЙ

(Москва)

Найдено асимптотическое решение прямой задачи о движении произвольно закрученного вихревого потока идеального газа по соплу. Решение построено в виде двойных рядов по степеням параметров, характеризующих кривизну стенки сопла в критическом сечении и интенсивность завихренности потока. Полученное решение сопоставляется с имеющимися теоретическими данными других авторов. В частности, показано, что оно позволяет обобщить известный результат Холла для незакрученного течения в трансзвуковой области [1]. Анализируется поведение звуковой линии в зависимости от распределения завихренности и радиуса кривизны стенки сопла.

Аналитическими методами закрученные течения в соплах в одномерной постановке и в предположении слабой завихренности исследовались в [2-5]. Численными методами в квазиодномерном приближении такие течения изучались в [6, 7]. В последнее время аналогичная задача решалась в точной постановке методом установления [8, 9]. В результате был выявлен ряд важных для практики неоднородных эффектов и показана ограниченность использованного в [2-7] аналитического подхода.

1. **Постановка задачи.** Рассматривается вихревое адиабатическое течение идеального газа в сопле заданной геометрии. Для стационарного осесимметричного движения система уравнений имеет вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \\ + \rho y \left[\frac{1}{2y^2} \frac{d\Gamma^2(\Psi)}{d\Psi} + \frac{1}{\kappa-1} \rho^{\kappa-1} \frac{dF(\Psi)}{d\Psi} - \frac{dH(\Psi)}{d\Psi} \right] = 0 \\ \frac{\kappa}{\kappa-1} \rho^{\kappa-1} F(\Psi) + \frac{1}{2\rho^2 y^2} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\Gamma^2(\Psi)}{2y^2} = H(\Psi) \\ d\Psi = \rho y (u dy - v dx), \quad \Gamma(\Psi) = w y, \quad p = \rho^\kappa F(\Psi)$$

Здесь Ψ — функция тока; p — давление; ρ — плотность; u, v, w — осевая, радиальная и окружная составляющие скорости; x, y — осевая и радиальная координаты; $\Gamma(\Psi)$ — поперечная циркуляция; $H(\Psi)$ — полная энтальпия; $F(\Psi)$ — функция энтропии; κ — показатель адиабаты.

Будем рассматривать изэнтропическое, изэнергетическое ($F = \text{const}$, $H = \text{const}$) вихревые течения с произвольным распределением $\Gamma(\Psi)$.

Введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{x}{(R_w R_t)^{1/2}}, \quad \eta = \frac{y}{R_t}, \quad R_w^\circ = \frac{R_w}{R_t}$$

$$\rho^\circ = \frac{\rho}{\rho_*}, \quad \Psi^\circ = \frac{\Psi}{\rho_* a_* R_i^2}, \quad h(\rho^\circ) = \frac{\rho^{\circ \kappa-1}}{\kappa-1}$$

$$\Gamma^\circ(\Psi^\circ) = \frac{\Gamma(\Psi)}{a_* R_i} = [\Omega G(\Psi^\circ)]^{1/2}$$

где R_w — радиус кривизны стенки сопла в критическом сечении; R_i — радиус критического сечения; ρ_* , a_* — критические плотность и скорость звука; $h(\rho^\circ)$ — энтальпия; $G(\Psi^\circ)$, $\Omega = \Gamma^2(\Psi_A^\circ)$ — функция и параметр завихренности (Ψ_A° — значение Ψ° на некоторой известной линии тока).

В новых переменных система (1.1) примет вид (верхний индекс градус опускаем)

$$(1.2) \quad R_w^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\rho \xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\rho \xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right) + \Omega \frac{\rho}{2\xi} \frac{dG(\Psi)}{d\Psi} = 0$$

$$2h(\rho) + \frac{1}{\rho^2 \xi^2} \left[R_w^{-1} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)^2 \right] + \Omega \frac{G(\Psi)}{\xi^2} = \frac{\kappa+1}{\kappa-1}$$

$$d\Psi = \rho \xi (u d\xi - R_w^{-1/2} v d\xi), \quad [\Omega G(\Psi)]^{1/2} = w \xi, \quad p = \rho^\kappa / \kappa$$

Граничными условиями к (1.2) будут

$$(1.3) \quad \Psi(\xi, 0) = 0, \quad \Psi(\xi, \delta) = \Psi(0, 1) = \Psi_t(1), \quad \xi \in (-\infty, +\infty)$$

где $\delta = \delta(\xi)$ — радиус стенки сопла.

Постоянная в (1.3) заранее не известна и должна определяться в процессе решения.

2. Асимптотическое решение. Предполагая, что $R_w^{-1} \ll 1$, $\Omega \ll 1$, а $G(\Psi) = 0(1)$, решение (1.2), (1.3) можно построить в виде двойных разложений по параметрам R_w^{-1} и Ω [5, 10]

$$(2.1) \quad f(\xi, \xi) = \sum_{k+l \geq 0} f_{kl}(\xi, \xi) R_w^{-k} \Omega^l$$

где f есть Ψ или ρ .

Подставляя (2.1) в (1.2), (1.3) и собирая коэффициенты при одинаковых комплексах $R_w^{-k} \Omega^l$, получим k, l -системы уравнений с граничными условиями для различных приближений. Выпишем эти системы и их решения до $k+l=2$ (т. е. удерживая шесть членов в разложениях (2.1)).

Система $k=l=0$ (одномерное приближение для незакрученного течения)

$$(2.2) \quad u_{00}(\xi) = \frac{1}{\rho_{00} \xi} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi}, \quad 2h_{00} + u_{00}^2 = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \quad (h_{00} = h(\rho_{00}))$$

Отсюда с учетом граничного условия, получающегося в рассматриваемом приближении из (1.3), найдем

$$(2.3) \quad \Psi_{00} = 1/2 \rho_{00} u_{00} \xi^2, \quad \rho_{00} = \{1/2 [\kappa+1 - (\kappa-1) u_{00}^2]\}^{1/(\kappa-1)}$$

Из (2.3) следует уравнение

$$(\kappa-1) u_{00}^{\kappa+1} - (\kappa+1) u_{00}^{\kappa-1} + 2[2\Psi_{00}(\delta) \delta^{-2}]^{\kappa-1} = 0$$

анализ которого показывает, что непрерывно ускоряющийся поток в сопле реализуется только при выполнении в критическом сечении условий $u_{t00} =$

