

СФЕРИЧЕСКОЕ РАСШИРЕНИЕ БИНАРНОЙ СМЕСИ ГАЗОВ В ЗАТОПЛЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО

В. Н. ГУСЕВ, В. В. РЯБОВ

(Москва)

В последнее время наметился усиливающийся интерес к изучению струйных течений в связи с их возможным использованием при разделении изотопов или газовых смесей. Основанием для этого служат прямые наблюдения разделения смесей при проникании окружающего газа в струю (см., например, [1]).

Хорошей теоретической моделью для изучения процессов разделения в струйных течениях может стать одномерное течение от источника. На примере этого течения с помощью уравнений Навье — Стокса были подробно изучены особенности сферического расширения вязкого теплопроводного газа в затопленное пространство (см. библиографию [2]). При исследовании эффектов разделения наряду с вязкостью и теплопроводностью необходим учет диффузионных процессов. В теоретических исследованиях большое внимание этому вопросу было уделено при изучении структуры плоской ударной волны в бинарной смеси газов. Настоящее исследование предпринято с целью выявления роли диффузионных процессов в одномерном течении от сферического источника. Подробно исследуется сферическая ударная волна, в которой, как показано в работе, при малом противодавлении возможно полное разделение компонентов смеси. Получены асимптотические решения в трансзвуковой и гиперзвуковой областях течения. Приведены результаты численных расчетов для аргон-гелиевой смеси при различных начальных концентрациях.

1. Рассмотрим установившееся сверхзвуковое течение смеси газов, истекающих из сферического источника радиуса n , со звуковой скоростью (число Маха $M_\infty = 1$) в пространство с постоянным давлением p_∞ . Течение будет происходить по радиусам из точек сферы с центром в начале координат и будет состоять из двух областей: внутренней — сверхзвуковой ($r_- < r < r_+$) и внешней — дозвуковой, разделенных некоторой переходной областью. В случае идеального газа течение описывается уравнениями Эйлера, и r_+ — координата ударной волны, при наличии вязкости r_+ — координата, где параметры потока экстремальны.

Следуя [3], выпишем систему одномерных уравнений Навье — Стокса для однотемпературной смеси газов в случае сферической симметрии

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & \rho u r^2 = \rho_1 u_1 r^2 + \rho_2 u_2 r^2 = \text{const}, \quad \rho_1 u_1 r^2 = \text{const}, \quad p = \frac{R_0}{m} \rho T \\
 & \rho u \frac{du}{dr} + \frac{dp}{dr} = \frac{4}{3} \mu \left[\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} - \frac{2u}{r^2} \right] + \frac{4}{3} \frac{d\mu}{dr} \left[\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right] \\
 & \rho u r^2 \left(c_p T + \frac{u^2}{2} \right) - r^2 \lambda \frac{dT}{dr} + \rho_1 r^2 (u_1 - u) \times \\
 & \times \left(c_{p1} T - c_{p2} T + \beta \frac{p}{\rho} \frac{m^2}{m_1 m_2} \right) - \frac{4}{3} r^2 \mu u \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} \right) = \text{const} \\
 & u_1 - u = \frac{\rho}{\rho_1} \frac{m_1 m_2}{m^2} D_{12} \left\{ f(1-f) \left[\frac{m_1 - m_2}{m} \frac{d}{dr} (\ln p) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \beta \frac{d}{dr} (\ln T) \right] - \frac{df}{dr} \right\}
 \end{aligned}$$

Здесь u — скорость; p, ρ, T — соответственно давление, плотность и температура; f — концентрация; m — молекулярный вес; R_0 — универсальная газовая постоянная; μ — коэффициент вязкости; λ — коэффициент теплопроводности; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; D_{12} — коэффициент диффузии; β — термодиффузионное соотношение; индексом 1 обозначен компонент с более тяжелым молекулярным весом, индексом 2 — с более легким.

Средняя плотность газа, его молекулярный вес и удельная теплоемкость при постоянном давлении определяются как

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad m = m_1 f + m_2 (1-f), \quad \left(f = \frac{\rho_1 m_1}{\rho m} \right),$$

$$c_p = \frac{\gamma R_0}{m(\gamma-1)} = \frac{(c_{p1} \rho_1 + c_{p2} \rho_2)}{\rho}$$

Здесь γ — отношение удельных теплоемкостей. Положим также, что $\mu \sim T^n$, $\beta \sim m^{-1}$, число Прандтля $\sigma = \mu c_p / \lambda \sim m$ и число Шмидта $Sc = \mu / (\rho D_{12}) \sim m^{-1}$. При $n=0.75$ эти зависимости хорошо аппроксимируют коэффициенты переноса аргоно-гелиевой смеси [3].

