

ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ РАСЧЕТА РЕАКТОРОВ ПО ВЫРАЩИВАНИЮ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛЕНОК

А. С. ГОРИНОВ, К. М. МАГОМЕДОВ, Н. М. МАГОМЕДОВА

(Магачкала)

Научные и технологические проблемы выращивания кристаллических пленок из газовой фазы отражены в [1-6]. При этом основное внимание уделяется изучению непосредственно кинетики и свойств выращиваемого кристалла, в то время как проектирование и расчет технологических процессов роста носит полуэмпирический характер [4-9]. Это объясняется как многообразием и сложностью процессов, протекающих в газовой фазе и на поверхности растущего кристалла, так и отсутствием строгого подхода к количественному описанию процессов роста кристалла, включающего в себя газовую и поверхностные фазы, несмотря на то что в области физико-химической газовой динамики такие постановки задач существуют [10-12]. При анализе роста кристаллов проблема заключается в определении функциональных соотношений для гетерогенных реакций, что невозможно без знания картины распределения параметров газовой фазы. Имеющиеся попытки учета газодинамических факторов в исследованиях по выращиванию кристаллов [4-9] часто связаны с неоправданными допущениями и даже ошибками. При расчете массопереноса в газотранспортных реакторах используется приближение бесконечно быстрой диффузии [6] для транспорта ростового компонента без обоснования справедливости этого приближения или же результаты автомодельной теории пограничного слоя используются вне области их справедливости (при числах Рейнольдса меньше единицы, при отсутствии подобия и автомодельности) [8, 9].

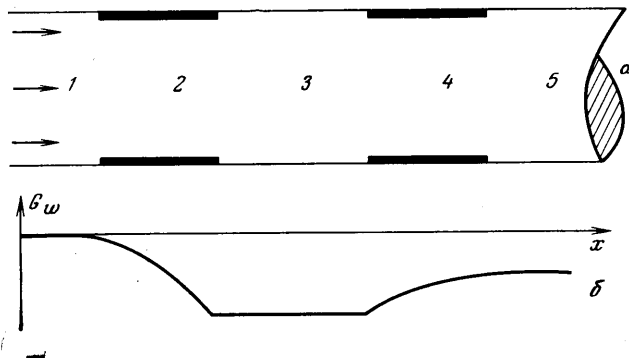
В работах [13, 14] сделаны попытки более строгого учета газодинамических факторов при расчете газотранспортных реакторов.

В данной работе предлагается общая феноменологическая постановка задачи расчета газотранспортного реактора, работающего в режиме сплошной среды. Течение в трубе многокомпонентного реагирующего газа с гомогенными и гетерогенными реакциями и термохимически разрушающимися элементами поверхности описывается системой уравнений Навье — Стокса совместно с соотношениями Стефана — Максвелла. Эти уравнения позволяют рассчитывать газотранспортные реакторы как в проточных системах, так и в условиях естественной конвекции. Расчет реактора в условиях естественной конвекции весьма актуален и в принципе может быть осуществлен методом, предложенным в [15].

Определяющая система уравнений для реальных режимов работы проточных реакторов существенно упрощается и для модельных двумерных реакторов решается как аналитически, так и численно. Предлагаемый подход позволяет полностью рассчитать массоперенос в реакторе при известной скорости гетерогенной реакции на подложке (источнике), а в общем случае — получить функциональную зависимость решения от граничных условий.

Граничными условиями на нейтральных стенках канала реактора являются обычные условия прилипания, баланса тепла или постоянства температуры, непроницаемости стенки. Условия на входе и выходе из реактора зависят от конкретной задачи. В предположении квазистационарности разрушения (роста) на источнике (подложке) рассматриваются условия баланса массы и условие, вытекающее из конкретного механизма роста или разрушения поверхности. Это может быть условие равновесия или кинетическое соотношение, определение которого даже в случае простого испарения вызывает серьезные трудности [1-3]. Граничные условия для уравнения энергии можно получить из балансовых соотношений для теплового потока. Нормальную составляющую вектора скорости можно найти из конкретного механизма разрушения и балансовых соотношений, а касательную составляющую положить равной нулю (скольжение не учитываем) [12].

