

РАСЧЕТ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ КРЫЛЬЕВ
С УЧЕТОМ СХОДЯЩИХ С КРОМОК ТАНГЕНЦИАЛЬНЫХ
РАЗРЫВОВ В РАМКАХ МОДЕЛИ, ИСПОЛЬЗУЮЩЕЙ СИСТЕМУ
УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА

А. Н. МИНАЙЛОС

(Москва)

Для численного метода сквозного счета предложен алгоритм формирования схода тангенциального разрыва с острой кромки.

Исследование обтекания крыльев при больших числах Рейнольдса возможно в постановке, использующей уравнения движения вязкого газа, так как вязкость существенна только в пограничном слое у поверхности крыльев и в слоях смешения, окружающих сходящие с кромок тангенциальные разрывы. Как правило, в таких исследованиях рассматривается потенциальное течение (см. обзоры [1, 2]).

Потенциальный разрыв аппроксимируется в расчетах системой дискретных точечных вихрей. Ввиду некорректной математической постановки в численном исследовании приходится использовать методы с эффективной «схемной» вязкостью либо применять «искусственную» вязкость [3]. На сверхзвуковых скоростях, если углы атаки крыла не малы, становится существенной нелинейность, наличие в поле течения ударных волн. Для учета этих эффектов необходимо использовать полную систему уравнений Эйлера.

В статье предлагается описывать сходящий с кромки крыла тангенциальный разрыв как область больших градиентов обобщенного («слабого») решения в поле непрерывных параметров течения. При таком подходе слабые и сильные разрывы, в том числе тангенциальные разрывы и ударные волны, описываются в рамках методов сквозного счета. При этом математических некорректностей типа Адамара в постановке задачи не возникает, схемы течения не вводятся априори, а определяются как результат решения задачи из анализа полученного поля течения. Такой подход может использоваться во всем диапазоне изменения чисел M_∞ . Для качественного описания особенностей течения желательно, чтобы конечно-разностная схема метода сквозного счета обладала свойством монотонности и повышенным порядком точности аппроксимации по некоторым направлениям [4].

Ниже рассмотрен наиболее простой с точки зрения постановки задачи для метода сквозного счета случай стационарного обтекания тонкого крыла сверхзвуковым потоком. Простота постановки обусловлена двумя факторами: наличие сверхзвуковой компоненты скорости вдоль одной из координат всюду в поле течения, в том числе и в пределах вихревого шнура, позволяет решать задачу «маршевым» методом вдоль этой координаты и держать в памяти машины только двумерные массивы параметров одного слоя; область решения конечна, она ограничена зоной возмущений, и граничными условиями служат параметры набегающего потока.

В [4] выдвинуто предположение о том, что необходимым условием существования тангенциального разрыва, сходящего с кромки крыла, является перетекание вязкого потока с наветренной (нижней) стороны крыла через его кромку (при сверхзвуковых скоростях потока это требование выполняется не всегда).

При расчете большого числа вариантов течений у треугольных и трапециевидных пластин в [4] были определены (хотя и достаточно грубо) границы области, в которой выполняется необходимое условие существования разрыва на кромке. Для крыльев с плоской нижней поверхностью граница этой области зависит от числа M_∞ , угла атаки α и угла стреловидности кромки χ . Обозначим эту область через $D(M_\infty, \alpha, \chi)$. Область параметров течения, где разрыв на кромке и вихрь над крылом в численном решении возникают под действием диссипативных свойств используемой конечно-разностной схемы, обозначим через $D_1(M_\infty, \alpha, \chi)$.

В схеме [4] «схемная» диссипация невелика (отсутствует член со «схемной» вязкостью в плоскости, нормальной направлению счета), и течение с образованием

на кромке разрыва возникает при счете только в диапазоне больших значений углов α и χ . Сопоставляя области D (полученную по оценкам положения линии растекания на нижней поверхности) и D_1 (определенную по образованию в рассчитанном поле тангенциального разрыва, сходящего с кромки, и вихревого шнура), можно заключить, что в случае метода [4] область $D_1 \in D$. Поэтому для построения течения с разрывом в той части области D , которая не входит в D_1 , необходимо ввести дополнительное краевое условие задачи на острой кромке крыла. Для этого ниже предлагается алгоритм образования схода разрыва с кромки. Этот алгоритм используется в пределах всей области D .

1. Опишем основные черты метода [4]. В связанной с крылом декартовой системе координат X, Y, Z (компоненты скорости U, V, W) решается краевая задача для системы стационарных уравнений Эйлера, дополненной уравнением Бернулли

$$(1.1) \quad \begin{aligned} (\rho U)_x + (\rho V)_y + (\rho W)_z &= 0; \quad (p + \rho U^2)_x + (\rho UV)_y + (\rho UW)_z = 0 \\ (\rho UV)_x + (p + \rho V^2)_y + (\rho VW)_z &= 0, \quad (\rho UW)_x + (\rho VW)_y + (p + \rho W^2)_z = 0 \\ U^2 + V^2 + W^2 + \frac{2\kappa}{\kappa - 1} p / \rho &= B \end{aligned}$$

Обозначения здесь общепринятые, B — константа Бернулли, принимаемая за характерный параметр задачи при получении безразмерных величин. Счет ведется в направлении координаты X . Заданная поверхность тела аппроксимируется элементами плоскостей в процессе счета на каждом счетном шаге h_x .