Приведем систему (1.1) к безразмерному виду. Введем следующие размерные константы: $Q = Q_1 + Q_2 = 4\pi r_0 u r^2$ — расход газа; $p_\infty, \rho_\infty, T_\infty, \mu_\infty$ — давление, плотность, температура и коэффициент вязкости при $r = \infty$. Безразмерные величины определим следующим образом:

$$w = \frac{u}{\sqrt{\gamma R_0 T_\infty / m_\infty}}, \quad p' = \frac{p}{p_\infty}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad \theta = \frac{T}{T_\infty}$$

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \theta^n, \quad \frac{\sigma}{\sigma_\infty} = \frac{F}{F_\infty}, \quad \frac{Sc}{Sc_\infty} = \frac{\beta}{\beta_\infty} = \frac{F_\infty}{F}$$

$$(1.2) \quad y = \frac{l}{r} = \left[\frac{Q \sqrt{\gamma R_0 T_\infty / m_\infty}}{4\pi \gamma \rho_\infty} \right]^{0.5} r^{-1}, \quad F = \varepsilon + (1-\varepsilon)f, \quad \varepsilon = \frac{m_2}{m_1}$$

Здесь индексом ∞ обозначены величины в бесконечно удаленной точке $r = \infty$.

После исключения давления и плотности система (1.1) приводится к следующему виду:

$$\frac{dw}{dy} + \frac{1}{\gamma} \frac{F_\infty}{F} \left[\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dy} - \frac{1}{w} \frac{dw}{dy} + \frac{2}{y} - \frac{(1-\varepsilon)}{F} \frac{df}{dy} \right] \frac{\theta}{w} =$$

$$= -\frac{1}{C} \left[\theta^n \left(\frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{2w}{y^2} \right) + n\theta^{n-1} \frac{d\theta}{dy} \left(\frac{dw}{dy} + \frac{w}{y} \right) \right]$$

$$\left[\frac{Q_1}{Q} + \left(1 - \frac{Q_1}{Q} \right) \varepsilon^{-1} \right] F_\infty \theta + (\gamma-1) w^2 \left(0.5 + \frac{\theta^n}{(yC)} \right) +$$

$$+ \frac{\theta^n}{C} \left[0.75 F_\infty / (\sigma_\infty F) \frac{d\theta}{dy} + (\gamma-1) w \frac{dw}{dy} \right] +$$

$$+ 0.5(\gamma-1) \beta_\infty F_\infty^2 \theta \left(\frac{Q_1}{Q} - \frac{f}{F} \right) \varepsilon^{-1} = \alpha$$

$$\frac{Q_1}{Q} - \frac{f}{F} = \frac{\beta_\infty}{4 Sc_\infty FF_\infty} \frac{\theta^n}{C} \left\{ f(1-f) \left[\left(\frac{1}{w} \frac{dw}{dy} - \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dy} - \frac{2}{y} \right) \frac{1-\varepsilon}{F} + \beta_\infty \frac{F_\infty}{F} \frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dy} \right] + \frac{\varepsilon^2 + (1-\varepsilon^2)f}{F^2} \frac{df}{dy} \right\}$$

Здесь α и Q_1/Q — безразмерные константы, определяющие потоки тепла и диффузии, проходящие через сферическую поверхность в единицу времени в бесконечно удаленной точке $r=\infty$ ($y=0$), которые должны быть заданы в качестве граничных условий.

Решение системы (1.2) в окрестности точки $y=0$ в случае, когда давление стремится к конечному значению, имеет следующий вид:

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} a_j y^{j+2}, \quad \theta = \sum_{j=0}^{\infty} b_j y^j, \quad f = \sum_{j=0}^{\infty} c_j y^j$$

Из граничных условий для расхода газа, его температуры и концентрации при $y=0$ следует, что $a_0=b_0=1$, $c_0=f_\infty$. Последующие коэффициенты рядов определяются через безразмерные константы C , Q_1/Q , Sc_∞ , α , γ , n , σ_∞ , β_∞ , f_∞ , ε .

