МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1978

УДК 533.6.011

К УСТОЙЧИВОСТИ ДОЗВУКОВЫХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Ф. А. СЛОБОДКИНА

(Москва)

В статье анализируется система дифференциальных уравнений, описывающих малые возмущения стационарного течения совершенного невязкого газа в канале переменного сечения. Уравнения нестационарного течения и граничные условия линеаризуются, и решение линеаризованных уравнений ищется в виде $v(x)\exp\lambda t$, где $v(x)$ – собственная функция, а λ – собственная частота изучаемой краевой задачи. При таком подходе задача сводится к нахождению решения обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, зависящими от параметра λ. Получены аналитические решения этой системы для малых значений λ и для значений $|\lambda|\gg1$. Результаты могут быть использованы для вычисления роста высокочастотных и низкочастотных возмущений, наложенных на дозвуковое, сверхзвуковое и смешанное (т. е. с переходами через скорость звука) газодинамические течения, для анализа устойчивости дозвуковых участков и для проверки и дополнения различных численных методов расчета неустановившихся течений и численных методов исследования устойчивости в газовой динамике.

Применение найденных решений для малых и больших λ демонстрируется на исследовании устойчивости течения за ударной волной (в данной постановке – прямым скачком уплотнения). Получены аналитические выражения для определения λ, из которых следует, что устойчивость течения за скачком существенно зависит от формы канала в месте расположения скачка в стационарном течении, что отмечалось ранее в [1], а также от условий отражения малых возмущений в выходном сечении канала, на что впервые было обращено внимание в [2].

В настоящее время имеется довольно много работ [1–8], посвященных устойчивости течения за скачком уплотнения при наличии различных ограничивающих предположений, в частности при отсутствии отражения волн малых возмущений от выходного сечения канала [3] или при отсутствии отражения одной из волн [6], при условии, что канал квазицилиндричен [5–7], или при условии, что число Маха близко к единице [8], и т. д. Развитые в [6–8] численные методы построения области устойчивости при постоянных коэффициентах отражения малых возмущений от сечения выхода могут быть дополнены аналитическими результатами, полученными в настоящей работе. В [6] имеется обзор работ, посвященных устойчивости течений за скачком.

1. Рассмотрим в одномерном приближении нестационарное течение невязкого нетеплопроводного совершенного газа в канале, площадь поперечного сечения которого y – заданная функция координаты x, отсчитываемой вдоль оси канала. Вектор скорости по направлению совпадает с осью x. Пусть ρ_0, u_0, p_0 – плотность, скорость и давление газа, γ – отношение теплоемкостей, t – время.

В принятых предположениях уравнения неразрывности, движения и энергии имеют вид [1, 2]

$$y\frac{\partial\rho_0}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho_0u_0y)=0$$

$$\rho_0\frac{\partial u_0}{\partial t}+\rho_0u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial p_0}{\partial x}=0 \tag{1.1}$$

$$y\frac{\partial p_0}{\partial t}+u_0 y\frac{\partial p_0}{\partial x}+\gamma p_0\frac{\partial}{\partial x}(u_0 y)=0$$

Будем исследовать поведение малых возмущений некоторого стационарного решения системы (1.1). Предположим, что эволюция малых возмущений описывается системой дифференциальных уравнений, полученной линеаризацией системы (1.1) по малым нестационарным отклонениям газодинамических параметров от стационарных значений.

Представим каждый газодинамический параметр в виде суммы соответствующей стационарной величины и малого нестационарного отклонения $v_0(x, t)=V(x)+v_n(x, t)$, где под $v_0(x, t)$ будем понимать вектор-функцию с компонентами ρ_0, u_0, p_0, а под $V(x)$ и $v_n(x, t)$ — ее стационарное значение и малое нестационарное возмущение соответственно.