Уравнения системы (1.1) для счетной ячейки записываются в виде законов сохранения в объеме ячейки. На входной и выходной гранях ячейки (их площади s_y и s_z) параметры течения аппроксимируются линейно в направлениях Y и Z

$$(1.2) \quad \begin{aligned} F(Y, Z) &= F_{i,j} + F_Y(Y - Y_i) + F_Z(Z - Z_i) \\ F &= \{\rho, p, U, V, W\} \end{aligned}$$

Здесь $F_{i,j}, Y_i, Z_j$ — значения параметров и координат в центре грани, i и j — индексы ячеек в направлениях Y и Z . Значения производных в (1.2) выбираются в соответствии с локальными свойствами вектора F на плоскости входной грани X_0 из условий сохранения монотонности решения и устойчивости схемы. На четырех гранях, примыкающих к входной, параметры течения определяются итерационным процессом расчета столкновения двух плоских сверхзвуковых потоков, каждый из которых задан вектором $F(Y, Z)$ на разных сторонах ребра ячейки в плоскости X_0 (используемые ниже индексы 1–4 относятся к этим граням).

Используя (1.2), переходим к системе конечно-разностных уравнений. Система в общем случае записывается для ячеек, пересекающих поверхность тела

$$(1.3) \quad \begin{aligned} (\rho U)_\delta &= A_1 = (\rho U c)_5 + (\rho V c)_1 - (\rho V c)_3 + (\rho W c)_2 - (\rho W c)_4 \\ (p + \rho U^2)_\delta &= A_2 = [(p + \rho U^2) c]_5 + (\rho UV c)_1 - (\rho UV c)_3 + \\ &+ (\rho UW c)_2 - (\rho UW c)_4 + (p^x c)_7 \\ (\rho UV)_\delta &= A_3 = (\rho UV c)_5 + [(p + \rho V^2) c]_1 - [(p + \rho V^2) c]_3 + \\ &+ (\rho VW c)_2 - (\rho VW c)_4 + (p^x c)_7 \\ (\rho UW)_\delta &= A_4 = (\rho UW c)_5 + (\rho VW c)_1 - (\rho VW c)_3 + \\ &+ [(p + \rho W^2) c]_2 - [(p + \rho W^2) c]_4 + (p^x c)_7 \end{aligned}$$

Здесь $c_K = s_K/s_6$, ($K=1, 2, \dots, 5, 7$), p^x, p^y, p^z — проекции на оси координат давления на элемент плоской поверхности тела (его площадь s_7), находящийся в ячейке. Давление p_7 определяется при расчете обтекания плоским сверхзвуковым потоком с параметрами $F_{i,j}$ элемента плоскости, аппроксимирующей поверхность тела. Для ячеек, не пересекающих поверхность тела, $c_7=0$, $c_1=c_3$, $c_2=c_4$, $c_5=1$.

Окончательно параметры на выходной грани b определяются так:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} V_6 &= A_3/A_1, \quad W_6 = A_4/A_1 \\ U_6 &= \left[\frac{2\kappa}{\kappa-1} A_2 + \left(\left(\frac{2\kappa}{\kappa-1} A_2 \right)^2 - 4 \frac{\kappa+1}{\kappa-1} A_1^2 (B - V_6^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - W_6^2) \right)^{1/2} \right] / \left[2 \frac{\kappa+1}{\kappa-1} A_1 \right] \\ \rho_6 &= A_1/U_6, \quad p_6 = A_2 - A_1 U_6 \end{aligned}$$

Описанная схема монотонна и в направлениях Y и Z практически имеет второй порядок точности аппроксимации. Совокупность этих свойств делает схему устойчивой к локальным возмущениям и позволяет описывать разрывы с приемлемой точностью; так, контактный разрыв с перепадом плотностей $\rho_2/\rho_1=3$ размывается при счете вдоль оси X по закону $\beta^{0.13} X^{0.25}$ (здесь β — угол между направлением разрыва и осью X).

Указанные свойства ослабляют эффекты «схемной» вязкости. Эти особенности схемы позволяют использовать без особых технических трудностей алгоритм создания тангенциального разрыва. Разрыв при счете размывается. «Слабость» схемной диссипации определяет условие $D_1 \in D$.

При полной загрузке оперативной памяти машины БЭСМ-6 ошибки в результатах находятся в пределах 3–4%. Сравнение с результатами рядов расчетных и экспериментальных работ имеется в [4].

2. Опишем алгоритм образования тангенциального разрыва. Он должен вводиться в метод как краевое условие на кромке крыла. Практически алгоритм состоит в том, что в ячейке i, j , расположенной непосредственно над кромкой крыла, за счет нарушения уравнений движения и при сохранении энергии потока направление вектора скорости изменяется таким образом, чтобы поток плавно стекал с верхней поверхности крыла. Ячейка $i-1, j$ располагается под кромкой крыла. Образующийся тангенциальный разрыв направлен по касательной к нижней поверхности крыла. Для простоты изложения опишем вариант, когда нижняя поверхность крыла плоская и лежит в плоскости $Y=Y_0$. В силу условия непротекания на крыле значение $V_{i-1, j}$ мало и стремится к нулю при стремлении к нулю размеров счетной ячейки.

Необходимое условие существования тангенциального разрыва [4] можно записать в виде

$$(2.1) \quad \operatorname{tg} \psi_{i-1} = W_{i-1, j} / U_{i-1, j} > \operatorname{tg} \theta$$

Здесь $\theta = \pi/2 - \chi$ угол между осью X и кромкой крыла.

В ячейке i, j параметры определяются из системы уравнений

$$(2.2) \quad \begin{aligned} (\rho U)_x + (\rho W)_z &= -\rho V_y, \quad p_{i, j} = p_{i-1, j} \\ V_{i, j} &= 0 \quad \left(\operatorname{tg} \psi_i = \frac{W_{i, j}}{U_{i, j}} > \operatorname{tg} \theta \right) \\ (\rho U W)_x + (p + \rho W^2)_z &= -\rho W V_y, \quad U^2 + W^2 + \frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} = B \end{aligned}$$

Для определения значений ρ , U и W в ячейке i, j система конечно-разностных уравнений, полученная из (2.2), сводится к алгебраическому уравнению второго порядка относительно компоненты скорости U , и условие $U_{i,j} > a$ (где a — скорость звука) позволяет выделить нужный корень.