Например

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 - c_1(1-\varepsilon)/F_\infty \\ b_1 &= \frac{4}{3} \sigma_\infty (\gamma-1) \frac{C}{\gamma} \left\{ \frac{\gamma\alpha}{\gamma-1} - \frac{\gamma F_\infty}{\gamma-1} \left[\frac{Q_1}{Q} + \left(1 - \frac{Q_1}{Q}\right) \frac{1}{\varepsilon} \right] - \frac{\beta_\infty F_\infty^2}{\varepsilon} \left(\frac{Q_1}{Q} - \frac{f_\infty}{F_\infty} \right) \right\} \\ c_1 &= \frac{4}{3} Sc_\infty \frac{F_\infty^2 C}{\varepsilon} \left(\frac{Q_1}{Q} - \frac{f_\infty}{F_\infty} \right) - f_\infty (1-f_\infty) \beta_\infty b_1 \end{aligned}$$

В случае, когда тепловой и диффузионный потоки в бесконечно удаленной точке отсутствуют ($b_1=c_1=0$), $\alpha=1$ и $Q_1/Q=f_\infty/F_\infty$.

2. Остановимся на этом случае более подробно. Рассмотрим аргоно-гелевую смесь ($\gamma=1.67$, $n=0.75$, $\varepsilon=0.1$).

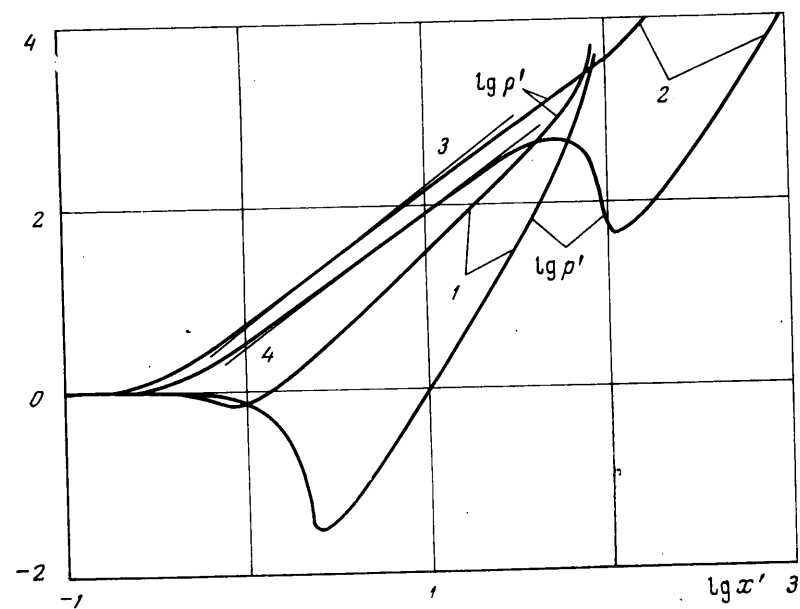
Система уравнений (1.3) решалась численно на ЭВМ по методу, изложенному в [4]. Решение имеет много общего со случаем истечения однокомпонентного газа. При относительно больших значениях числа Рейнольдса $Re_* = \rho_* u_* r_* / \mu_*$, где звездочкой обозначены величины на критической сфере, течение при $r < r_+$ остается близким к идеальному.

Результаты численных расчетов при $f_\infty=0.5$, $Sc_\infty=0.333$, $\sigma_\infty=0.431$, $\beta_\infty=0.377$ приведены на фиг. 1. На ней в переменных подобиях [5] даны изменения давления p' и плотности ρ' смеси в зависимости от $x' = r_*/r (p_{0*}/p_\infty)^{0.5}$ при значениях критерия $C=5$ (кривые 1) и 0.07 (кривые 2), который однозначно связан с параметром подобия $K_2 = Re_*(p_\infty/p_{0*})^{0.5}$ [5]