Считая стационарное решение $V(x)$ известным, запишем линейную систему уравнений с переменными коэффициентами для определения $v_n(x, t)$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t}+\frac{(Uy)'}{y}\rho_n+U\frac{\partial \rho_n}{\partial x}+\frac{(Ry)'}{y}u_n+R\frac{\partial u_n}{\partial x}=0$$

$$UU'\rho_n+R\frac{\partial u_n}{\partial t}+RU'u_n+RU\frac{\partial u_n}{\partial x}+\frac{\partial p_n}{\partial x}=0 \tag{1.2}$$

$$\left(P'+\gamma P\frac{y'}{y}\right)u_n+\gamma P\frac{\partial u_n}{\partial x}+\frac{\partial p_n}{\partial t}+\gamma\frac{(Uy')}{y}p_n+U\frac{\partial p_n}{\partial x}=0$$

Здесь штрихом обозначена производная по x.

Будем искать решение системы (1.2) в виде

$$v_n(x, t)=v(x)\exp\lambda t \tag{1.3}$$

где λ — собственные значения краевой задачи, $v(x)$ — соответствующие значениям λ собственные функции. Как следует из [9], рост $v_n(x, t)$ при $t\to\infty$ определяется наибольшим положительным собственным значением λ.

Подставив (1.3) в (1.2), получим систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которую запишем в матричной форме

$$B\,dv/dx+(C+\lambda E)v=0 \tag{1.4}$$

Здесь B, C, E — квадратные матрицы третьего порядка, E — единичная матрица, а матрицы B и C имеют вид

$$B=\begin{pmatrix} U & R & 0\\ 0 & U & R^{-1}\\ 0 & \gamma P & U\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} (Uy)'y^{-1} & (Ry)'y^{-1} & 0\\ UU'R^{-1} & U' & 0\\ 0 & P'+\gamma Py'y^{-1} & \gamma(Uy)'y^{-1}\end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Решение задачи теперь сводится к решению системы (1.4). Поскольку общих методов решения такой системы при произвольном λ нет, будем искать решение для двух предельных значений параметра λ: $|\lambda|\ll 1$ и $|\lambda|\gg 1$, для которых может быть получено аналитическое выражение для $v(x)$.

2. Рассмотрим случай $|\lambda|\ll 1$. Представим решение системы (1.4) в виде ряда по степеням λ

$$v(x)=v^{(0)}(x)+\lambda v^{(1)}(x)+\lambda^2 v^{(2)}(x)+\dots \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в (1.4) и приравнивая члены с одинаковыми степенями λ, получим последовательность систем дифференциальных уравнений для определения нулевого и последующих приближений $v^{(0)}(x)$, $v^{(1)}(x),\ldots$

$$Bdv^{(0)}/dx+Cv^{(0)}=0,\quad Bdv^{(i)}/dx+Cv^{(i)}=-Ev^{(i-1)}\quad (i=1,\ 2,\ldots) \tag{2.2}$$

Система уравнений для нулевого приближения $v^{(0)}$ представляет собой систему линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений, а система уравнений для i-го приближения — неоднородную систему, правая часть которой определяется решением, найденным на предыдущем шаге. Общее решение системы (2.2) представляет собой сумму общего решения однородной системы уравнений одинаковой для всех $i=0,\ 1,\ 2,\ldots$ и частного решения неоднородной системы, которое может быть найдено методом вариации постоянных.

Таким образом, задача нахождения всех приближений $v^{(i)}(x)$ сведется к квадратурам, если будет найдено общее решение однородной системы (2.2), представляющее собой линейную комбинацию трех частных линейно-независимых решений.

Предположение о малости λ позволяет получить решение однородной системы уравнений (2.2) как разность двух близких стационарных решений системы (1.1), так как однородная система (2.2) получается из (1.4) при $\lambda=0$

$$\begin{gathered}\rho^{(0)}(x)=R(x)(\alpha_1-\alpha_2-l_1\alpha_3),\quad u^{(0)}(x)=U(x)(\alpha_2+l_1\alpha_3)\\ p^{(0)}(x)=P(x)(\alpha_1+\alpha_2+l_2\alpha_3),\quad l_1=(M^2-1)^{-1},\ l_2=\\ =-l_1[1+(\gamma-1)M^2]\\ M^2=U^2R/\gamma P\end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь α_1, α_2, α_3 — произвольные постоянные, подлежащие определению из граничных условий линеаризованной задачи, M — число Маха.

Непосредственной подстановкой проверяется, что (2.3) обращает однородные уравнения (2.2) в тождество.