Возможен более грубый вариант расчета параметров в ячейке i, j

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \rho_{i,j} &= \rho_{i-1,j}, \quad V_{i,j} = 0 \\ \rho_{i,j} &= \rho_{i,j-1} \left(\frac{\rho_{i-1,j}}{\rho_{i,j-1}} \right)^{1/\kappa} \\ \operatorname{tg} \psi_i &= \operatorname{tg} \theta + K(\operatorname{tg} \psi_{i-1} - \operatorname{tg} \theta), \quad 0 < K < 1 \\ U_{i,j} &= \left(\left(B - \frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{\rho_{i,j}}{\rho_{i,j}} \right) / (1 + \operatorname{tg}^2 \psi_i) \right)^{1/2}, \quad W_{i,j} = U_{i,j} \operatorname{tg} \psi_i \end{aligned}$$

Здесь K — свободный эмпирический параметр, позволяющий варьировать направление вектора скорости в ячейке i, j от направления кромки крыла до направления вектора скорости в ячейке $i-1, j$. Так как газ над кромкой под действием вязких сил увлекается в движении потоком с нижней стороны крыла, справедливо неравенство

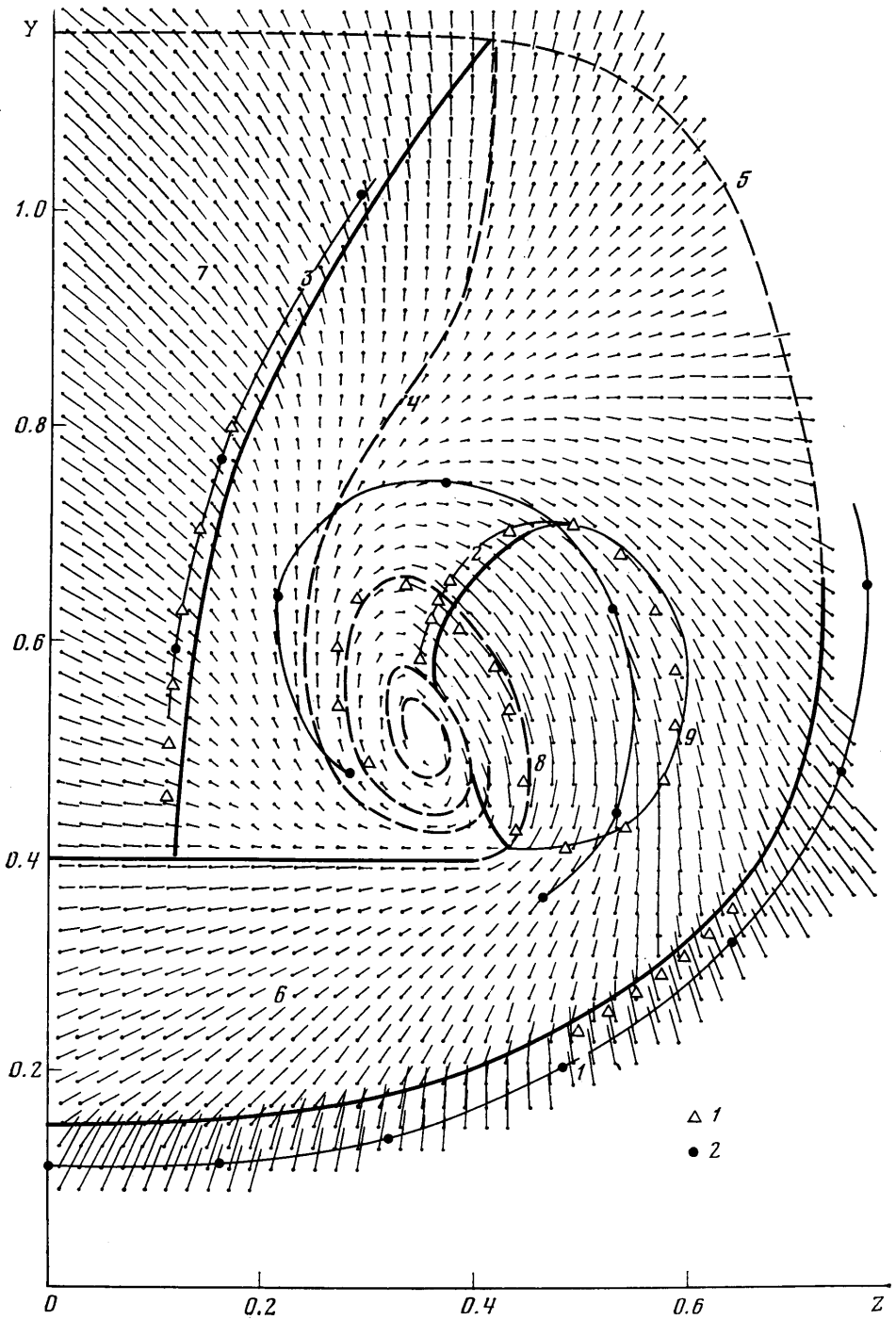
$$(2.4) \quad \operatorname{tg} \theta < \operatorname{tg} \psi_i < \operatorname{tg} \psi_{i-1}$$

Как показывают расчеты, различие значений θ и ψ_{i-1} невелико. В рассмотренном ниже примере обтекания прямоугольного крыла $\operatorname{tg} \theta = 0$, а $\operatorname{tg} \psi_{i-1} = 0.164$. Вариации величины K приводят к небольшому изменению параметров течения в окрестности тангенциального разрыва; поле вне вихря практически не изменяется. При этом $\operatorname{tg} \psi_i = 0.05 \div 0.15$.