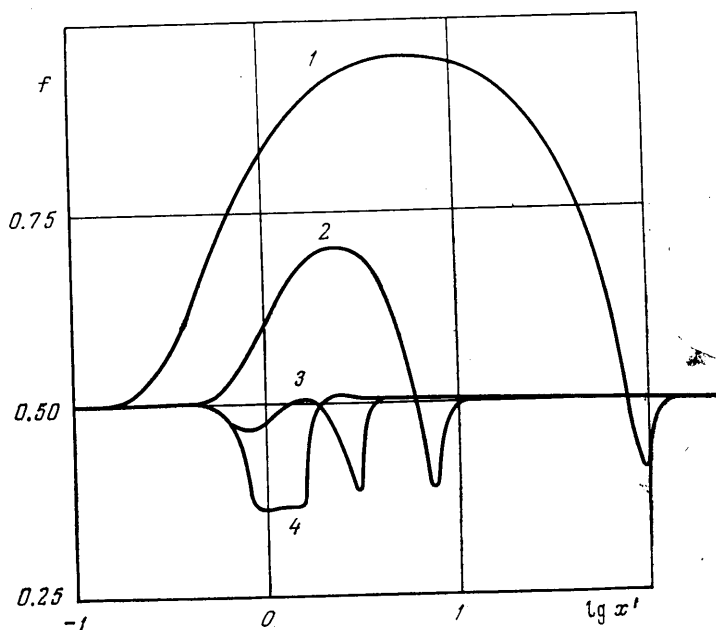
$$C = 0.75 (0.5(\gamma+1))^{(0.25(\gamma+1)/(\gamma-1)-n)} \left(\frac{m_\infty}{m_*} \right)^{0.25} \left(\frac{T_{0*}}{T_\infty} \right)^{n+0.25} K_2$$

где индексом 0 отмечены параметры торможения. Как показывают полученные результаты, изменения параметров смеси при $r > r_+$ аналогичны соответствующим изменениям в однокомпонентном газе [2].

При наличии диссипативных процессов сферическая ударная волна становится размытой, ее толщина — конечной и тем большей, чем больше перепад давления p_{0*}/p_∞ . В отличие от плоской ударной волны из-за растекания газа нарушаются следующие из теории прямого скачка уплотнения соотношения на ее фронте. Более того, при $p_{0*}/p_\infty \rightarrow \infty$, когда $C \rightarrow 0$, перепад плотности на фронте ударной волны вообще исчезает и ее изменение во всей области течения становится монотонным (кривая 2 на фиг. 1).



Фиг. 1



Фиг. 2

Из-за больших градиентов термодинамических величин во фронте ударной волны возникают диффузионные потоки компонентов смеси, благодаря чему происходит их перераспределение. Обращает на себя внимание значительное увеличение скорости легкого компонента гелия в этой области. В рассмотренном примере его максимальная скорость более чем в 3 раза превышает предельную скорость смеси.

В переднем фронте сферической ударной волны, так же как и в плоском случае [6], происходит концентрирование легкого компонента. Этот эффект отмечался в [7]. Его величина зависит от начальной концентрации смеси и практически постоянна при изменении параметра подобия K_2 (см. фиг. 2, на которой кривыми 1-4 представлены результаты расчета концентрации аргона для $K_2=0.087, 1.24, 3.72, 12.4$

соответственно). При малых значениях f_∞ концентрирование легкого компонента становится значительным, например, при $f_\infty=0.02$ и $K_2=1.24$ минимальное значение $f=0.5 f_\infty$.

Приведенное на фиг. 2 изменение концентрации f при $r>r_+$ показывает, что при $K_2 \rightarrow 0$, когда перепад $p_{0*}/p_\infty \rightarrow \infty$, во фронте ударной волны вслед за концентрированием легко происходит все нарастающее обогащение смеси тяжелым компонентом. Соответствующее этой области решение системы (1.3) при $C \rightarrow 0$ имеет вид

$$(2.1) \quad w = \sum_{j=0}^{\infty} g_j y^{j+1/2}, \quad \theta = \sum_{j=0}^{\infty} d_j y^j, \quad f = \sum_{j=0}^{\infty} h_j y^j$$

Из уравнения диффузии следует, что коэффициент $h_0=1$, т. е. при $p_{0*}/p_\infty \gg 1$ в сферической ударной волне происходит полное разделение компонентов смеси ($f \rightarrow 1$ при $y \rightarrow 0$).

Последующие коэффициенты рядов (2.1) выражаются через d_0 , например $g_0^2 = = 2/3 (c/\gamma) F_\infty d_0^{1-n}$. Ограничиваясь в дальнейшем первыми членами разложений (2.1), для параметров потока в этой области можно записать

$$w^2 = 0.5 \left(\frac{2}{\gamma+1} \frac{T_{0*}}{T_\infty} \right)^n d_0^{1-n} F_\infty K_2 \frac{x'}{\gamma}, \quad p' = d_0 F_\infty \rho'$$

$$\rho'^2 = 2\gamma m_* \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)-n} \left(\frac{T_\infty}{T_{0*}} \right)^{1+n} \frac{x'^3}{(m_\infty d_0^{1-n} F_\infty K_2)}$$

Для плотности и давления сравнение полученных соотношений с результатами численных расчетов при $C=0.07$ представлено на фиг. 1 (кривые 3 и 4).