Частное решение неоднородного уравнения находится методом вариации постоянных и выражается в виде интегралов от функций, зависящих от скорости и числа Маха в стационарном течении, а также от α_i. Их конкретный вид не приводится здесь из-за громоздкости выражений. Решение с учетом первого приближения можно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered}\rho(x)=R(x)(\alpha_1-\alpha_2-l_1\alpha_3+\lambda\rho_*^{(1)}+\ldots)\\ u(x)=U(x)(\alpha_2+l_1\alpha_3+\lambda u_*^{(1)}+\ldots)\\ p(x)=P(x)(\alpha_1+\alpha_2+l_2\alpha_3+\lambda p_*^{(1)}+\ldots)\end{gathered} \tag{2.4}$$

где $\rho_*^{(1)}$, $u_*^{(1)}$, $p_*^{(1)}$ — частные решения неоднородной системы уравнений.

3. Предположим теперь, что $|\lambda|\gg1$. В этом случае система уравнений (1.4) содержит малый параметр $1/\lambda=\varepsilon$ и ее решение согласно [10] может быть представлено в виде ряда по ε

$$v(x)=[v^{(0)}(x)+\varepsilon v^{(1)}(x)+\ldots]\exp\int h(x)\,dx \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в (1.4) и приравнивая члены с одинаковыми степенями ε, получим в данном случае последовательность систем линейных алгебраических уравнений для определения $v^{(0)}(x)$, $v^{(1)}(x),\ldots$ В матричной форме эти уравнения имеют вид

$$(3.2) \qquad (B\varepsilon h+E)v^{(0)}=0$$

$$(3.2) \qquad (B\varepsilon h+E)v^{(i)}=-\left(Cv^{(i-1)}+B\frac{dv^{(i-1)}}{dx}\right) \quad (i=1,2,3,\ldots)$$

Матрицы B и C здесь те же, что и в (1.5).

Система однородных алгебраических уравнений (3.2) для определения $v^{(0)}$ имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю. Из этого условия находится значение $(h\varepsilon)$ и соответственно решение $v^{(0)}$ с точностью до произвольной функции $f(x)$. В рассматриваемой задаче получается три значения для $h\varepsilon$ и, следовательно, три значения для $v^{(0)}$

$$(3.3) \qquad (\varepsilon h)_1=[U(x)]^{-1}, \quad (\varepsilon h)_{2,3}=[U(x)\pm A(x)]^{-1}, \quad A(x)=\sqrt{\gamma P/R}$$

$$v_1^{(0)}=(f_1,0,0), \quad v_{2,3}^{(0)}=(f_{2,3};\ \pm Af_{2,3}/R;\ A^2f_{2,3})$$

Произвольные функции $f_k(x)$ определяются с точностью до произвольной постоянной из условия совместности системы уравнений (3.2) для первого приближения и имеют вид

$$(3.4) \qquad f_1=\frac{R(x)}{R(0)}, \qquad f_{2,3}=\left[\frac{A_3(0)R(x)}{A^3(x)R(0)}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\exp-\int_0 \frac{(\gamma+1)U'y+y'(\gamma U\pm A)}{2(U\pm A)}dx$$

В формулах (3.3) и (3.4) знак плюс соответствует решению с индексом 2, минус — решению с индексом 3.

Если ограничиться только нулевым приближением, то решение записывается в виде

$$(3.5) \qquad \begin{aligned} \rho(x)&=\alpha_1\rho_1\exp\lambda I_1+\alpha_2\rho_2\exp\lambda I_2+\alpha_3\rho_3\exp\lambda I_3\\ u(x)&=\alpha_2u_2\exp\lambda I_2+\alpha_3u_3\exp\lambda I_3\\ p(x)&=\alpha_2p_2\exp\lambda I_2+\alpha_3p_3\exp\lambda I_3\end{aligned}$$

$$I_1=-\int_0^x U^{-1}\,dx, \qquad I_{2,3}=-\int_0^x (U\pm A)^{-1}\,dx$$

Здесь α_1, α_2, α_3 — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий.