1. Упрощение уравнений для реальных режимов работы открытых газотранспортных реакторов. Принципиальная схема реактора для выращивания кристаллических пленок показана на фиг. 1. Через реактор (трубку) пропускается рабочее вещество — активный газ. Источник и подложка поддерживаются при разных температурах. Материал поверхности источника (обычно поликристалл или порошок) вступает в физико-химическое взаимодействие с газами набегающего потока, за счет чего происходит термохимическое разрушение поверхности и образование газообразных компонентов, которые переносятся потоком на подложку (обычно монокристалл), где происходит рост пленки за счет осаждения материала источни-



Фиг. 1

ка. Варьируя скорость потока рабочего вещества реактора, разность температур источника и подложки с определенной кристаллографической ориентацией, получают качественные монокристаллические пленки.

Из общих уравнений и граничных условий при учете реальных режимов работы открытых реакторов можно получить простые и достаточно точные математические модели. Приведем характерные параметры реакторов [4-9]. Общее давление $P \sim 1$ атм, температура $T \sim 1000^\circ \text{К}$, относительная разность температур источника и подложки $\Delta T/T \sim 0.05$, характерный размер $R \sim 1$ см, скорость транспорта $v = 0 \div 20$ л/час, скорость роста кристалла $\dot{r} \sim 10^{-6}$ г/см²·сек. Для таких реакторов числа Кнудсена $\text{Kn} \sim 10^{-5}$, числа Рейнольдса $\text{Re} \sim 1 \div 10$, движение газа в реакторе можно считать установившимся.

На основе асимптотических оценок [16], а также учитывая, что плотность ρ , коэффициенты вязкости μ и диффузии D слабо меняются из-за малого изменения давления и температуры вдоль реактора, уравнения неразрывности и количества движения принимают вид уравнений для несжимаемой жидкости и в силу малости вдува и отсоса на источнике и подложке могут быть решены независимо от уравнений диффузии и энергии при обычных условиях прилипания. Ввиду некоторой неопределенности в граничных условиях, связанных с определением скорости разрушения (роста) пленки на источнике (подложке), нет необходимости пользоваться строгими соотношениями Стефана — Максвелла, а достаточно воспользоваться более простой моделью типа закона Фика с коэффициентом диффузии D , равным среднему из всех пар бинарных коэффициентов диффузии D_{ij} рассматриваемой смеси [17]. Тогда диффузионные свойства компонент газовой смеси одинаковы и в силу слабого изменения коэффициента диффузии D можно решать уравнения диффузии для элементов независимо от уравнения энергии при известном поле скоростей. Кроме того, для определения скорости роста кристалла нет необходимости решать уравнение энергии, если известны температуры источника и подложки.

Таким образом, при вычислении параметров на растущей (разрушающейся) поверхности для наиболее важных на практике случаев уравнения, описывающие установившиеся процессы в проточном газотранспортном реакторе при произвольных реакциях на источнике и подложке, имеют вид

$$(1.1) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \operatorname{grad} P = \mu \Delta \mathbf{v} \quad (\mathbf{v} \nabla) c_i = D \Delta c_i^* \\ (i=1, 2, \dots, N_e)$$

Для вычисления параметров газовой фазы в реакторе к системе уравнений (1.1) необходимо добавить либо N_e уравнений диффузии для компонент с правой частью, учитывающей скорость образования компонент в газовой фазе, либо N_e условий равновесия гомогенных реакций. При этом кроме концентрации элементов необходимо знание пространственного распределения давления и температуры, что требует привлечения уравнения энергии. При отсутствии гомогенных реакций в потоке используются уравнения диффузии для компонент без правой части

$$(\mathbf{v} \nabla) c_i = D \Delta c_i \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

решение которых в данном случае не требует привлечения уравнения энергии.

2. Приближенный интегральный метод расчета кольцевого газотранспортного реактора. Для исследования основных закономерностей газотранспортного метода выращивания пленок рассмотрим двумерный (кольцевой) реактор (фиг. 1).