3. Перейдем к анализу течения во внутренней сверхзвуковой области ($r < r_+$). Течение здесь остается близким к идеальному. Отклонения становятся заметными в областях, примыкающих к критическому сечению и переднему фронту ударной волны.

Рассмотрение здесь удобнее провести в новых переменных, обезразмеренных относительно их значений в критическом сечении идеального источника, обозначенных далее индексом $*i$. Тогда вместо системы (1.3) будем иметь

$$(3.1) \quad \frac{dv}{dx} + \frac{1}{\gamma} \frac{F_{*i}}{F} \left[\frac{1}{t} \frac{dt}{dx} - \frac{1}{v} \frac{dv}{dx} + \frac{2}{x} - \frac{(1-\varepsilon)}{F} \frac{df}{dx} \right] \frac{t}{v} =$$

$$= - \frac{1}{R} \left[t^n \left(\frac{d^2 v}{dx^2} - 2 \frac{v}{x^2} \right) + n t^{n-1} \frac{dt}{dx} \left(\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} \right) \right]$$

$$t + (\gamma-1) v^2 \left(0.5 + \frac{t^n}{xR} \right) + \frac{t^n}{R} \left[\frac{3}{4\sigma_{*i}} \frac{F_{*i}}{F} \frac{dt}{dx} + \right.$$

$$\left. + (\gamma-1) v \frac{dv}{dx} \right] + 0.5(\gamma-1) \beta_{*i} \frac{F_{*i}^2}{\varepsilon} \left(\frac{f_{*i}}{F_{*i}} - \frac{f}{F} \right) t = 0.5(\gamma+1)$$

$$\frac{f_{*i}}{F_{*i}} - \frac{f}{F} = \frac{3\varepsilon}{4\sigma_{*i} F_{*i} F} \frac{t^n}{R} \left\{ f(1-f) \left[\left(\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{t} \frac{dt}{dx} - \frac{2}{x} \right) \frac{1-\varepsilon}{F} + \beta_{*i} \frac{F_{*i}}{F} \frac{1}{t} \frac{dt}{dx} \right] + \frac{\varepsilon^2 + (1-\varepsilon^2) f}{F^2} \frac{df}{dx} \right\}$$

$$x = \frac{r_{*i}}{r}, \quad v = u \left(\frac{\gamma R_0 T_{*i}}{m_{*i}} \right)^{-0.5} \quad t = \frac{T}{T}$$

$$R = 0.75 \text{Re}_{*i} = 0.75 \rho_{*i} u_{*i} r_{*i} / \mu_{*i}$$

В случае идеального газа система (3.1) имеет решение

$$(3.2) \quad \begin{aligned} x^2 &= v[0.5(\gamma+1) - 0.5(\gamma-1)v^2]^{1/(\gamma-1)}, \\ t &= 0.5(\gamma+1) - 0.5(\gamma-1)v^2, \quad f = f_{*i} \end{aligned}$$

которое в трансзвуковой области в окрестности точки $x=1$ может быть представлено в виде

$$(3.3) \quad v = 1 + \frac{2}{\sqrt{\gamma+1}}(1-x)^{0.5} + \dots, \quad t = 1 - \frac{2(\gamma-1)}{\sqrt{\gamma+1}}(1-x)^{0.5} + \dots$$

Для построения асимптотического решения в этой области в случае бинарной смеси воспользуемся методом деформируемых координат. Для однокомпонентного газа при $\mu = \text{const}$ такой подход был применен в [8]. Переходя в системе (3.1) к новым зависимым и независимым переменным

$$(3.4) \quad V = R^{1/2}(v-1), \quad G = R^{1/2}(1-t), \quad \Phi = R^{2/3}(f-f_{*i}), \quad X = R^{2/3}(1-x)$$

и устремляя $R \rightarrow \infty$, получим

$$(3.5) \quad \begin{aligned} A \frac{d^2 V}{dX^2} - (\gamma+1)V \frac{dV}{dX} + 2 &= 0, \quad G = (\gamma-1)V \\ \Phi &= \frac{0.75f_{*i}(1-f_{*i})}{Sc_{*i}} \left[\frac{1-\varepsilon}{F_{*i}} \gamma - \beta_{*i}(\gamma-1) \right] \frac{dV}{dX} \\ A &= 1 + 0.75 \frac{(\gamma-1)}{\sigma_{*i}} + 0.75 \frac{f_{*i}(1-f_{*i})}{Sc_{*i}} \left(\frac{1-\varepsilon}{F_{*i}} - \frac{\gamma-1}{2} \beta_{*i} \right) \times \\ &\times \left[\frac{1-\varepsilon}{F_{*i}} \gamma - \beta_{*i}(\gamma-1) \right] \end{aligned}$$