$=\rho_{t00}=2\Psi_{t00}(1)=1$. Тогда

$$(2.4) \quad \Psi_{00}=\frac{1}{2}\xi^2\delta^{-2}, \quad \rho_{00}=\left(\frac{\kappa+1}{S}\right)^{1/(\kappa-1)}, \quad \delta^{-2}=M\left(\frac{\kappa+1}{S}\right)^{(\kappa+1)/[2(\kappa-1)]}$$

$$S=(\kappa-1)M^2+2, \quad M^2=M_{00}^2=2u_{00}^2[\kappa+1-(\kappa-1)u_{00}^2]^{-1}$$

Система $k=0, l=1$ (первое приближение для одномерного закрученного течения)

$$(2.5) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{\rho_{00}\xi} \left(\frac{\partial \Psi_{01}}{\partial \xi} - \frac{\rho_{01}}{\rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \right) \right] + \frac{\rho_{00}G_{00}'}{2\xi} = 0$$

$$\rho_{01}h_{00}' + \frac{1}{\rho_{00}^2\xi^2} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \Psi_{01}}{\partial \xi} - \frac{\rho_{01}}{\rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \right) + \frac{G_{00}}{2\xi^2} = 0$$

$$G_{00}' = (dG/d\Psi)_{\Psi=\Psi_{00}}, \quad h_{00}' = (dh/d\rho)_{\rho=\rho_{00}}$$

Из этой и последующих систем следует, что они имеют особенность в критическом сечении. Для корректности задачи используем условие регулярности решений в особых точках.

Решение (2.5), удовлетворяющее (1.3), тогда примет вид

$$(2.6) \quad \Psi_{01} = [4(\kappa+1)M^2\delta^2]^{-1} [\psi(\varphi'S - Q) - \varphi M^2 S]$$

$$\rho_{01}/\rho_{00} = [4(\kappa+1)\sigma\delta^2]^{-1} (Q - \sigma S\varphi'), \quad \sigma = 1 - M^2$$

$$Q = 2M^2[(\kappa+1)\delta^2 - S]\varphi_w$$

$$\varphi(\psi) = \int_0^\psi \left[\int_\varphi^{\frac{1}{2}} \psi^{-2} G(\psi) d\psi \right] d\psi, \quad \psi = \frac{1}{2}\xi^2, \quad \varphi_w = \varphi(1/2)$$

Система $k=1, l=0$ (первое приближение для двумерного незакрученного течения)

$$(2.7) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\rho_{00}\xi} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{\rho_{00}\xi} \left(\frac{\partial \Psi_{10}}{\partial \xi} - \frac{\rho_{10}}{\rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \right) \right] = 0$$

$$2\rho_{10}h_{00}' + \frac{1}{\rho_{00}^2\xi^2} \left[\left(\frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \Psi_{10}}{\partial \xi} - \frac{\rho_{10}}{\rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \right) \right] = 0$$

Ее решение

$$(2.8) \quad \Psi_{10} = \frac{1}{4}\delta^{-4}s\psi(2\psi - \delta^2), \quad s = \sigma\delta\delta'' - 3\delta'^2$$

$$\rho_{10}/\rho_{00} = \frac{1}{4}\delta^{-2}\sigma^{-1}M^2[\delta^2s - 4\psi(s + \delta'^2)]$$

Система $k=l=1$ (первое приближение для двумерного завихренного потока)

$$(2.9) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{\rho_{00}\xi} \left(\frac{\partial \Psi_{01}}{\partial \xi} - \frac{\rho_{01}}{\rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{1}{\rho_{00}\xi} \left[\frac{\partial \Psi_{11}}{\partial \xi} - \frac{\rho_{11}}{\rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} - \frac{\rho_{10}}{\rho_{00}} \left(\frac{\partial \Psi_{01}}{\partial \xi} - \frac{\rho_{01}}{\rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\rho_{01}}{\rho_{00}} \left(\frac{\partial \Psi_{10}}{\partial \xi} - \frac{\rho_{10}}{\rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \right) \right] \right\} + \frac{1}{2\xi} (\rho_{00}\Psi_{10}G_{00}'' + \rho_{10}G_{00}') = 0$$

$$\begin{aligned} & \rho_{11} h_{00}' + \rho_{01} \rho_{10} h_{00}'' + \frac{1}{\rho_{00}^2 \xi^2} \left\{ \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \Psi_{01}}{\partial \xi} - \frac{\rho_{01}}{\rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \right) + \right. \\ & + \left(\frac{\partial \Psi_{01}}{\partial \xi} - 2 \frac{\rho_{01}}{\rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \Psi_{10}}{\partial \xi} - \frac{\rho_{10}}{\rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \left[\frac{\partial \Psi_{11}}{\partial \xi} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{\rho_{11}}{\rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} - \frac{\rho_{10}}{\rho_{00}} \left(\frac{\partial \Psi_{01}}{\partial \xi} - \frac{\rho_{01}}{\rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \right) \right] \right\} + \frac{\Psi_{10} G_{00}'}{2\xi^2} = 0 \end{aligned}$$

$$G_0'' = (d^2 G / d\Psi^2)_{\Psi = \Psi_{00}}, \quad h_{00}'' = (d^2 h / d\rho^2)_{\rho = \rho_{00}}$$

Решение (2.9) с учетом (1.3)