Используя метод интегральных соотношений, получим приближенное аналитическое решение для реактора. Как показано в п. 1, для расчета массопереноса в данном кольцевом реакторе достаточно решить уравнение диффузии при известном поле скоростей $\mathbf{v}$

$$(2.1) \quad \operatorname{div}(\rho c \mathbf{v} + \mathbf{J}) = 0, \quad \mathbf{J} = -\rho D \operatorname{grad} c$$

Введем в рассмотрение функцию G , удовлетворяющую следующим условиям (в цилиндрической системе координат x, r, φ):

$$(2.2) \quad \frac{\partial G}{\partial x} = -r(\rho v c + J_r), \quad \frac{\partial G}{\partial r} = r(\rho u c + J_x)$$

Функция G является решением уравнений (2.1) и по физическому смыслу определяет расход элемента c в отличие от общего расхода, определяемого обычной функцией тока ψ . Действительно, на стенке $\rho v_n c + J_n = \dot{r}$, где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности (направление внутрь потока). Отсюда, например, для цилиндрической трубки радиуса R вдоль стенки $dG_w/dx = -R(\rho v c + J_r) = R\dot{r}$ и для кольцевого реактора имеет вид, представленный на фиг. 1, б. Величина G_w сохраняет постоянное значение там, где нет испарения или конденсации. Так как G определено с точностью до константы, выберем константу так, чтобы $G(x, 0) = 0$. Тогда очевидно, что $G(-\infty, r) = 0$. Далее будем рассматривать случай $R = \text{const}$. Проинтегрируем второе уравнение (2.2) по r при $x = \text{const}$

$$(2.3) \quad G_w = \int_0^R \rho u c r dr - \rho D \frac{d}{dx} \int_0^R c r dr$$

Введем следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{2Qf_1(x)}{\rho D R f(x)} \quad \sigma = \frac{G_w}{\rho D R} \quad \gamma = \frac{R\dot{r}}{\rho D}$$

$$f(x) = \int_0^R cr \, dr / \int_0^R r \, dr, \quad f_1(x) = \int_0^R \rho ucr \, dr / \int_0^R \rho ur \, dr$$

$$Q = \int_0^R \rho ur \, dr, \quad x = Rx', \quad r = Rr'$$

Функция $q(x)$, очевидно, определяет при данном расходе отношение средней по площади концентрации к средней по расходу. Тогда из (2.3)

$$(2.4) \quad \frac{df}{dx'} - qf = -2g, \quad \frac{dg}{dx'} = \gamma$$

В дальнейшем штрих над x будем опускать. Из (2.4) при известном $q(x)$ получим решение

$$(2.5) \quad f(x) = \exp \left(\int_0^x q(\xi) d\xi \right) \left\{ C - 2 \int_0^x g(\xi) \exp \left[- \int_0^\xi q(\eta) d\eta \right] d\xi \right\}$$

Используем точное соотношение (2.5) для приближенного решения задачи при следующих допущениях. Отношение средней по расходу к средней по площади концентрации элемента меняется слабо: $q(x) \approx \text{const}$. При вычислении интегралов в (3.5) можно воспользоваться приближением

$$\int_a^b \gamma(x) e^{-qx} dx \approx \gamma \left(\frac{a+b}{2} \right) \int_a^b e^{-qx} dx$$

Хотя скорости испарения и кристаллизации будут меняться вдоль пленки, это приближение достаточно обосновано, так как из-под знака интеграла выносится значение в средней точке. Профили концентрации в области источника или подложки можно задавать аппроксимационным полиномом, удовлетворяющим следующим условиям: $c(x, 1) = c_w$, $(\partial c / \partial r)_0 = 0$, $(\partial c / \partial r)_w = \gamma(1 - c_w)$. Этот полином имеет вид $c = c_w - \frac{1}{2}\gamma(1 - c_w)(1 - r^2)$. Такой аппроксимацией, очевидно, можно пользоваться лишь при условии $c_w > \frac{1}{2}|\gamma|$, из которого, как можно показать, следует $q \approx \text{const}$. Оба эти условия выполняются, например, при локально-равновесных реакциях на поверхности. Опуская выкладки, приведем окончательное выражение для скорости роста g в случае чисто диффузионной модели ($q=0$) и когда источник и подложка разнесены на большое расстояние ($L \gg 1$)