Интегрируя первое уравнение системы (3.5), получим

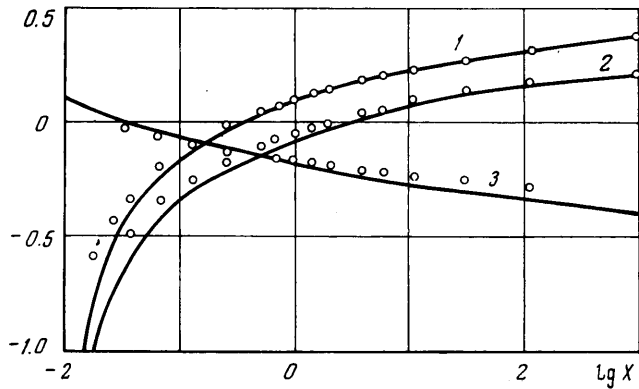
$$A \frac{dV}{dX} - \frac{\gamma+1}{2} V^2 + 2X = 0$$

Его решение выражается через бесселевы функции

$$(3.6) \quad \begin{aligned} V &= 2 \sqrt{\frac{X}{\gamma+1}} \frac{I_{-\gamma/2}(\delta) - I_{\gamma/2}(\delta)}{I_{-\gamma/2}(\delta) - I_{\gamma/2}(\delta)} \quad (X > 0), \\ V &= 2 \sqrt{\frac{|X|}{\gamma+1}} \frac{J_{-\gamma/2}(\delta) - J_{\gamma/2}(\delta)}{J_{-\gamma/2}(\delta) + J_{\gamma/2}(\delta)} \quad (X < 0) \end{aligned}$$

$$\delta = \frac{2\sqrt{\gamma+1}}{3A} |X|$$

$$V = 2 \sqrt{\frac{X}{\gamma+1}} \left(1 + \frac{0.25A}{\sqrt{\gamma+1}} \frac{1}{X^{3/2}} + \dots \right) \quad (X \rightarrow \infty)$$



Фиг. 3

При этом решение (3.6) асимптотически стремится к решению (3.3) для идеального газа. При $X \rightarrow -\infty$, так же как и в случае однокомпонентного газа [4], область определения решения будет ограничена предельной линией.

Скорость смеси в точке r_{*i} будет

$$(3.7) \quad v_{*i} = 1 + V(0)R^{-1/3}, \quad V(0) = \frac{2}{\sqrt{\gamma+1}} \left[\frac{3A}{\sqrt{\gamma+1}} \right]^{1/3} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)}$$

При сравнении полученного в п. 2 численного решения с асимптотическим (3.6) из соотношения (3.7) определяется координата критического сечения идеального источника в переменных (1.2). Действительно, при $\alpha=1$

$$T_{\infty} = 0.5(\gamma+1)T_{*i}, \quad f_{\infty} = f_{*i}, \quad v = \sqrt{0.5(\gamma+1)}w, \quad R = y_{*i}(0.5(\gamma+1))^nC$$

и для определения координаты y_{*i} из соотношения (3.7) будем иметь

$$\sqrt{0.5(\gamma+1)}w_{*i} = 1 + V(0)[y_{*i}(0.5(\gamma+1))^nC]^{-1/3}$$

При этом входящие в приведенные выше выражения коэффициенты переноса σ_{*i} , Sc_{*i} , β_{*i} будут совпадать с соответствующими значениями на бесконечности.