$$\begin{aligned} (2.10) \quad & \Psi_{11} = -\delta^2 S [16(\kappa+1)\sigma^2 M^2 \delta^2]^{-1} \{3\sigma^2 \varphi'' \psi^2 \times \\ & \times (2\psi-1) + \sigma \{2(3M^4-9M^2-2)\varphi' \psi^2 - 3M^2(M^2-3) \times \\ & \times \varphi' \psi - 4[2(\kappa-2)M^4+3M^2-1]\varphi\psi + 3M^2[(\kappa-2)M^2+1]\varphi\} - \\ & - 4M^2\{[M^4+2(2\kappa-1)M^2+5]\Phi_1 + [(2-\kappa)(2\kappa-3)M^6 + \\ & + (4\kappa^2-16\kappa+17)M^4 + (9\kappa-16)M^2+3]\Phi_2 - [(2-\kappa)(2\kappa-3)M^6 + \\ & + 4(\kappa^2-5\kappa+7)M^4 + (13\kappa-34)M^2+10]\psi^2 \varphi_w\} - 2[(2-\kappa) \times \\ & \times (2\kappa-3)M^6 + (4\kappa^2-19\kappa+26)M^4 + (12\kappa-29)M^2+5M^2+ \\ & + 2]\psi \varphi_w\} + \delta'' S [16(\kappa+1)\sigma M^2 \delta]^{-1} \{ \sigma^2 \varphi'' \psi^2 (2\psi-1) + \\ & + \sigma \{2(M^4-3M^2-2)\varphi' \psi^2 - M^2(M^2-3)\varphi' \psi - \\ & + 4[(\kappa-1)M^4+M^2-3]\varphi\psi + M^2[(\kappa-2)M^2+1]\varphi + \\ & + 4[(\kappa-1)M^4-4]\Phi_1 - 4M^2[(\kappa-2)M^2+1]\Phi_2\} + 4M^2 \times \\ & \times [2(2-\kappa)M^4 + (\kappa-7)M^2+2]\psi^2 \varphi_w + 2[(\kappa-4)M^6 + \\ & + 6M^4+5M^2-6]\psi \varphi_w\} + 1/8 \sigma^{-1} \delta \delta'' [(\kappa-2)M^4+4M^2- \\ & - 1]\psi(2\psi-1)\varphi_w + 3/8 \delta'^2 \psi(2\psi-1)\varphi_w + 1/8 [4(\kappa-3)I_1(1/2) - \\ & - (\kappa-5)\varphi_w]\psi \\ & \Phi_1 = I_1 - 2\psi I_1(1/2), \quad \Phi_2 = I_2 - 2\psi I_2(1/2) \\ & I_1(\psi) = \int_0^\psi \varphi d\psi, \quad I_2(\psi) = \int_0^\psi \left(\int_0^\psi \psi^{-1} \varphi d\psi \right) d\psi \end{aligned}$$

Система $k=0, l=2$ (второе приближение для одномерного завихренного течения)

$$\begin{aligned} (2.11) \quad & \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{1}{\rho_{00} \xi} \left[\frac{\partial \Psi_{02}}{\partial \xi} - \frac{\rho_{02}}{\rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} - \frac{\rho_{01}}{\rho_{00}} \left(\frac{\partial \Psi_{01}}{\partial \xi} - \frac{\rho_{01}}{\rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{\rho_{00}}{2\xi} \left(\Psi_{01} G_{00}'' + \frac{\rho_{01}}{\rho_{00}} G_{00}' \right) = 0 \\ & \rho_{02} h_{00}' + \frac{1}{2} \rho_{01}^2 h_{00}'' + \frac{1}{2\rho_{00}^2 \xi^2} \left\{ \left(\frac{\partial \Psi_{01}}{\partial \xi} - \frac{\rho_{01}}{\rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \right)^2 + \right. \\ & + 2 \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \left[\frac{\partial \Psi_{02}}{\partial \xi} - \frac{\rho_{02}}{\rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{\rho_{01}}{\rho_{00}} \left(\frac{\partial \Psi_{01}}{\partial \xi} - \frac{\rho_{01}}{\rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \right) \right] \right\} + \frac{\Psi_{01} G_{00}'}{2\xi^2} = 0 \end{aligned}$$

Решение (2.11) имеет вид

$$(2.12) \quad \Psi_{02} = -S^2 [32(\kappa+1)^2 \sigma M^4 \delta^4]^{-1} \{2\sigma^2 \Phi_3 - \\ - \sigma [I_4(\psi, M) - 2I_4(\psi/2, M) + F_1] + 2M^2 F_2\} + \\ + S [16(\kappa+1) \sigma M^2 \delta^2]^{-1} (\sigma F_3 + F_2) + [16(\kappa+1)]^{-1} \psi [(\kappa+1) F_4 + \\ + 2(\kappa-1) \varphi_w^2]$$

$$F_1 = M^2 [4\varphi'' \psi^2 \varphi_w - 2\varphi'' \varphi \psi - 2(2-M^2) \varphi' \varphi - \varphi'^2 \psi] + 2\varphi'' \varphi' \psi^2$$

$$F_2 = 2M^2 \varphi_w \{[(\kappa-2)M^2 + 1] (\varphi - 2\psi \varphi_w) + (3-M^2) \varphi' \psi\}$$

$$F_3 = (\varphi_w'' - 2\varphi'' \psi) \varphi \varphi_w, \quad F_4 = I_4(\psi/2, 1) - \varphi_w'' \varphi_w,$$

$$\Phi_3 = I_3(\psi, M) - 2\psi I_3(\psi/2, M)$$

$$I_3(\psi, M) = \int_0^\psi \left[\int_0^\psi \varphi'' (\psi \varphi'' + 2M^2 \psi^{-1} \varphi) d\psi \right] d\psi$$

$$I_4(\psi, M) = \int_0^\psi \{M^2 [3 - (\kappa+1)M^2] \varphi'^2 - 3\varphi''^2 \psi^2\} d\psi$$

Система $k=2, l=0$ (второе приближение для двумерного незакрученного течения)

$$(2.13) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{\rho_{00} \xi} \left(\frac{\partial \Psi_{10}}{\partial \xi} - \frac{\rho_{10}}{\rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{1}{\rho_{00} \xi} \left[\frac{\partial \Psi_{20}}{\partial \xi} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\rho_{20}}{\rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} - \frac{\rho_{10}}{\rho_{00}} \left(\frac{\partial \Psi_{10}}{\partial \xi} - \frac{\rho_{10}}{\rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \right) \right] \right\} = 0 \\ 2\rho_{20} h_{00}' + \rho_{10}^2 h_{00}'' + \frac{1}{\rho_{00}^2 \xi^2} \left\{ 2 \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \Psi_{10}}{\partial \xi} - \frac{\rho_{10}}{\rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{\partial \Psi_{10}}{\partial \xi} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\rho_{10}}{\rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \left[\frac{\partial \Psi_{20}}{\partial \xi} - \frac{\rho_{10}}{\rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{10}}{\partial \xi} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial \xi} \left(\frac{\rho_{10}^2}{\rho_{00}^2} - \frac{\rho_{20}}{\rho_{00}} \right) \right] \right\} = 0$$