Решение при больших λ подробно изучалось в [3] для магнитогазодинамических течений. Для рассматриваемой здесь задачи следующее приближение, так же как и нулевое, может быть получено из решений [3] при напряженности электромагнитного поля, равной нулю.

4. Перейдем к рассмотрению граничных условий. При дозвуковом течении во всем канале или в некоторой его части в дополнение к системе уравнений (1.1) должны быть заданы три граничных условия, причем два условия должны быть заданы во входном сечении канала или в сечении, где происходит переход к дозвуковой скорости, и одно условие — в выходном сечении канала или в сечении, где происходит переход к сверхзвуковой скорости.

При решении задачи на устойчивость в предположении о малости нестационарных величин $v_n(x, t)$ граничные условия линеаризуются. В линеаризованные условия подставляются решения (2.4) или (3.5) с неизвестными постоянными α_1, α_2, α_3, для нахождения которых получается система трех линейных однородных алгебраических уравнений. Нетривиальное решение этой системы существует тогда и только тогда, когда определитель матрицы, составленной из коэффициентов при α_i, равен нулю. Равенство нулю определителя представляет собой условие для нахождения λ.

Предположим, что течение в канале дозвуковое от сечения входа до сечения выхода. Введем безразмерные переменные так, что в сечении входа $x=0$, а в сечении выхода $x=1$. Граничные условия зададим в виде

$$\chi\left(\rho, u, p, \frac{\partial\rho}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial\rho}{\partial x}, \ldots\right)=0, \qquad (x=0)$$

$$\varphi\left(\rho, u, p, \frac{\partial\rho}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial\rho}{\partial x}, \ldots\right)=0 \qquad (x=0)$$

$$\psi\left(\rho, u, p, \frac{\partial\rho}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial\rho}{\partial x}, \ldots\right)=0 \qquad (x=1)$$

Здесь χ, φ, ψ — известные функции своих аргументов. Линеаризуя их, получим

$$(\chi_\rho\rho+\chi_u u+\chi_p p)_a=0, \qquad (\varphi_\rho\rho+\varphi_u u+\varphi_p p)_a=0$$
$$(4.1)\qquad (\psi_\rho\rho+\psi_u u+\psi_p p)_b=0$$

Нижними индексами ρ, u, p обозначены соответствующие частные производные, а индексами a и b — входное и выходное сечения канала. Если χ, φ, ψ не зависят от частных производных по времени от параметров течения, то коэффициенты в уравнениях (4.1) не будут зависеть от λ, в противном случае граничные условия будут зависеть от параметра λ.

Подставляя в (4.1) решение (2.4) и приравнивая нулю определитель при α_i, получим при $\operatorname{Re}\lambda<0$ условие устойчивости дозвукового течения при малых λ, а при подстановке решения (3.5) — условие устойчивости для больших λ.

Предположим теперь, что дозвуковая часть течения, исследуемого на устойчивость, образуется между ударной волной (прямым скачком уплотнения) и сечением выхода из канала.

Тогда в качестве граничных условий имеем три закона сохранения на скачке уплотнения и по-прежнему одно условие в выходном сечении канала. Будем считать, что в стационарном положении скачок расположен в сечении $x=0$. Примем за характерные величины скорости — U_+ (скорость в стационарном течении за скачком), плотности — R_+ (плотность в стационарном течении за скачком), давления — $R_+U_+^2$, длины — L (длина канала от $x=0$ до выходного сечения), времени — L/U_+. Введем безразмерные переменные с использованием перечисленных величин, линеаризуем условия на ударной волне, перенося их в сечение $x=0$ и считая скорость смещения скачка $\delta=\xi\lambda\exp\lambda t$ малой величиной, получим

$$\rho_+ + u_+ - \lambda\xi K g=0, \quad \rho_+ + 2u_+ + p_+ + \xi K (y'/y)^+ = 0$$
$$(4.2)\qquad -\rho_+ + (\gamma-1)M_+^2 u_+ + \gamma M_+^2 p_+ + \lambda\xi K(\gamma-1)M_+^2=0 \quad (x=0)$$
$$K=\frac{2(1-M_+^2)}{(\gamma+1)M_+^2}, \qquad g=\frac{(\gamma+1)M_+^2}{2+(\gamma-1)M_+^2}$$

Индекс плюс приписан параметрам за ударной волной. Получение условий (4.2) подробнее описано в [2]. Как следует из (4.2), условия на ударной волне представляют собой пример граничных условий, зависящих от λ.