3. Рассмотрим коническое течение у боковой кромки бесконечно тонкого прямоугольного крыла. В [5] для прямоугольного крыла методом [4] исследованы поля течения и получена схема обтекания без образования сходящего с кромки тангенциального разрыва. Кроме основной ударной волны в области конического течения у кромки над крылом обнаружена система, состоящая из двух конических «висячих» скачков уплотнения и тангенциального разрыва между ними (эта система скачок — контактный разрыв — скачок названа в [4] элементом течения СКС). Причины возникновения такой системы объяснены в [4]. При введении алгоритма отрыва схема течения, полученная в [5], несколько изменяется в нижней части элемента СКС.

Расчеты рассмотренного ниже варианта ($\chi = 90^\circ$, $M_\infty = 5$, $\alpha = 15^\circ$) проведены на сетке с размером шагов $h_Y = h_Z = 0.02$ до значения $X = 1.6$ (при величине полуразмаха крыла $b = 0.4$) и до значения $X = 3.2$ (при $b = 0.6$). В первом случае расчета возмущенная зона охватывала почти все заданное поле (56×60 счетных узлов в плоскости Y, Z). Во втором случае в счетном поле помещалась только часть возмущенной области течения; при этом на счетных границах при $X > 1.6$ решение экстраполировалось линейно изнутри поля; область влияния ошибок экстраполяции оценивалась по полученному в решении полю (см. подробнее [4]). Ошибки с границ Y_{\max} и Z_{\max} при $\alpha > 0$, как показывает опыт расчетов, распространяются внутрь поля слабее, чем с границы $Y = 0$.

Положение крыла внутри счетного поля выбиралось таким, чтобы влияние всех этих ошибок не искажало поля в близкой окрестности крыла и в области образования вихревого шнура. Изменение величины полуразмаха крыла во втором случае введено для того, чтобы не нарушить конического течения над крылом в элементе СКС при отражении висячей волны от плоскости симметрии. Ввиду свойства коничности решение при $X = 3.2$ соответствует вдвое более густой счетной сетке, чем решение в сечении $X = 1.6$.



Фиг. 1

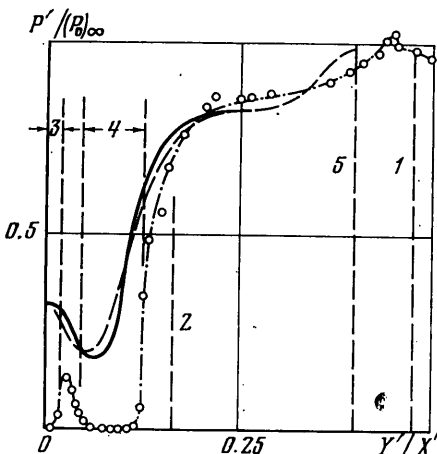
На фиг. 1 показаны схема и поле течения для первого случая в плоскости $X=1.6$. Из центра каждой счетной ячейки построен вектор, изображающий в некотором масштабе проекцию вектора скорости в этой точке, которая видна из угловой точки крыла. Течение содержит основную ударную волну 1; висячие скачки над крылом в потоках, прошедших соответственно над боковой и над передней кромками, 2 и 3; поверхность тангенциального разрыва, разделяющую эти потоки, 4; границы возмущенной зоны над крылом 5; слой сжатого газа под крылом 6; область течения Праудтля — Майера 7; поверхность тангенциального разрыва 8; коническую звуковую поверхность 9. Тангенциальные разрывы (штриховые линии) 4 и 8 построены интегрированием по кинематической картине векторов скорости. В вихре чередуются два слоя газа с разной энтропийной функцией (после волн 1 и 2 и после волны 3), однако резкого разрыва в энтропии на разрыве 4 нет, так как волны 1 и 3 вверху постепенно ослабевают и вырождаются. Местная коническая-сверхзвуковая зона пересекается контактной поверхностью 8, волна 2 на этой поверхности преломляется. Точками 1 показаны положения элементов 1, 2, 3, 8, 9, пересчитанные из результатов, полученных на «густой» сетке во втором случае. Линиями с точками 2 показано полученное в эксперименте [6] при тех же значениях параметров χ , M_∞ , α и X положение волн 1, 3 и границы темной зоны, окружающей вихрь.

Так как модель в эксперименте имела конечную толщину, на фиг. 1 нанесены результаты двух различных испытаний: форма волны 1 определена при испытании модели с плоской нижней поверхностью, остальные элементы — при испытании перевернутой модели (с плоской верхней поверхностью). Спиральный вихрь является областью больших градиентов решения, здесь проявляется диссипация счетной схемы и энтропия резко возрастает, превышая значения, допустимые за ударными волнами 1 и 2. (Этот результат аналогичен полученному в [5] для вихря, возникшего при сходе тангенциального разрыва с верхней поверхности из-под висячей волны 2.) Здесь проявляются ошибки, обусловленные введением алгоритма образования разрыва. Результаты расчета в этой области не соответствуют реальному течению.