Решением (2.13) будет

$$(2.14) \quad \Psi_{20} = \frac{1}{24} \sigma^{-2} \psi^3 \{60\delta^{-6} \delta'^4 \sigma^2 - 2\delta^{-5} \delta'^2 \delta'' \times \\ \times [\kappa(2\kappa-1)M^8 - (4\kappa^2 - 20\kappa + 23)M^6 - (23\kappa - 98)M^4 - 113M^2 + \\ + 36] - 3\delta^{-4} \delta''^2 \sigma^2 [(2\kappa-3)M^4 + 8M^2 - 3] - 4\delta^{-4} \delta' \delta'' \sigma^2 \times \\ \times (\kappa M^4 + 4M^2 - 3) - \delta^{-3} \delta^{IV} \sigma^4\} - \frac{1}{16} \sigma^{-2} \psi^2 \{18\delta^{-4} \delta'^4 \sigma^2 - \\ - 2\delta^{-3} \delta'^2 \delta'' [\kappa(2\kappa-1)M^8 - (4\kappa^2 - 15\kappa + 6)M^6 - (18\kappa - 39)M^4 - \\ - 51M^2 + 16] - \delta^{-2} \delta''^2 \sigma^2 [(4\kappa-5)M^4 + 16M^2 - 7] - \\ - 4\delta^{-2} \delta' \delta'' \sigma^2 (\kappa M^4 + 3M^2 - 2) + \delta^{-1} \delta^{IV} \sigma^4\} - \frac{1}{66} \sigma^{-2} \psi \times \\ \times \{6\delta^{-2} \delta'^4 \sigma^2 + (\kappa+1) \delta^{-2} \sigma^2 + 2\delta^{-1} \delta'^2 \delta'' [2\kappa(2\kappa-1)M^8 - \\ - (8\kappa^2 - 25\kappa - 5)M^6 - (31\kappa - 19)M^4 - 40M^2 + 12] + \\ + 6\delta''^2 \sigma^2 [(\kappa-1)M^4 + 4M^2 - 2] + \\ + 4\delta' \delta''' \sigma^2 (2\kappa M^4 + 5M^2 - 3) + 2\delta \delta^{IV} \sigma^4\}$$

Дальнейший расчет течения удобно выполнить численным решением системы (1.2) с найденной выше зависимостью $\Psi(\xi, \xi)$. При этом плотность определяется из второго уравнения указанной системы. По сравнению с полностью аналитическим подходом такой путь не только быстрее ведет к цели, но и является более точным, поскольку все уравнения из (1.2), за исключением первого, в этом случае удовлетворяются точно. Это,

как показывают расчеты, увеличивает точность результатов, несмотря на то что в рамках оценок по «порядку величин» оба подхода эквивалентны.

Заметим, что как решение системы $0, 0$, так и решения последующих k, l -систем, описывающие возмущения одномерного решения, справедливы для дозвукового, трансзвукового и сверхзвукового режимов течения в сопле. При этом предполагается, что функции $\delta(\xi)$ и $\varphi(\psi)$, характеризующие конфигурацию сопла и закон завихренности потока, являются аналитическими.

3. Трансзвуковое течение. Из-за ограниченного объема статьи в ней невозможно привести результаты анализа полученного выше решения для всей области движения газа по соплу, поэтому в дальнейшем рассмотрим только трансзвуковой режим. Помимо самостоятельного интереса знание параметров потока в околосзвуковой области позволяет осуществлять расчет сверхзвуковых течений также с помощью метода характеристик. В отличие от потенциальных незакрученных потоков, для которых аналитические решения, учитывающие двумерные эффекты в трансзвуковой области, хорошо известны (например, [1, 11]), такого решения для произвольно закрученного вихревого течения до сих пор не существовало.

Соотношения в околосзвуковой области получим, разлагая найденные в п. 2 решения различных приближений в ряды по степеням переменной ξ . Из вида получающихся после этого рядов при $\xi=0$ можно предположить, что область их сходимости по параметру R_w^{-1} ограничена величиной $R_w=1$ (практически разложения не могут быть использованы уже при $R_w < 2$). Отмеченное обстоятельство, а также результаты вычисления параметров течения с помощью аппроксимации Паде указывают на наличие особенности в точке $R_w^{-1} = -1$ комплексной плоскости переменного R_w^{-1} . Этот факт подтверждается и анализом частного решения задачи, когда $\Omega=0$, проведенным в [11].

В описанной ситуации можно построить аналитическое продолжение исследуемых функций в более широкую область, охватывающую практически используемые в соплах величины R_w . Для этой цели выполним конформное отображение

$$(3.1) \quad \tau = \frac{R_w^{-1}}{1+R_w^{-1}} = \frac{1}{1+R_w}, \quad R_w^{-1} \in [0 \div \infty) \\ (\tau \rightarrow R_w^{-1}, R_w^{-1} \rightarrow 0, \tau \in [0 \div 1))$$

Имеющиеся данные [11] подтверждают расширение области пригодности получающихся после выполнения отображения разложений (при $\Omega=0$) вплоть до очень малых значений R_w .

Для дальнейшего удобно перейти к переменной Холла [1]

$$(3.2) \quad \xi_H = [2/(\kappa+1)]^{1/2} R_w \xi$$

Ниже с учетом преобразований (3.1), (3.2) приводится ряд основных характеристик трансзвукового произвольно закрученного потока газа в сопле.

Функция тока $\Psi(\xi_H, \psi)$

$$(3.3) \quad \Psi_{00} = \psi, \quad \Psi_{01} = 1/4(\varphi'\psi - \varphi), \quad \Psi_{10} = 0, \quad \Psi_{11} = 1/16 \times \\ \times \{2(1-4\psi)\varphi'\psi + 4(\kappa-3)(I_1 - \varphi\psi) + (\kappa-1)[\varphi + 2\psi(2\psi-1) \times \\ \times \varphi_w] + 4[2(\kappa-1)\psi\varphi_w - (\kappa-1)\varphi - 2\varphi'\psi]\xi_H\} \\ \Psi_{02} = [32(\kappa+1)]^{-1} \{(\kappa+1)[I_2(\psi, 1) + \varphi'(2\varphi''\psi^2 - \varphi'\psi - 2\varphi) - \\ - 2\varphi\varphi''\psi] + 4(\kappa-1)\varphi_w[2\varphi'\psi + (\kappa-1)\varphi - (\kappa-1)\psi\varphi_w]\} \\ \Psi_{20} = -1/96(\kappa+1)\psi[16\psi^2 - 12\psi + 3 + 24(2\psi-1)\xi_H + 48\xi_H^2]$$