На выходе из канала выполняется

$$(4.3)\qquad (\psi_\rho\rho+\psi_u u+\psi_p p)_b=0,\quad x=1$$

Подставляя в (4.2), (4.3) решение уравнений (1.4), получим условие устойчивости течения за ударной волной. Отметим, что здесь имеются четыре произвольные постоянные α_1, α_2, α_3, ξ и четыре граничных условия для их определения (4.2), (4.3).

Если коэффициенты ψ_ρ, ψ_u, ψ_p в (4.3) зависят от λ таким образом, что при малых λ они могут быть представлены в виде рядов по λ, то при решении краевой задачи в этих разложениях можно ограничиться конечным числом членов. В этом случае уравнение для определения λ будет полиномом, степень которого зависит от числа приближений, использованных при нахождении решения $v(x)$, а также от числа членов в разложении коэффициентов в (4.3) в ряд по λ. Если граничное условие на выходе таково, что функции $\psi_\rho,\ldots$ в ряд не разлагаются, то уравнение для λ будет трансцендентным, сложность которого определяется зависимостью коэффициентов в (4.3) от λ.

Выражение для λ при $|\lambda|\ll 1$ с использованием только нулевого приближения (2.3) и при постоянных коэффициентах в (4.3) имеет вид

$$(4.4)\qquad \begin{aligned}
&\lambda=-(y'/y)_+k_0Y_1/Y_2\\
&Y_1=(\psi_\rho R-\psi_u U+\psi_p Pk_4)_b,\quad Y_2=(\psi_\rho R)_bk_1-(\psi_u U)_bk_2+(\psi_p P)_bk_3\\
&k_0=\gamma[1+(\gamma-1)M_+^2/2]>0,\quad k_1=(1+\gamma M_+^2)-\gamma(1-M_b^2)\\
&k_2=1+\gamma M_+^2-(\gamma-1)(1-M_b^2)/2>0\\
&k_3=(1+\gamma M_+^2)[1+(\gamma-1)M_b^2]-(1-M_b^2)>0\\
&k_4=1+(\gamma-1)M_b^2>0
\end{aligned}$$

Если скачок расположен настолько близко к выходному сечению канала, что решение не успевает существенно измениться и можно считать $M_+=M_b$, формула (4.4) после простых алгебраических преобразований совпадает с формулой (2.3) работы [2]. В этом случае коэффициенты $k_1=2\gamma M_+^2-(\gamma-1)>0$, $k_2=[(3\gamma-1)M_+-(\gamma-3)]/2>0$, $k_3=\gamma M_+^2[2+(\gamma-1)\cdot M_+^2]>0$.

Условием устойчивости в рассматриваемом приближении является условие $\lambda<0$. Как следует из формулы (4.4), устойчивость течения определяется сомножителем $(y'/y)_+$, т. е. тем, где расположен скачок в стационарном течении в расширяющейся или сужающейся части канала, а также соотношениями между коэффициентами ψ_ρ, ψ_u, ψ_p, которые характеризуют условия отражения возмущений от выходного сечения канала. Влияние параметров стационарного течения от $x=0$ до $x=1$ на устойчивость заключено в коэффициентах $k_0,\ldots,k_4$, которые зависят от числа Маха за ударной волной и на выходе из канала. Для скачка уплотнения, расположенного в расширяющейся части канала, условие устойчивости течения принимает вид

$$(4.5)\qquad Y_1Y_2>0,\quad (y'/y)_+>0$$

Условие устойчивости течения со скачком уплотнения, расположенным в сужающейся части канала, получится в виде

$$(4.6)\qquad Y_1Y_2<0,\quad (y'/y)_+<0$$

Наиболее простой вид условие устойчивости приобретает, если предположить, что один из коэффициентов отражения равен нулю, например $\psi_\rho=0$. Тогда течение в сужающемся канале устойчиво, если отношение $(\psi_u U/\psi_p P)=l$ удовлетворяет неравенству $k_3/k_2<l<k_4$. Если же величина l удовлетворяет неравенствам $l<k_3/k_2$, $l>k_4$, то скачок устойчив в расширяющейся части канала. При выполнении равенства $l=k_4$ имеем нейтральный случай $\lambda=0$, т. е. уровень начальных возмущений в канале сохраняется и в принятом приближении это означает переход на другой, близкий к исходному, стационарный режим. Результат исследования при $\lambda=0$ может быть уточнен при помощи (2.4).