$$(2.6) \quad g = \frac{c_{w1} - c_{w2}}{2L + 3(l_1 + l_2)/4 + (1 - c_{w1})/4l_1 + (1 - c_{w2})/4l_2}$$

$$(2.7) \quad g = q[(B_1 + C_1)c_{w1} - B_2c_{w1}]/\Delta,$$

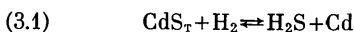
$$\Delta = (B_1 + C_1)(2 + C_2) - 2B_2 \exp(-q_2 l_2/2)$$

$$B_i = 1 + 2[1 - \exp(-q l_i/2)](q l_i)^{-1}, \quad C_i = q(1 - c_{wi})/(4l_i)$$

Здесь $i=1, 2$ обозначает источник и подложку, а l_i — длина источника (подложки) соответственно. Анализ решения (2.7) показывает, что скорость роста как функция q имеет максимум и при больших q может обратиться в нуль. Такой же характер имеет зависимость скорости роста от q и в плоском реакторе [14]. Практическая ценность полученного решения заключается в том, что им можно с достаточной точностью воспользоваться для реального источника (подложки), обычно представляющего собой часть

кольца, отсекаемого двумя плоскостями $\varphi = \text{const}$. Следует также отметить, что полиномиальная аппроксимация ограничивает область применимости решения сравнительно небольшими значениями $q \ll 1$. При больших q более подходящей оказывается аппроксимация профиля концентрации экспонентой. В приближении квазиравновесия на поверхности концентрации c_w можно считать заданными. В общем случае к (2.6), (2.7) следует добавить кинетические соотношения для определения концентраций компонент на поверхности.

3. Пример расчета открытой газотранспортной системы. Рассмотрим в качестве примера лабораторную установку, в которой выращиваются кристаллические пленки CdS, а рабочим веществом является водород [6]. Для правильной постановки граничных условий необходимо конкретизировать химическую систему. Расчет равновесного состава паров в водороде показывает, что в диапазоне температур 800–1200° К основными компонентами газовой фазы являются H_2 , Cd, H_2S . В отличие от промышленных в лабораторных установках, как правило, имеется источник «конечных» размеров. Следствием этого является снижение парциального давления Cd на выходе из области источника по сравнению с давлением насыщенных паров при температуре источника. Состав газовой фазы, макрокинетика и механизм реакций, идущих на поверхности кристалла и в газовом объеме, подробно обсуждались в [6]. Проведенные расчеты показали, что суммарную химическую реакцию процессов, происходящих на источнике и в газовом объеме у источника, можно выразить так [6]:



Так как обратная реакция (3.1) вследствие избытка водорода затруднена, то гомогенные реакции можно считать замороженными. Массоперенос в такой лабораторной установке можно описать системой уравнений (1.1), но для качественного анализа можно сделать дальнейшие упрощения. Ограничимся рассмотрением квазиравновесного приближения на поверхности растущей (разрушающейся) пленки и «замороженных» гомогенных реакций. Тогда парциальные давления компонент Cd, H_2 , H_2S вблизи источника или подложки можно рассчитать из условия равновесия $K_p(T) = P_{Cd}P_{H_2S}/P_{H_2}$ и соотношений $P_{Cd} = P_{H_2S}$, $P_{Cd} + P_{H_2S} + P_{H_2} = P_0$. Так как в (1.1) предполагалось, что диффузионные свойства компонент одинаковы, то стехиометрическое соотношение $P_{H_2S} = P_{Cd}$ соблюдается всюду в системе. Учитывая, что $c_{H_2S} + c_{Cd} + c_{H_2} = 1$, достаточно решать уравнение неразрывности для одной компоненты Cd.