Коэффициент расхода $C_D = \Psi_t(1/2) / \Psi_{t00}(1/2)$

$$(3.4) \quad (C_D)_{00} = 1, \quad (C_D)_{01} = -1/2 \varphi_w, \quad (C_D)_{10} = 0$$

$$(C_D)_{11} = 1/8 [(5 - \kappa) \varphi_w + 4(\kappa - 3) I_1(1/2)], \quad (C_D)_{02} = [16(\kappa + 1)]^{-1} \times$$

$$\times \{ 2(\kappa - 1)^2 \varphi_w^2 - (\kappa + 1) [\varphi_w'' \varphi_w - (2 - \kappa) I_5(1/2) + 3I_6(1/2)] \}$$

$$(C_D)_{20} = -1/96 (\kappa + 1)$$

Ввиду практической важности расходных характеристик сопла было найдено последующее приближение для C_D (для сопел, симметричных относительно оси ξ)

$$(C_D)_{30} = (\kappa + 1) (8\kappa - 27) / 2304$$

Осевая составляющая потока импульса

$$(3.5) \quad I = jI_{00} = \int_0^{1/2} (p_t + \rho_t u_t^2) d\psi$$

$$j_{00} = 1, \quad j_{01} = -\kappa(\kappa + 1)^{-1} \varphi_w, \quad j_{10} = 0,$$

$$j_{11} = \kappa [8(\kappa + 1)]^{-1} [4(\kappa - 5) I_1(1/2) - (\kappa - 7) \varphi_w],$$

$$j_{02} = \kappa [16(\kappa + 1)^2]^{-1} \{ 2(\kappa - 1)^2 \varphi_w^2 - (\kappa + 1) [(\kappa - 3) I_5(1/2) +$$

$$+ 4I_6(1/2) + 2\varphi_w'' \varphi_w] \} \quad j_{20} = -\kappa / 96$$

Удельный импульс $i = I / \Psi_t(1/2) = ei_{00}$

$$(3.6) \quad e_{00} = 1, \quad e_{01} = -[2(\kappa + 1)]^{-1} (\kappa - 1) \varphi_w, \quad e_{10} = 0$$

$$e_{11} = -[8(\kappa + 1)]^{-1} [12(\kappa - 1) I_1(1/2) + (5 - 3\kappa) \varphi_w]$$

$$e_{02} = [16(\kappa + 1)^2]^{-1} \{ (\kappa + 1) [2(\kappa - 1) I_5(1/2) - (\kappa - 3) I_6(1/2) -$$

$$- (\kappa - 1) \varphi_w'' \varphi_w] - 2(\kappa - 1) (3\kappa + 1) \varphi_w^2 \}, \quad e_{20} = 1/96$$

Звуковая линия $(u^2 + v^2)^{1/2} = a$

$$(3.7) \quad \xi^+(\psi) = \xi(\psi) R_w^{1/2} = [(\kappa + 1) / (2\tau)]^{1/2} \sum_{k+l \geq 0} \xi_{kl}^+(\psi) \tau^{-k} \Omega^l$$

$$\xi_{00}^+ = 0, \quad \xi_{01}^+ = -[4(\kappa + 1)]^{-1} [2\varphi_w'' \psi + (\kappa + 1) \varphi' - 2(\kappa - 1) \varphi_w]$$

$$\xi_{10}^+ = 1/4 (1 - 4\psi), \quad \xi_{11}^+ = [96(\kappa + 1)]^{-1} \{ 2\varphi_w'' \psi [8(2\kappa + 3) \psi -$$

$$- 4\kappa + 3] + (\kappa + 1) \varphi' [8(2\kappa - 3) \psi - 4\kappa + 3] + 8(\kappa + 3) \varphi -$$

$$- 16(2\kappa^2 - 2\kappa - 3) [I_2' - 2I_2(1/2)] + 4\varphi_w [2(4\kappa^2 - 7\kappa - 3) \psi +$$

$$+ 4\kappa^2 + 2\kappa + 39] - 32(3\kappa^2 - \kappa + 9) I_1(1/2) \},$$

$$\xi_{02}^+ = -[48(\kappa + 1)^2]^{-1} \{ (\kappa + 1)^2 [(6 - \kappa) \varphi''^2 - 3I_3'(\psi, 1) +$$

$$+ 6I_3(1/2, 1) - 3(2\kappa - 1) I_5(1/2)] + (\kappa + 1) [6(\varphi' \psi - \varphi) \varphi''' \psi -$$

$$- (\kappa - 27) \varphi'' \varphi' \psi - 3(\kappa + 5) \varphi'' \varphi + (4\kappa^2 - 7\kappa - 3) \varphi' \varphi_w + 6\varphi_w'' \varphi_w -$$

$$- 12I_4(1/2, 1)] - 4(\kappa - 3) \varphi''^2 \psi^2 + 2(4\kappa^2 - 7\kappa - 3) \varphi_w [\varphi'' \psi +$$

$$+ (\kappa + 1) \varphi_w] \}, \quad \xi_{20}^+ = [12(4\kappa - 3) \psi - 4\kappa + 15] / 288$$

В приведенных соотношениях

$$I_5(\psi) = \int_0^\psi \varphi'^2 d\psi, \quad I_6(\psi) = \int_0^\psi \psi^2 \varphi''^2 d\psi$$

Разложения (3.3) — (3.6) имеют вид (2.1), где параметр R_w^{-1} нужно заменить на параметр τ .

4. Сравнение с известными результатами. Положив в формулах п.3 $\Omega=0$, получим соотношения для трансзвукового незакрученного течения. Некоторые из них хорошо известны [1, 11]. Из менее известных результатов заслуживает внимания факт увеличения удельного импульса сопла с уменьшением радиуса кривизны стенки в критическом сечении (с точностью до τ^2), что отмечалось также в [12].

В предельном случае $R_w \rightarrow \infty$, ограничиваясь членами порядка Ω , из приведенных в п. 3 формул можно получить расчетные результаты [2, 4, 5] для квазиодномерного приближения.

Немногие опубликованные к настоящему времени экспериментальные данные по исследованию закрученных околосвуковых течений, к сожалению, мало удобны для сравнения и имеют в основном качественный характер [4, 7, 13]. Это обстоятельство вынуждает ограничиться сопоставлением полученных в данной работе результатов только с известными результатами численных расчетов.