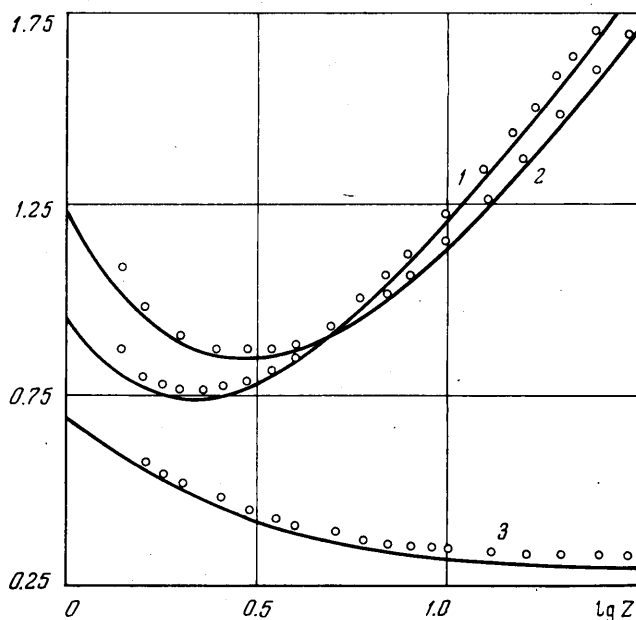
Для аргоно-гелиевой смеси сравнение асимптотического решения (3.6) (линии) с численными расчетами при $C=0.07$, $f_{\infty}=0.5$, $Sc_{\infty}=0.333$, $\sigma_{\infty}=0.431$, $\beta_{\infty}=0.377$ (точки) приведено на фиг. 3 ($1-3$ соответствует $\lg V$, $\lg G$ и $\lg \Phi$). Несмотря на относительно небольшое значение числа $Re_{\infty}=915$, совпадение вполне удовлетворительное.

В сечении $r=r_{*}$, где $M_{*}=1$, с уменьшением Re концентрация смеси f увеличивается, а скорости компонент $u_{*1} < u_{*} < u_{*2}$. Значительным становится увеличение скорости легкого компонента. Например, при $Re_{\infty}=10$ она более чем в 2 раза превышает критическую скорость смеси.

Перейдем к рассмотрению гиперзвуковой области течения. В случае идеального газа для параметров потока в ней справедливы следующие из (3.2) разложения

$$(3.8) \quad v = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - \frac{1}{\sqrt{\gamma^2-1}} \left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right]^{1/2(\gamma-1)} x^{2(\gamma-1)} + \dots,$$

$$t = \left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right]^{1/2(\gamma-1)} x^{2(\gamma-1)} + \dots$$



Фиг. 4

Для построения асимптотического решения системы (3.1) в гиперзвуковой области течения перейдем в ней к новым переменным

$$W = (v - \sqrt{(\gamma+1)/(\gamma-1)})R^\lambda, \quad \Theta = tR^\lambda, \quad \Psi = (f - f_{*i})R^\lambda \\ Z = xR^\omega, \quad \omega = [2\gamma - 1 - 2(\gamma-1)n]^{-1}, \quad \lambda = 2\omega(\gamma-1)$$

После замены и устремления $R \rightarrow \infty$ получим

$$\frac{dW}{dZ} + nw_0 \frac{\Theta^{n-1}}{Z} \frac{d\Theta}{dZ} - \frac{2w_0\Theta^n}{Z^2} = -\frac{1}{\gamma w_0} \left[\frac{d\Theta}{dZ} + \frac{2\Theta}{Z} \right]$$

$$\Theta + (\gamma-1)w_0 \left(W + \frac{w_0}{Z} \Theta^n \right) = 0, \quad w_0^2 = \frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)}$$

$$\Psi = \frac{0.75\varepsilon f_{*i}(1-f_{*i})}{Sc_{*i}F_{*i}} \left(\frac{1-\varepsilon}{F_{*i}} - \beta_{*i} \right) \Theta^{n-1} \frac{d\Theta}{dZ}$$

Полученная система уравнений разделилась и содержит в себе решение для однокомпонентного газа [9]. Используя его, получим при $n \neq 1$

$$\Theta = \left\{ \frac{w_0^2 \gamma (\gamma-1) (1-n)}{[2\gamma-1-2n(\gamma-1)]Z} + \theta_1^{1-n} Z^{2(\gamma-1)(1-n)} \right\}^{1/(1-n)}$$

$$W = -\frac{\Theta}{w_0(\gamma-1)} - \frac{w_0\Theta^n}{Z}, \quad \theta_1 = \left[\frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)} \right]^{1/2(\gamma-1)}$$

$$\Psi = \frac{0.75\varepsilon f_{*i}(1-f_{*i})}{Sc_{*i}F_{*i}(1-n)} \left(\frac{1-\varepsilon}{F_{*i}} - \beta_{*i} \right) \times$$

$$\times \left\{ 2(\gamma-1)(1-n)\theta_1^{1-n} Z^{2(\gamma-1)(1-n)-1} - \frac{w_0^2 \gamma (\gamma-1) (1-n)}{[2\gamma-1-2n(\gamma-1)]Z^2} \right\} \Theta^{2n-1}$$

При $Z \rightarrow \infty$ решение (3.9) асимптотически стремится к решению (3.8) для идеального газа. При конечном значении $Z_+ > 0$, соответствующем