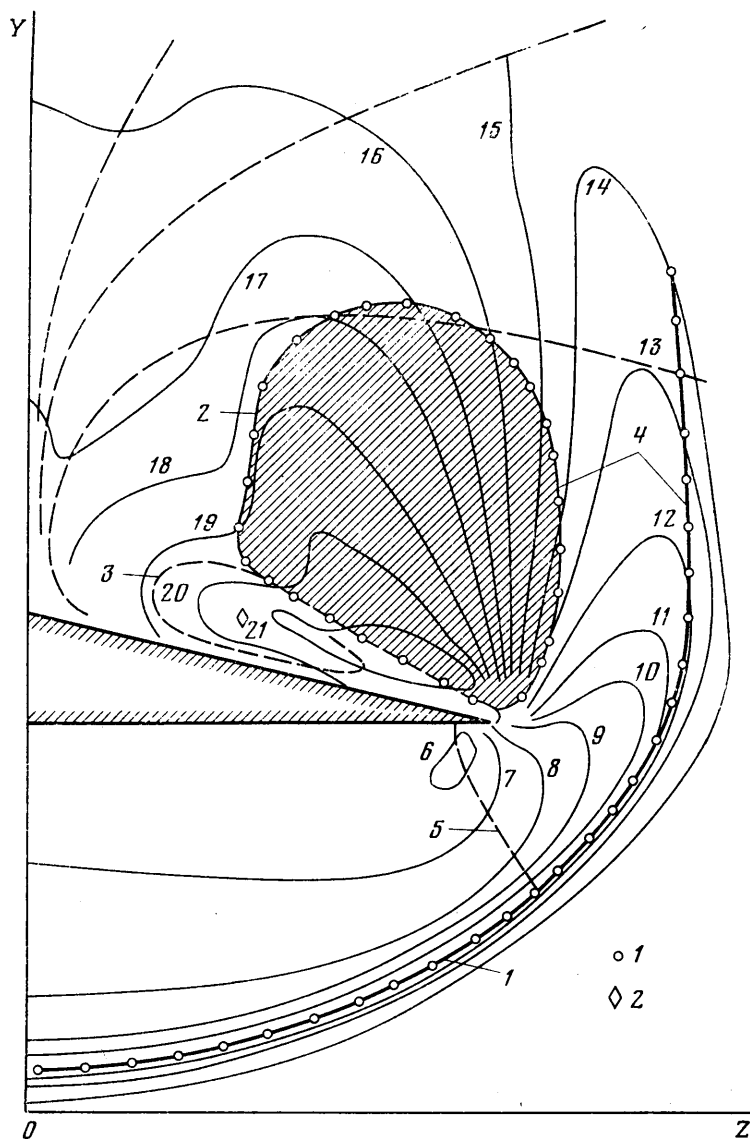
На фиг. 2 сопоставляются расчетные и экспериментальные (фиг. 3 в [6]) значения давления торможения за прямой ударной волной p'_0 в вертикальном сечении $Z=b$, проходящем через боковую кромку крыла, при угле атаки $\alpha=10^\circ$. Представлены результаты расчетов для первого (штриховая линия) и второго случаев (сплошная). Экспериментальные результаты показаны штрихпунктирной линией с точками. X' , Y' — координаты поточной декартовой системы:

$$(3.1) \quad Y'/X' = (Y/X) (\cos^2 \alpha + (Y/X) \sin \alpha \cos \alpha)$$

Цифрами для экспериментальных результатов на фигуре обозначены: 1 — положение границы возмущенной зоны над крылом, 2 — положение границы темной области, окружающей вихрь, 3 — толщина пограничного



Фиг. 2



Фиг. 3

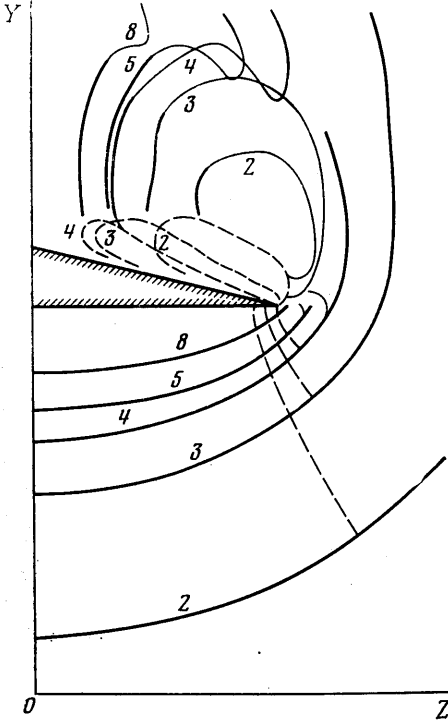
слоя над кромкой крыла в области под вихрем, 4 — область вихря. Положение линий 1 и 2 определено в эксперименте по фотографии.

Отличие результатов расчетов при различных размерах ячеек сетки невелико.

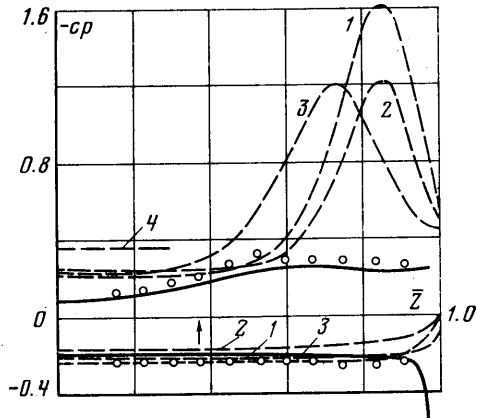
В эксперименте возмущенная зона замыкается сверху ударной волной ($Y_1' > Y_5'$ и $p_0' > p_{\infty}'$), в расчете — характеристикой 5. Это отличие вызвано, по-видимому, влиянием в эксперименте толщины передней кромки модели и толщины вытеснения пограничного слоя в окрестности этой кромки (см. подробнее [6]). Эти же факторы обуславливают отличие и в положении основной ударной волны 1 (фиг. 1). В эксперименте область вязкого течения в вихре 4 отделяется от области пограничного слоя 3 зоной, в которой влияние вязкости ослабевает. В расчете пограничный слой у поверхности крыла отсутствует, а поведение величины p_0' в обла-

ти 4, как и предполагалось, только качественно соответствует экспериментальному. Верхняя граница зоны вихря 4 в расчете размыта больше, чем в эксперименте, середина этой размытой границы оказывается внутри области 4.