В [4] в приближении квазиодномерности течения ($v=0$) с помощью принципа максимума расхода (условие запаривания) находится ряд интегральных и локальных характеристик закрученного течения. Заметим, что в большинстве реальных вихревых потоков в сопле можно различать две характерные области: внешнюю, где $\Gamma=\text{const}$, и внутреннюю (ядро потока), где поперечная циркуляция убывает до $\Gamma=0$ на оси. В связи с этим в [4] исследуются закрученные околосвуковые течения с распределением $\Gamma(\Psi)$ в виде

$$(4.1) \quad \alpha(\psi)/\alpha_w = \{1 - \exp[-2K\Psi_t(\psi)]\} / \{1 - \exp[-2K\Psi_t(1/2)]\}, \\ \alpha(\psi) = [(\kappa-1)/(\kappa+1)]^{1/2} \Gamma[\Psi_t(\psi)]$$

где K — параметр, определяющий местоположение области перехода от квазипотенциального к квазитвердому вращению. Предельным значениям $K=0$ и ∞ соответствуют вихревое течение с линейным распределением циркуляции ($\Gamma \sim \Psi$) и потенциальное закрученное течение ($\Gamma=\text{const}$) [14].

Представляет интерес сопоставить квазиодномерное ($R_w \rightarrow \infty$) решение [4] с найденным в настоящей работе аналитическим решением, учитывающим наличие радиальной составляющей скорости v .

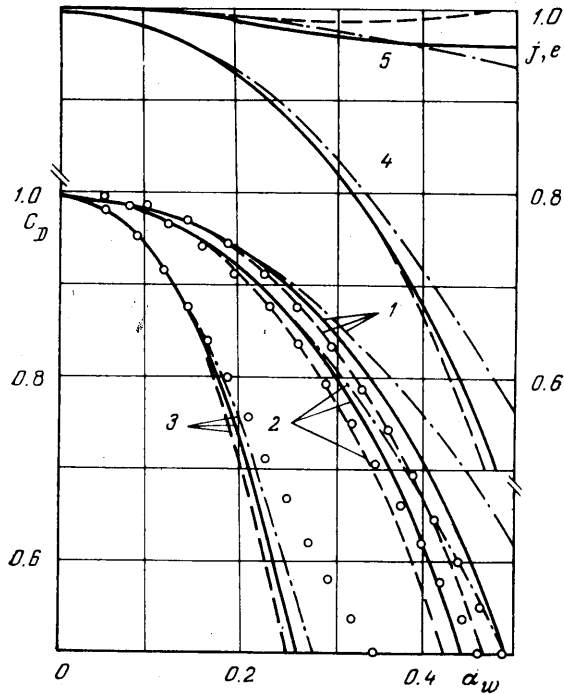
Установим связь между Ω и α_w . Обращая разложение α_w в (4.1), для произвольного распределения $\Gamma(\Psi)$ получим

$$(4.2) \quad \Omega = \omega \sum_{k+l \geq 0} g_{kl} \tau^{-k} \omega^l, \quad \omega = \alpha_w^2 (\kappa+1) / (\kappa-1) \\ g_{00} = G_w^{-1}, \quad g_{01} = 1/4 G_w^{-3} G_w' \varphi_w, \quad g_{10} = 0 \\ g_{11} = -1/16 G_w^{-3} G_w' [4(\kappa-3) I_3(1/2, 1) - (\kappa-5) \varphi_w] \\ g_{02} = -[512(\kappa+1) G_w^5]^{-1} \{2(\kappa-1)^2 \varphi_w'' \varphi_w^2 (\varphi_w''' + 4\varphi_w'') + \\ + (\kappa+1) \{ \varphi_w'' (\varphi_w''' + 4\varphi_w'') [I_4(1/2, 1) - \varphi_w'' \varphi_w] + \\ + \varphi_w^2 (\varphi_w^{IV} \varphi_w'' - 4\varphi_w''^2 - 24\varphi_w''' \varphi_w'' - 56\varphi_w''^2) \} \} \\ g_{20} = 1/192 (\kappa+1) G_w^{-2} G_w', \quad G_w = G_{00}(1/2)$$

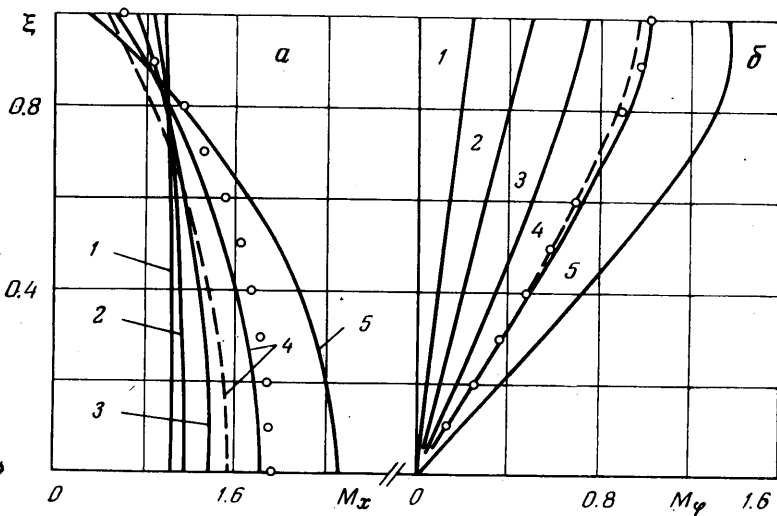
Зависимость $C_D(K)$ определяется с помощью (3.4), (4.1), (4.2) и имеет вид

$$(4.3) \quad C_D(K) = \sum_{k+l \geq 0} [C_D(K)]_{kl} \tau^{-k} v^l, \quad v = [(\kappa-1)A^2]^{-1} 2(\kappa+1)\alpha_w^2 K^2 \\ [C_D(K)]_{00} = 1, \quad [C_D(K)]_{01} = -\varphi_w, \quad [C_D(K)]_{10} = 0 \\ [C_D(K)]_{11} = 1/32 K^{-3} \{ (3-\kappa) [1 - \exp(-2K) + 2K - 4A] + 8K^3 \varphi_w \}, \\ [C_D(K)]_{02} = 1/32 K^{-4} \{ (2\kappa-1) \{ A^4 - 4K [Ei(-K) - 3Ei(-2K) + 3Ei(-3K) - \\ - Ei(-4K) + \ln(32/27)] \} + 2(\kappa-2) K \{ [Ei(-K) - Ei(-2K) + \ln 2]^2 + \\ + [C - Ei(-K)]^2 + 2F(K) - a \} \} + [2(\kappa+1)A]^{-1} [(\kappa-1)A^2 - \\ - 4(\kappa+1)K \exp(-K)] \varphi_w^2 + 1/4 K^{-2} (\kappa-1) A^2 \varphi_w, \quad [C_D(K)]_{20} = -1/96 (\kappa+1) \\ \varphi_w = 1/4 K^{-2} [Ei(-2K) - 2Ei(-K) + \ln(K/2) + C] \\ a = 1/6 \pi^2 + C^2, \quad A = 1 - \exp(-K)$$

$$F(K) = \frac{\partial \Gamma(\alpha, K)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \gamma(n, 2K)}{nn! 2^n}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь $Ei(-x)$ — интегральная показательная функция; $\Gamma(\alpha, x)$, $\gamma(\alpha, x)$ — неполные гамма-функции; C — постоянная Эйлера [15].