Рассмотрим несколько конкретных примеров условия (4.3). Пусть в выходном сечении канала задано давление. Тогда имеем $p_b=0$ $(x=1)$. Подставляя в это равенство решение (2.3), получим $P_b(\alpha_1+\alpha_2+l_2\alpha_3)_b=0$. Выражения для Y_1 и Y_2 при этом имеют вид

$$Y_1=1+(\gamma-1)M_b^2>0, \qquad Y_2=\gamma[M_+^2+M_b^2+(\gamma-1)M_+^2M_b^2]>0$$

Таким образом, в соответствии с (4.5) при заданном давлении на выходе течение устойчиво в том случае, если скачок в стационарном положении расположен в расширяющейся части канала, в сужающейся части канала скачок неустойчив. При фиксированном числе Маха на выходе условие (4.3) записывается в форме

$$\left(\frac{2u}{U}+\frac{\rho}{R}-\frac{p}{P}\right)_b=0, \qquad x=1$$

Выражения для Y_1 и Y_2 имеют вид

$$Y_1=1, \qquad Y_2=1+\gamma M_+^2>0$$

т. е. условие устойчивости оказывается таким же, как и в предыдущем случае.

Пусть в выходном сечении канала отсутствует отражение возмущений. Для аналитической формулировки этого условия выпишем в линеаризованном виде выражения для аналогов инвариантов Римана

$$w_1=-u+\frac{A}{\gamma-1}\left(\frac{p}{P}-\frac{\rho}{R}\right), \qquad w_2=u+\frac{A}{\gamma-1}\left(\frac{p}{P}+\frac{\rho}{R}\right)$$

$$w_3=\frac{p}{P}-\gamma\frac{\rho}{R}$$

Величины w_i характеризуют связь параметров в волнах, распространяющихся вниз (w_2, w_3) и вверх (w_1) по течению. Условие отсутствия отражения в выходном сечении канала соответствует равенству $w_1=0$, $x=1$, что при использовании решения (2.3) дает

$$Y_1=(\gamma-1)M_b>0, \qquad Y_2=[2-(\gamma-1)M_b](1-M_b)+2M_b(1+\gamma M_+^2)>0$$

Отсюда условие устойчивости снова получается таким же, как и в предыдущих двух случаях.

Если в выходном сечении канала фиксируется расход, то получим $\lambda=0$, т. е. имеем нейтральный случай.

Заметим, что в [1–3, 6–8], где рассматривались аналогичные условия в выходном сечении канала при иных предположениях при получении решений, заключения об устойчивости такие же.

Используем теперь для исследования устойчивости решение, полученное при $|\lambda|\gg1$. При этом в граничных условиях (4.2) на ударной волне во втором уравнении можно пренебречь членом, содержащим ξ, как малым по сравнению с остальными. В других уравнениях члены, содержащие ξ, умножаются на λ и ими уже пренебречь нельзя.

Подставляя решение (3.5) в (4.2) и (4.3), получим уравнение для нахождения λ в виде

$$-2d_1(M_+^2-1)^2+d_2M_+(M_+-1)^2(M_+-\omega)+$$
$$+d_3M_+(M_++1)^2(M_++\omega)=0$$
$$d_1=(\psi_\rho f_1\exp\lambda I_1)_b, \quad d_2=[(\psi_\rho+\psi_uA/R+\psi_pA^2)f_2\exp\lambda I_2]_b \tag{4.7}$$
$$d_3=[(\psi_\rho-\psi_uA/R+\psi_pA^2)f_3\exp\lambda I_3]_b, \qquad \omega=(3-\gamma)/2(\gamma-1)$$

Уравнение (4.7) представляет собой трансцендентное уравнение относительно λ (даже при условии, что ψ_ρ, ψ_u, ψ_p не зависят от λ). Если же коэффициенты в (4.3) зависят от λ, то уравнение (4.7) станет более сложным. Тем не менее для каждого конкретного канала и вида граничного условия (4.3) интегралы I_1, I_2, I_3 и f_2, f_3 могут быть вычислены и соответственно получены значения для λ.