4. Рассмотрим обтекание треугольных крыльев. На фиг. 3 показано поле изохор конического течения в плоскости Y, Z у треугольного крыла ($\chi=75^\circ, M_\infty=3, \alpha=15^\circ$) с плоской нижней поверхностью и с клиновидным профилем, имеющим угол раствора $\omega=3^\circ 35'$ (1 — основная ударная волна, 2 — висячий скачок над крылом; штриховые линии — поверхности тока, в том числе поверхности тангенциального разрыва 3, сходящая с кромки; 4 — кривые с точками 1 — конически-звуковые поверхности ($M_k=1$), проходящие, в частности, по ударным волнам 1 и 2, такая поверхность определяет местную конически-сверхзвуковую зону над кромкой (на фиг. 3 заштрихована); тон-



Фиг. 4



Фиг. 5

кими линиями 6—21 обозначены изохоры со значениями плотности соответственно $\rho/\rho_\infty=1.79, 1.70, 1.62, 1.53, 1.36, 1.28, 1.19, 1.105, 1.02, 0.935, 0.850, 0.765, 0.680, 0.510, 0.340, 0.255$).

Характерно, что положения скачка 2 и тангенциального разрыва 3, определенные как линии $M_k=1$ и области резкого изменения плотности, несколько отличаются. Подробнее о таких отличиях и об определении положения разрывов см. [5].

Точкой 2 показано примерное положение оси вихря.

Рассмотрим основные черты течения. Как и при отсутствии вихря, над кромкой расположена зона разрежения. Местная сверхзвуковая зона прижимается сверху к поверхности 3; эта поверхность и все поверхности тока в возмущенной области течения над крылом сворачиваются в вихревую спираль; ударная волна 2 упирается в поверхность 3, искривляя ее. Течение принадлежит режиму C2 [4], т. е. конически-сверхзвуковая зона не доходит до волны 1, и разделяющая поверхность тока 5 приходит при этом на нижнюю поверхность крыла, образуя на ней линию растекания. Все поверхности тока, расположенные ниже, чем поверхность 5, сходятся к нижней поверхности крыла в плоскости симметрии течения.

Рассмотрим деформацию картины течения у этого крыла при изменении числа M_∞ (фиг. 4). Цифрами обозначены числа M_∞ , которым соответствуют изображенные элементы течения (ударные волны, контактная поверхность, сходящая с кромки, и конически-сверхзвуковая зона). При $M_\infty=2$ линия растекания на нижней поверхности находится далеко от кромки, а сверхзвуковая зона мала по размерам. С ростом числа M_∞ в соответствии с [4] линия растекания сдвигается к кромке, сверхзвуковая зона растет, а область вихревой спирали становится тоньше и растягивается в сторону плоскости симметрии. Центр спирали смещается тоже в сторону плоскости симметрии, он лежит на луче сферической системы координат (имеющей центр в вершине крыла), на котором вектор скорости направлен вдоль луча. Область возмущенного течения уменьшается, ударная волна 1 приближается к телу. В диапазоне $3 < M_\infty < 4$ течение переходит из режима С2 в режим В2: конически-звуковая поверхность доходит до основной волны, течение над крылом «запирается» (возмущения не передаются вниз в область течения под крылом), и над крылом возникает конически-дозвуковой элемент СКС; вихревая пелена почти стелется по поверхности крыла, а сам вихрь все дальше отходит от кромки. Центр вихревой спирали располагается примерно под висцей ударной волной. Наконец, при $M_\infty > 4$ течение переходит в режим В1: линия растекания располагается на кромке, основная ударная волна отсоединена, отрыва от кромки нет, поверхности тока над крылом сходятся к верхней поверхности крыла в плоскости симметрии.

Возможно, что в этом режиме линия растекания располагается не на кромке, а на нижней поверхности крыла, но так близко к кромке, что конечно-разностный метод в расчете и визуализация течения в эксперименте не в состоянии определить это отличие. Тем не менее отрыв над крылом не развивается, так как сверхзвуковой поток, натекающий на верхнюю сторону крыла сбоку, прижимает поверхность тангенциального разрыва к поверхности крыла. Отсутствие отрыва над крылом в этом случае регистрируют и эксперименты [7].