На фиг. 1 представлены расходные характеристики, построенные с помощью (4.3). Кривые 1–3 соответствуют $K=0, 1, 10$ (во всех примерах $\kappa=1.4$). Сплошными линиями нанесены зависимости $C_D(K)$ от α_w с учетом всех членов в (4.3) при $R_w=1$, штриховые линии отвечают случаю $R_w \rightarrow \infty$, штрихпунктирными линиями изображены расходные характеристики с точностью до членов $O(\alpha_w^2)$ при $R_w \rightarrow \infty$. Здесь же кружками отмечены численные результаты [4]. Видно, что имеет место хорошее согласование коэффициента расхода, полученного из аналитического ре-

шения в квазиодномерном приближении (4.3), с численными расчетами, вплоть до очень больших значений $\alpha_w \sim 0.4 \div 0.5$. С увеличением величины K область значений параметра α_w , при которых наблюдается хорошее описание исследуемых зависимостей, сужается.

Для практически интересного случая $K=0$ (вращение близко к квазитвердому), на фиг. 1 приведены также зависимости функций $j=I/I_{00}$ и $e=i/i_{00}$ от параметра α_w (линии 4 и 5 соответственно). При $R_w \rightarrow \infty$ тяга и расход с увеличением интенсивности вращения α_w быстро падают, а удельный импульс сопла сначала (до $\alpha_w=0.3$) слабо уменьшается, затем начинает увеличиваться и при $\alpha_w > 0.45$ даже превышает i_{00} (интенсивно закрученный поток обладает большим удельным импульсом, чем незакрученный при тех же параметрах заторможенного газа).

При $R_w=1$ поправки к интегральным характеристикам сопла, полученным в приближении $R_w \rightarrow \infty$, за счет неоднородности течения ($v \neq 0$) невелики. На фиг. 2, а, б приведены распределения осевой и тангенциальной составляющих числа Маха $M_x = u/a$ и $M_\varphi = w/a$ по радиусу в критическом сечении сопла для $K=0$ и $R_w \rightarrow \infty$. Сплошными линиями 1—5 соответствуют $\alpha_w = 0.1 \div 0.5$ через 0.1. Штриховыми линиями нанесены распределения $M_{tx}(\xi)$ и $M_{t\varphi}(\xi)$ при $\alpha_w = 0.4$ с точностью до членов $O(\alpha_w^2)$, кружками даны результаты [4] для того же α_w . Из сравнения следует хорошее соответствие локальных характеристик закрученного потока, полученных с помощью соотношений п. 3 и численных расчетов [4] при довольно большой интенсивности вращения ($\alpha_w = 0.4$).

Методом установления закрученные течения исследовались в работах [8, 9]. В качестве параметра, характеризующего завихренность потока, в [9] используется предложенный Г. Г. Черным [2] интегральный параметр

$$\varepsilon = \int_0^1 \int_{\Psi}^1 \Psi'^{-2} \Gamma^2(\Psi') d\Psi' d\Psi, \quad \Psi' = \Psi/\Psi_t^{(1/2)}$$

Связь ε с локальным параметром Ω , используемым в настоящей работе, дается соотношением

$$(4.4) \quad \varepsilon = \Omega \int_0^1 \left\{ \int_{\Psi}^1 \Psi'^{-2} G[\Psi_t^{(1/2)} \Psi'] d\Psi' \right\} d\Psi$$

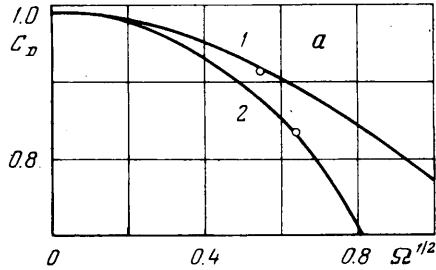
Для сравнения полученных выше результатов с данными машинного счета двумерной задачи рассмотрим варианты 4 и 11 из [9] при $R_w=1$. На фиг. 3 представлены графики зависимостей $C_D(\Omega)$, полученные с помощью (3.4). Варианту 4 соответствует линия 1, варианту 11 — линия 2. Распределения $\Gamma(\Psi)$ находились с помощью аппроксимации графических зависимостей $\Gamma(\Psi)$ из [9, 16] подходящими аналитическими функциями. Для варианта 4 $\Gamma(\Psi)$ аппроксимировалась зависимостью (4.1) при $K=1/2$, а для варианта 11 — тем же распределением при $K=3/2$, а также распределением

$$(4.5) \quad \Gamma(\Psi) = 4\Omega\Psi(1-\Psi)$$

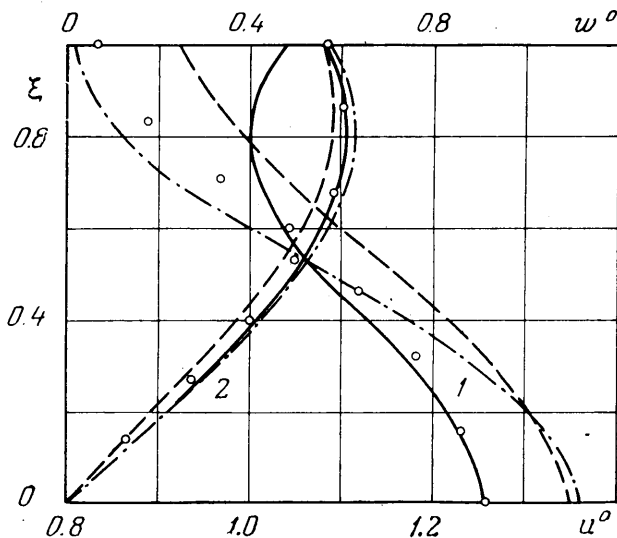
Точки соответствуют результатам [9].