Тогда для плоской геометрии канала и гидродинамического решения Пуазейля уравнение массопереноса для компоненты Cd и граничные условия принимают вид

$$(3.2) \quad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} = \sigma \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\gamma_x(\infty, y) = 0, \quad \beta(x) \gamma_y(x, 0) + [1 - \beta(x)] \gamma(x, 0) = 0$$

$$\gamma(-\infty, y) = 1, \quad \gamma_y(x, 1) = 0, \quad \gamma = \frac{c - c_w}{c_- - c_w}$$

$$(3.3) \quad \beta = 1 \quad (|x| > l), \quad \beta = 0 \quad (|x| < l)$$

$$\sigma = 6\sigma_0 y(1-y), \quad \sigma_0 = \frac{U_0 R}{D} = \text{Re Sc}$$

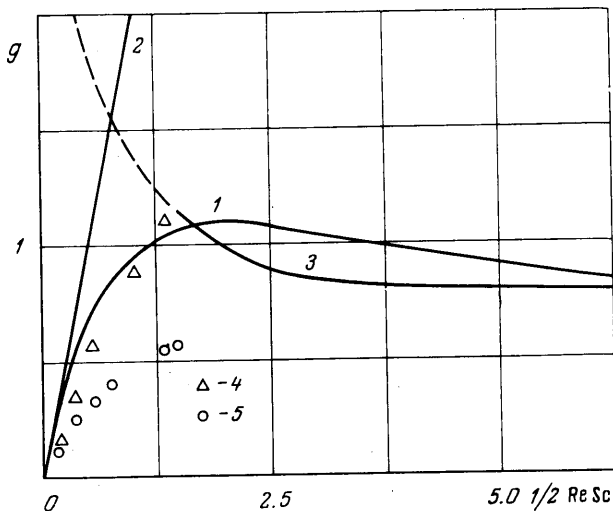
Здесь c , c_w , c_- — массовая концентрация компоненты Cd в газовой фазе, на стенке и при $x = -\infty$ соответственно, ρ — плотность смеси газов потока, U_0 — среднерасходная скорость потока, R — ширина канала, D — коэффициент диффузии, $2l = L/R$ — безразмерная длина источника, L — длина источника, координаты x , y отнесены к ширине канала R , $\text{Re} = \rho U_0 R / \mu$, $\text{Sc} = \mu / \rho D$, μ — динамический коэффициент вязкости.

В таких переменных уравнение массопереноса имеет одинаковый вид и для зоны травления, и для зоны осаждения. При этом $c_- = 0$ для области источника и $c_- \neq 0$ для области подложки. Предполагая, что источник и подложка бесконечно удалены друг от друга, можно, получив решение для области источника, воспользоваться им для области подложки.

Краевая задача (3.2) с граничными условиями (3.3) численно решалась методом конечных разностей. Возникающая система линейных алгебраических уравнений решалась методом матричной факторизации. Чтобы снизить затраты машинного

времени, использовался метод «замедленного стремления к пределу» [18]. Дальнейшее упрощение (3.2) достигается тем, что конвективный перенос можно учесть приближенно через среднерасходную скорость, полагая конвективную скорость постоянной и равной своему среднему значению $\sigma = \sigma_0$. В таком виде задача сформулирована в [13]. В первом приближении (канал разбит на две части) методом прямых получено аналитическое решение, которое дает удовлетворительную для практики точность для малых σ_0 .

На фиг. 2 представлена зависимость скорости роста пленки от безразмерной скорости потока рабочего вещества реактора (кривая 1). Наблюдается наличие максимума при некоторых значениях $\sigma_0 = \sigma_{\max}$ и прекращение роста пленок при $\sigma_0 = \sigma$. Этот максимум примерно соответствует режиму работы существующих реакторов. Прямая 2 соответствует приближению бесконечно быстрой диффузии [6], кривая 3 получена из расчетов в приближении пограничного слоя [8, 9]. Из фиг. 2 видно, что необходимо осторожно пользоваться приближениями и строго оговари-



Фиг. 2

вать, в каких пределах эти приближения справедливы, так как можно получить качественно неверные результаты.