Уравнение (4.7) упростится, если снова предположить, что $\psi_\rho=0$, а ψ_u и ψ_p — действительные числа. Тогда для λ можно выписать явное выражение

$$\lambda = k^{-1}\ln|\pi(1+l)/(1-l)|, \qquad k=\int_0^1 \frac{2A\,dx}{A^2-U^2}>0$$

$$\pi=\frac{(M_+-1)(M_+-\omega)(M_b-1)}{(M_++1)(M_++\omega)(M_b+1)}, \qquad l=\left(\frac{\psi_u}{\psi_pAR}\right)_b$$

Для дозвукового течения $k>0$, поэтому условием устойчивости течения является условие $|\pi(1+l)/(1-l)|<1$. Отсюда получаем, что течение устойчиво в том случае, если коэффициент l удовлетворяет неравенствам

$$l>\frac{(1+|\pi|)}{(1-|\pi|)}, \qquad l<\frac{(1-|\pi|)}{(1+|\pi|)}, \qquad |\pi|<1 \tag{4.8}$$

При фиксированном давлении в выходном сечении канала имеем $l=0$ и стационарное течение за скачком оказывается устойчивым, так как $|\pi|<1$.

Из анализа устойчивости по отношению к высокочастотным возмущениям следует, что устойчивость течения со скачком не зависит явно от формы канала в месте расположения скачка в стационарном течении, а определяется только условиями отражения возмущений от выходного сечения и параметрами стационарного течения от $x=0$ до $x=1$, от которых зависят величины интегралов в (4.7).

Пользуясь уравнениями (4.4) и (4.7), можно построить на плоскости $(\psi_\rho R/\psi_pP,\ \psi_uU/\psi_pP)$ области устойчивости для конкретных стационарных течений за скачком, но в данном случае формулы для определения λ настолько просты, что для анализа устойчивости удобнее пользоваться ими, а не графическим материалом.

В заключение автор благодарит А. Г. Куликовского и А. Н. Секундова за полезные обсуждения работы.

Поступила 25 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Fundamentals of gas dynamics. Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press., 1958. (рус. перев.: Основы газовой динамики. М., Изд-во иностр. лит., 1963.)
2. *Слободкина Ф. А.* Об устойчивости скачка уплотнения в магнитогазодинамических течениях в каналах. ПМТФ, 1970, № 1.
3. *Слободкина Ф. А.* Устойчивость квазиодномерных магнитогидродинамических течений. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
4. *Губарев А. В., Дегтярев Л. М., Фаворский А. П.* Некоторые особенности сверхзвукового течения электропроводного газа в МГД канале. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.
5. *Глазнев В. Н.* Устойчивость течения за ударной волной, расположенной в канале переменного сечения. Изв. СО АН СССР, Сер. техн. н., 1973, № 13, вып. 3.
6. *Гринь В. Т., Крайко А. Н., Тилляева Н. И.* Исследование устойчивости течения идеального газа в квазицилиндрическом канале. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
7. *Гринь В. Т., Крайко А. Н., Тилляева Н. И.* Об устойчивости течения идеального газа в канале с замыкающим скачком уплотнения при одновременном отражении от сечения выхода акустических и энтропийных волн. ПММ, 1976, т. 40, вып. 3.
8. *Крайко А. Н., Широносов В. А.* Исследование устойчивости течения в канале с замыкающим скачком уплотнения при околозвуковой скорости потока. ПММ, 1976, т. 40, вып. 4.
9. *Брушлинский К. В.* О росте решения смешанной задачи в случае неполноты собственных функций. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1957, т. 23, № 6.
10. *Хединг Дж.* Введение в метод фазовых интегралов. М., «Мир», 1965.