Для варианта 11 сравнивались также и локальные характеристики. На фиг. 4 линиями 1 и 2 даны соответственно распределения u° и w° по радиусу критического сечения для различных приближений (изображения линий аналогичны фиг. 1). При расчете по формулам п. 3 использовалось распределение (4.5). Заметное отклонение $u^\circ(\xi)$, наблюдаемое вблизи стенки, отчасти может быть объяснено неточностью аппроксимации $\Gamma(\Psi)$.

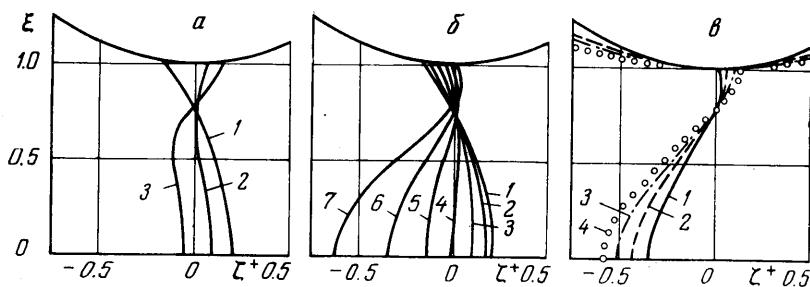
Резюмируя результаты сопоставления аналитического и численного расчетов, можно утверждать, что полученный в п. 3 алгоритм позволяет правильно рассчитывать произвольно закрученные околосзвуковые течения газа даже в соплах с достаточно малым радиусом R_w . При $R_w < 0.5$ точность описания течения у стенки уменьшается, и в этом случае числа членов, взятых в разложениях п. 3, может быть недостаточно.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

В заключение рассмотрим соотношения (3.7) для звуковой линии. Согласно определению $\varphi(\psi)$ в (2.7) из (3.7), в частности, следует:

$$(4.6) \quad \zeta_{01}^+(\psi=0) < 0, \quad \zeta_{01}^+(\psi=1/2) > 0$$

т. е. закрутка потока приводит к смещению звуковой линии по оси вверх, а на стенке — вниз по потоку (звуковая линия втягивается в сопло). Этот эффект отмечается также в [8, 9].

Выясним изменение формы звуковой линии вблизи оси в зависимости от вида $\Gamma(\Psi)$. Из (1.2) можно показать, что в звуковой точке на оси симметрии справедливо

$$(4.7) \quad \frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2} = \frac{1}{2} \rho^2 q \left[\left(\frac{\kappa+1}{\rho u} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 - \left(\frac{d\Gamma}{d\Psi} \right)^2 \right], \quad q = (u^2 + v^2)^{1/2}$$

Из (4.6), (4.7) следует интересный вывод о существовании такой конфигурации звуковой линии, когда она, втягиваясь в сопло, остается выпуклой вниз по потоку. Влияние завихренности при этом подавляется эффектом, связанным с конечностью величины R_w . Пример такого поведения звуковой линии приведен на фиг. 5, а для $\Gamma(\Psi) \sim \Psi^2$ (1, 2, 3 соответствуют $\alpha_w = 0, 0.3, 0.4$ при $R_w = 1$). На фиг. 5, б представлены конфигурации звуковых линий для $\Gamma(\Psi) \sim \Psi$ (1-7 соответствуют $\alpha_w = 0, 0.1 \div 0.35$ через 0.05).

Из фиг. 5, в видно влияние радиуса кривизны стенки сопла на форму звуковой линии (кривые 1-4 соответствуют $R_w = 1, 1.5, 2.0, 2.5$ при $\alpha_w = 0.3$ и $\Gamma(\Psi) \sim \Psi$).

Форма звуковой линии и прочие характеристики околосзвукового течения, как это можно видеть из общего решения п. 2, зависят также и от формы горловины сопла. Для трансзвукового решения это обстоятельство может быть учтено в высших приближениях, здесь не рассматриваемых.

Авторы признательны А. Н. Крайко за обсуждение работы и ценные замечания.

Поступила 25 X 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hall I. M.* Transonic flow in two-dimensional and axiellysymmetric nozzles. *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 1962, vol. 15, pt 4.
2. *Черный Г. Г.* Закрученные течения сжимаемого газа в каналах. *Изв. АН СССР, ОТН*, 1956, № 6.
3. *Гостинцев Ю. А.* Расходные характеристики сопла при истечении винтового потока газа. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1969, № 4.
4. *Lewellen W. S., Burns W. J., Strickland H. J.* Transonic swirling flow. *AIAA Journal*, 1969, vol. 7, No. 7.
5. *Гостинцев Ю. А., Успенский О. А.* О течении газа по соплу при ячеистой структуре вихревого потока. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1974, № 4.
6. *Славянов Н. Н.* Исследование закрученных течений идеального газа в соплах на сверх- и докритических режимах. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1975, № 6.
7. *Norton O. J., Farquhar B. W., Hoffman J. D.* An analytical and experimental investigation of swirling flow in nozzles. *AIAA Journal*, 1969, vol. 7, No. 10.
8. *Рычков А. Д.* Расчет закрученного течения идеального газа в сопле Лавали. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1974, № 5.
9. *Славянов Н. Н.* Теоретическое исследование закрученных течений идеального газа в сопле Лавали. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1973, № 6.
10. *Kliegel J. R., Quan V.* Convergent-divergent nozzle flows. *AIAA Journal*, 1968, vol. 6, No. 9.
11. *Kliegel J. R., Levine J. N.* Transonic flow in small throat radius of curvature nozzles. *AIAA Journal*, 1969, vol. 7, No. 7.
12. *Крайко А. Н., Соколов В. Е.* Об удельном импульсе потока в минимальном сечении сопла Лавали и в выходном сечении сужающегося сопла. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1976, № 1.
13. *Dunlap R.* An investigation of the swirling flow in a spinning end-burning rocket. *AIAA Journal*, 1969, vol. 7, No. 12.
14. *Mager A.* Approximate solution of isentropic swirling flow through a nozzle. *ARS Journal*, 1961, vol. 31, No. 8.
15. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 2. М., «Наука», 1974.
16. *Тилляева Н. И.* О профилировании сверхзвуковых частей осесимметричных сопел для неравномерных и закрученных течений. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1975, № 3.