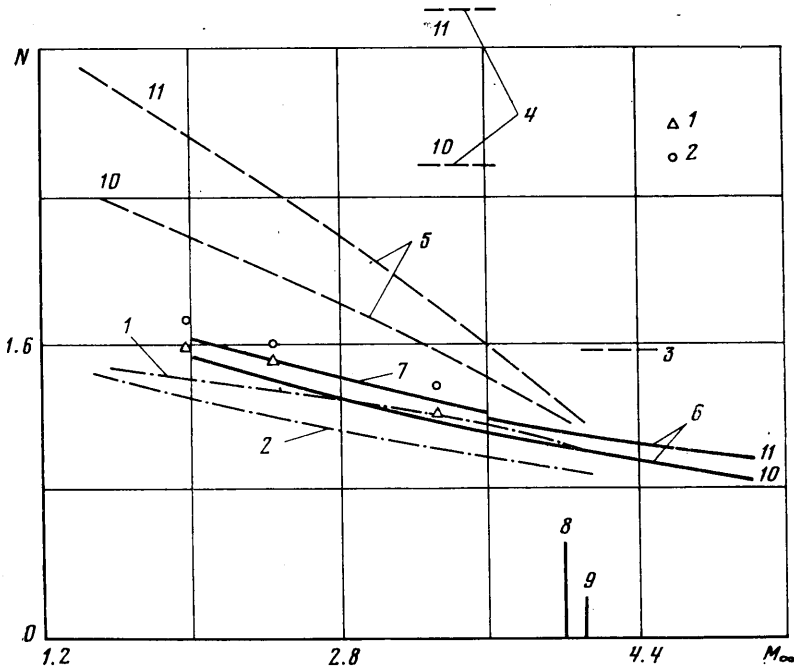
На фиг. 5 полученное в расчете (сплошные линии) распределение коэффициента давления $c_p = (p - p_\infty) / (\rho_\infty V_\infty^2 / 2)$ на нижней и верхней поверхностях тонкого треугольного крыла ($\chi = 75^\circ$, $M_\infty = 1.9$, $\alpha = 15^\circ$) при наличии отрыва на кромке сравнивается с экспериментальными данными [8] (точки 5) и результатами приближенных методов (штриховые линии). По оси абсцисс отложено значение координаты $\bar{Z} = Z/b$, b — полуразмах крыла в данном сечении.

Приближенные методы основаны на теории тонкого тела [9], в которой исследуется обтекание плоским потоком несжимаемой жидкости поперечного сечения тела. Учет влияния вихревых поверхностей в этой теории проводился на основе различных моделей. В [10] рассмотрена модель с концентрированным вихрем и плоской вихревой пеленой (результаты этого подхода обозначены на фиг. 5 кривыми 1).

В [11] с помощью метода Пуанкаре — Лайтхилла — Го и асимптотических разложений сделана попытка учесть в этой модели сжимаемость и конечную толщину профиля (кривые 2). Наконец, кривые 3 — результаты работы [12], в которой вихревая пелена представлена в виде системы точечных дискретных вихрей, движение которых исследовалось численно. Линия 4 определяет значение c_p , соответствующее величине $p=0$. Стрелкой показано крайнее левое расчетное положение сходящей с кромки вихревой пелены. Отличие расчетных и экспериментальных данных достигает 25%. Возможно, оно вызвано различием форм верхней поверхности в расчете и эксперименте, так как толщина модели не указана. Приближенные методы приводят к большим ошибкам в распределении дав-

ления на верхней поверхности крыла в области под вихрем. Отметим, что повышение точности расчета вихревой пелены [12] и учет сжимаемости [11] лишь частично улучшили результаты, сохранив на верхней поверхности область больших разрежений.

5. Рассмотрим нормальную силу в случае крыльев малого удлинения в диапазоне $2 \leq M_\infty \leq 5$. На фиг. 6 для тонкого треугольного крыла с удлинением $\lambda=1$ сопоставляются значения $N=c_n/(\sin \alpha \times \cos \alpha)$, полученные в численных расчетах, с данными экспериментальной работы, приведен-



Фиг. 6

ными в [11], и результатами приближенных теорий при $\epsilon = \sin \alpha / \operatorname{tg} \theta = 0.5$ и 1, что соответствует примерно углам атаки $\alpha = 7$ и 14° .

Линия 1 — результаты, полученные по формуле (линейная теория)

$$(5.1) \quad \frac{c_n}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\pi \lambda}{E(\gamma)}, \quad \gamma = \sqrt{1 - (\beta \lambda / 4)^2}, \quad \beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$$

Здесь $E(\gamma)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

Линия 2 — результаты линейной теории с поправками второго порядка

$$(5.2) \quad \frac{c_n}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\pi \lambda}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta \lambda}{4} \right)^2 \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{\beta \lambda}{16} \right) \right\}$$

Линия 3 — значение, полученное по теории тонкого тела [9]

$$(5.3) \quad \frac{c_n}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\pi \lambda}{2}$$

линии 4 — по формуле (теория тонкого тела с учетом вихрей [10])

$$(5.4) \quad \frac{c_n}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\pi \lambda}{2} + \pi \lambda^{1/2} \alpha^{2/3}$$

5 — по теории [11]. Численные результаты без отрыва обозначены цифрой 6, с отрывом ($\varepsilon=1$) — цифрой 7, граница области D при $\varepsilon=1-8$, числом M_∞ , при котором крыло имеет звуковую кромку, — 9. Результаты эксперимента обозначены при $\varepsilon=0.5$ — точками 1, при $\varepsilon=1$ — точками 2. Цифра 10 соответствует значению $\varepsilon=0.5$, а 11 — значению $\varepsilon=1$.

Так как отличие численных и экспериментальных результатов невелико ($\leq 9\%$), можно считать, что вязкость слабо влияет на результаты эксперимента, и поэтому последние могут служить критерием для проверки приближенных теорий.

Теория	№ формулы	$\varepsilon = \sin \alpha / \operatorname{tg} \theta$			
		$\lambda=1, 2 \leq M_\infty \leq 4$	1.0	1.0	2.0
Линейная	10	2÷10	12÷19	29÷39	40÷48
Линейная с поправками второго порядка	11	17÷18	25÷26	33÷39	43÷48
Тонкого тела	12	0÷44	0÷30	27÷37	38÷47
Тонкого тела с учетом схода вихревой пелены	13	60÷136	95÷180	26÷48	48÷74
Тонкого тела с учетом пелены и сжимаемости	—	9÷38	5÷57	17÷21	30÷41
Маршевый метод сквозного счета	—	<3.5	4÷9	2÷8	1.5÷6

В первой половине таблицы представлены соответствующие материалам фиг. 6 диапазоны отличия (%) значений $c_n / (\sin \alpha \cos \alpha)$ от экспериментальных данных.