Для данной задачи покажем несостоятельность экстраполяции результатов теории пограничного слоя на случай малых чисел Рейнольдса. Суммарная скорость «испарения» получится интегрированием известного выражения для скорости испарения [10] по длине источника

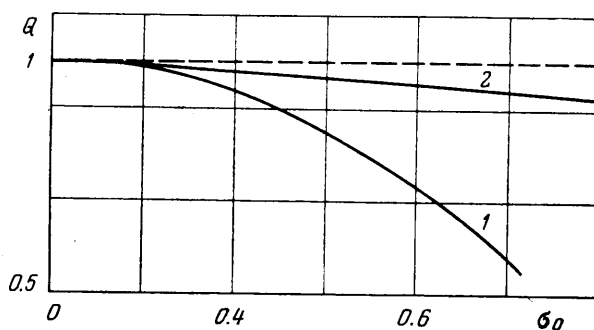
$$(3.4) \quad \dot{r}_{\Sigma 1} = -\sqrt{2} \frac{\rho D}{1 - c_{w1}} \frac{\rho u}{\sqrt{\rho \mu u / l_1}} Z'(0) c_{w1}$$

За источником поток обтекает уже нейтральную стенку, поэтому концентрация кадмия выравнивается по сечению и при выходе из зоны источника может быть найдена из балансового соотношения $\dot{r}_{\Sigma 1} = \rho u S c_1$, где S — площадь сечения канала, c_1 — концентрация ростового компонента на бесконечности. Для скорости роста соответствующее выражение имеет вид

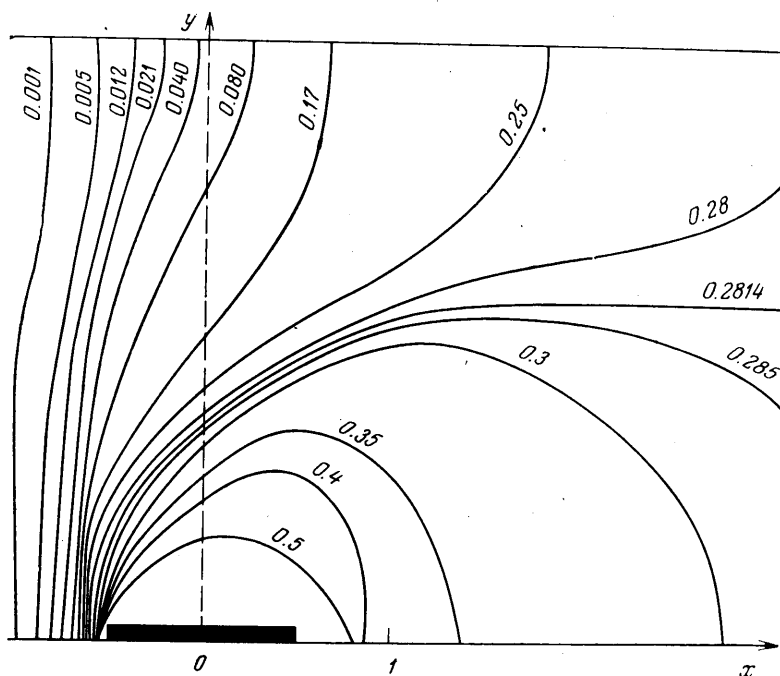
$$(3.5) \quad \dot{r}_{\Sigma 2} = -\sqrt{2} \frac{\rho D}{1 - c_{w2}} \frac{\rho u}{\sqrt{\rho \mu u / l_2}} Z'(0) (c_{w2} - c_1)$$

и легко показать, что при $u \rightarrow 0$ $\dot{r}_{\Sigma 2}$ стремится к конечному пределу. Здесь индекс 1 обозначает область источника, индекс 2 — область подложки. Из-за малости перепада температур между источником и подложкой в формулах (3.4), (3.5) пренебрегается изменением свойств переноса. В случае источника бесконечной длины $c_1(\sigma) = \text{const}$, поэтому при $u \rightarrow 0$ получаем точное решение $\dot{r}_{\Sigma 2} = 0$. Этим можно объяснить такую популярность экстраполяции теории пограничного слоя на область $\text{Re} \ll 1$.