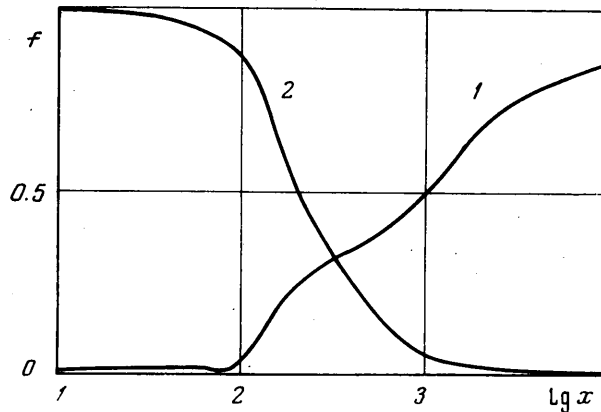
области переднего фронта замыкающего скачка уплотнения, функция Θ достигает своего минимального значения Θ_+ . Аналогичным образом изменяется функция $-W$. Для аргоно-гелиевой смеси указанные особенности иллюстрируются фиг. 4, на которой асимптотическое решение (3.9) (линии) сравнивается с численными расчетами при $C=0.07$, $f_\infty=0.5$, $Sc_\infty=0.333$, $\sigma_\infty=0.431$, $\beta_\infty=0.377$ (точки), кривые 1–3 соответствуют $\lg \Theta$, $\lg (-W)$, $\lg \Psi$.

4. До сих пор сферическое расширение бинарной смеси газов в затопленное пространство рассматривалось при нулевом диффузионном потоке в бесконечно удаленной точке. В этом случае

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{f_\infty}{F_\infty} = \frac{fu_1}{(Fu)}, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{u_1}{u} \right) = 1$$

и, как показывают расчеты, концентрация в критическом сечении сферического источника мало отличается от f_∞ .

Последнее условие будет нарушено при наличии диффузионного потока в бесконечно удаленной точке. Например, для аргоно-гелиевой смеси при $f_\infty=0.9$ и



Фиг. 5

$Q_1/Q=0.1$ $f_{*1}=0.011$ и рассматриваемый случай будет соответствовать истечению гелия с незначительным содержанием аргона в пространство, заполненное аргоном с небольшой примесью гелия. Распределение концентрации f в таком течении при $Re_* = 453$ приведено на фиг. 5 (кривая 1).

Аналогичным образом может быть рассмотрен случай истечения аргона с незначительным содержанием гелия в пространство, заполненное гелием с небольшой примесью аргона. При $f_\infty=0.02$ и $Q_1/Q=0.999$ $f_{*1}=0.99$ и соответствующее этому случаю распределение концентрации f при $Re_* = 78.5$ приведено на той же фигуре (кривая 2).

Результаты проведенных расчетов показывают, что в обоих случаях газ окружающего пространства не проникает через ударную волну в сверхзвуковую область течения. В простейшем случае, когда истекающий и окружающий газы были идентичными по своим молекулярным свойствам, указанное выше свойство отмечалось в [10].

Поступила 5 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Muntz E. P., Hamel B. B. Rarefaction phenomena in gas and isotope separations. Rarefied Gas Dynamics Proc. 9-th Intern. Sympos. Göttingen, 1974, vol. 1, Porz – Wahn, 1974.
2. Гусев В. Н., Жбакова А. В. Особенности сферического расширения вязкого газа в затопленное пространство. Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 4.
3. Чепмен С., Каулинэ Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.

4. Gusev V. N., Zhabkova A. V. The flow of a viscous heat-conducting compressible fluid into a constant pressure medium. Rarefied Gas Dynamics, vol. 1. New York – London, 1969.
5. Гусев В. Н., Михайлов В. В. О подобии течений с расширяющимися струями. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 4.
6. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
7. Нагорных Ю. Д. О течении смеси легкого и тяжелого газов за сферической ударной волной. В сб. «Газодинамика и физическая кинетика». Новосибирск, 1974.
8. Sakurai A. Three-dimensional steady, radial flow of viscous, heat-conducting, compressible fluid. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1958, vol. 11, pt 3.
9. Freeman N. C., Kumar S. On the solution the Navier – Stokes equations for a spherically symmetric expanding flow. J. Fluid Mech., 1972, vol. 56, pt 3.
10. Сквородко П. А., Чекарев С. Ф. О диффузии газа в сверхзвуковую струю низкой плотности. В сб. «Динамика разреженных газов». Новосибирск, 1976.