Ошибки линейной теории несколько возрастают с ростом параметра ε (примерно с 10 до 18%). Результаты, полученные по теории Мунка — Джонса, имеют расхождение с экспериментом в 2 раза большее, чем результаты линейной теории. Весьма низка точность результатов [10], она не повышается и уточнением [11]. Точность с учетом этих поправок сопоставима с точностью простой теории [9]. По [4] исследуемое крыло с плоской нижней поверхностью при $\varepsilon=0.5$ обтекает без отрыва потока от кромок (в режиме В1) во всем исследуемом диапазоне чисел M_∞ , а при $\varepsilon=1$ проходит различные режимы, описанные выше. Переход от отрывного к безотрывному на кромках течению происходит при $M_\infty \approx 4$. Малая величина разрыва в значениях c_n при этом переходе объясняется тем, что разрежение под вихрем примерно соответствует разрежению в течении расширения, которое появляется над кромкой вместо вихря. Таким образом, при $\varepsilon=1$ почти во всем исследуемом диапазоне чисел M_∞ расчет проводится с отрывом от кромок.

Необходимо учесть, что выбранный для проверки режим $\lambda=1$, $\alpha \sim \theta$ не является оптимальным с точки зрения точности приближенных методов.

Для проверки теории тонкого тела и возможностей предлагаемого метода в диапазоне малых значений λ и α рассмотрим крыло меньшего удлинения ($\lambda=0.25$) при углах атаки $3^\circ 35'$ и $7^\circ 10'$. Экспериментальные материалы взяты из [13]. Результаты анализа собраны во второй половине таблицы. Это очень узкое ($\theta=3^\circ 35'$) крыло имеет значительно меньшее практическое значение, чем рассмотренное выше, но хорошо удовлетворяет ограничениям теории тонкого тела. Результаты линейной теории с уменьшением λ , как и следовало ожидать, стали менее, а теории тонкого тела — более точными, однако и в этом благоприятном случае ошибки последних достигают 40–70%.

В связи с широким применением теории тонкого тела в задачах расчета обтекания крыльев и интерференции крыла с корпусом необходимо подчеркнуть, что на сверхзвуковых скоростях результаты этой теории если и представляют некоторый интерес, то только в качественном отношении.

Несколько иначе обстоит дело с крылом прямоугольной формы в плане. В этом случае выражение для производной $(c_y)_\alpha|_{\alpha=0} = 4\beta^{-1}(1-1/2\beta\lambda)$, полученное в [14] на основе теории тонкого тела, в широком диапазоне изменения параметров λ и M_∞ примерно на 18–20% меньше полученного в настоящей работе и в эксперименте. Однако быстрый рост члена со значением $\alpha^{5/3}$ вскоре компенсирует эту ошибку. Таким образом, в диапазоне углов атаки до 20° результаты теории тонкого тела наименее точны в окрестности оси $\alpha=0$, причем ошибки не превышают 20%. В сравнении с оценками для треугольных крыльев эти результаты выглядят более «благополучными».

Автор благодарит А. А. Дородницына, В. Я. Нейланда и В. В. Сычева за полезные обсуждения материалов работы.

Поступила 3 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Гогин Л. В., Нейланд В. Я., Степанов Г. Ю. Теория двумерных отрывных течений. В сб. «Итоги науки и техники. Сер. Гидромеханика», 1975, т. 8.
2. Parker A. G. Aerodynamic characteristic of slender wings with sharp leading edges — a review. J. Aircraft, 1976, vol. 13, No. 3.
3. Молчанов В. Ф. Некоторые вопросы расчета течений с тангенциальными разрывами. Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 4.
4. Косых А. П., Минайло А. Н. Расчет сверхзвукового течения у несущих тел и крыльев методом сквозного счета. Тр. ЦАГИ, 1977, вып. 1809.
5. Минайло А. Н. Невязкое сверхзвуковое течение у тонкой прямоугольной пластины. Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 3.
6. Боровой В. Я., Харченко В. Н. Экспериментальное исследование обтекания прямоугольного крыла сверхзвуковым потоком газа. Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 5.
7. Stanbrook A., Squire L. C. Possible types of flow at swept leading edges. Aeronaut. Quart., 1964, vol. 15, pt 1.
8. Michael W. H. Flow studies on flat-plate delta wings at supersonic speed. Nat. Advis. Comm. Aeronaut., Techn. Notes, 1955, No. 3472.
9. Jones R. T. Properties of low-aspect-ratio pointed wings at speeds below and above the speed of sound. NACA Rept, 1946, No. 835.
10. Brown C. E., Michael W. H. Effect of leading edge separation on the lift of a delta wing. Preprint Inst. Aeronaut. Sci., 1954, No. 437.
11. Nenni J. P., Tung Ch. A second order slender wing theory for wings with leading edge separation in supersonic flow. Nat. Advis. Comm. Aeronaut., CR, 1971, No. 1860.
12. Smith J. H. B. Improved calculations of leading edge separation from slender delta wings. RAE Techn. Reprt, 1966, No. 66070.
13. Fox C. H., Lamar J. E. Theoretical and experimental longitudinal aerodynamic characteristics of an aspect ratio 0.25 sharp-edge delta wing at subsonic, supersonic and hypersonic speeds. Nat. Advis. Comm. Aeronaut., TN, 1974, No. D-7651.
14. Cheng H. K. Aerodynamics of rectangular plate with vortex separation in supersonic flow. J. Aeronaut. Sci., 1955, vol. 22, No. 4.