На фиг. 2 приведены экспериментальные данные из работы [6], причем символом 4 обозначены скорости роста пленок CdS на подложке GaAs ориентации (110),



Фиг. 3



Фиг. 4

а символом 5 — на подложке GaAs ориентации (100). Эти эксперименты находятся в удовлетворительном согласии с кривой 1, которая получена путем счета на ЭВМ. Сравнение результатов, полученных при $\sigma = \sigma(y)$ и $\sigma = \text{const}$, приведено на фиг. 3. Необходимо отметить, что для $\sigma_0 \leq \sigma_{\text{max}}$ их отличие меньше 10%, поэтому для практических расчетов удобнее пользоваться моделью $\sigma = \text{const}$. Кривая 1 построена для случаев, когда температуры источника (подложки) соответственно $T_1 = 1073^\circ \text{K}$, $T_2 = 1040^\circ \text{K}$; кривая 2 — для случаев $T_1 = 1023^\circ \text{K}$, $T_2 = 860^\circ \text{K}$. На фиг. 4 представлены линии равной концентрации. При $\sigma_0 < 1$ профили концентрации быстрее выравниваются позади источника, при $\sigma_0 > 1$ — перед источником.

Таким образом, при известной кинетике поверхностных процессов, т. е. когда известны фундаментальные соотношения $\dot{r} = f(P, T, c, \dots)$, расчет проточных реакторов не представляет принципиальных трудностей. Более сложной является задача использования газодинамических расчетов для исследования кинетики поверхностных процессов с использованием экспериментальных данных.

Предложенный подход может быть использован также для расчета реакторов, работающих в условиях естественной конвекции. При этом необходимо проявлять особую осторожность при упрощении исходных уравнений и граничных условий.

Поступила 16 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Хирс Д., Паунд Г. Испарение и конденсация. М., «Металлургия», 1966.
2. Элементарные процессы роста кристаллов. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
3. Стрикленд-Констэбл Р. Ф. Кинетика и механизм кристаллизации. Л., «Недра», 1971.
4. Bradshaw S. E. The kinetics of epitaxial silicon deposition by hydrogen reduction of chlorosilanes. Intern. J. Electronics, 1966, vol. 21, No. 3.
5. Shepherd W. H. Vapor phase deposition and etching of silicon. J. Electrochem. Soc., 1965, vol. 112, No. 10.
6. Котелянский И. М. Исследование процесса роста эпитаксиальных пленок CdS в открытой газотранспортной системе. Изв. АН СССР. Сер. неорг. матер., 1971, т. 7, № 6.
7. Бубнов Ю. З., Лурье М. С., Старос Ф. Г., Филаретов Г. А. Вакуумное нанесение пленок в квазизамкнутом объеме. М., «Сов. радио», 1975.
8. Белый В. И., Кузнецов Ф. А., Коковин Г. А. Учет газодинамических параметров процессов роста и травления в газовой фазе. В сб. «Процессы роста и структура монокристаллических слоев полупроводников». Новосибирск, «Наука», 1968.
9. Румянцев Ю. М., Кузнецов Ф. А. Исследование переноса арсенида галлия в открытой йодидной системе. Изв. СО АН СССР, Сер. хим. н., 1969, № 9, вып. 4.
10. Дорренс У. Гиперзвуковые течения вязкого газа. М., «Мир», 1966.
11. Гиршфельдер Д., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
12. Суслов О. Н., Тирский Г. А., Щенников В. В. Описание химически равновесных течений многокомпонентных ионизованных смесей в рамках уравнений Навье — Стокса и Прандтля. ПМТФ, 1971, № 1.
13. Горинов А. С., Магомедова Н. М. Некоторые особенности массопереноса в газотранспортном реакторе. Изв. Сев.-Кавк. науч. центра высшей школы, Сер. естеств. н., 1975, № 2.
14. Горинов А. С., Магомедова Н. М., Погорельский К. С. Исследование макромеханизма роста эпитаксиальных пленок в открытом газотранспортном реакторе. Изв. Сев.-Кавк. науч. центра высшей школы, Сер. техн. н., 1976, № 1.
15. Полежаев В. И. Численное решение системы двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа в замкнутой области. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2.
16. Магомедов К. М. Асимптотические уравнения течения вязкого газа в узких протяженных областях. Докл. АН СССР, 1973, т. 212, № 2.
17. Тирский Г. А. Вычисления эффективных коэффициентов диффузии в ламинарном диссоциированном многокомпонентном пограничном слое. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
18. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М., «Мир», 1974.