

РАСЧЕТ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПОВЕРХНОСТЯХ С ПРОНИЦАЕМЫМИ УЧАСТКАМИ

В. А. АЛЕКСИН, В. Д. СОВЕРШЕННЫЙ, С. П. ЧИКОВА

(Москва)

Применение численных методов позволяет проводить расчеты турбулентного пограничного слоя при сложных граничных условиях и при их резком изменении. Уравнения турбулентного пограничного слоя обычно замыкаются с помощью различных моделей турбулентности; широкое распространение в настоящее время получила простая модель турбулентной вязкости Ван-Дрифта [1]. В настоящей работе применяется формула турбулентной вязкости, предложенная в [2]. Несколько примеров расчета течений в пограничном слое с использованием модели вязкости [2] содержится в работе [3], где получено удовлетворительное согласование расчетов с опытными данными при резком изменении граничных условий.

В настоящей работе приводятся результаты расчетов характеристик пограничного слоя на поверхностях с проницаемыми участками. Особое внимание уделяется изменению функций в начале участков вдува (отсоса) или в начале следующих за ними непроницаемых участков. Известный интерес представляет рассмотрение случая, когда участки вдува сменяются участками отсоса; в этом примере расчетные данные сопоставлены с опытными из работы [4]. Проведено сравнение расчетов с опытами и в других случаях.

1. В качестве исходной рассматривается система уравнений однородного по составу пограничного слоя

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial x}(\rho u r^j) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v r^j) = 0, \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_x \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda_x}{c_p} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu_x - \frac{\lambda_x}{c_p} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right]$$

$$p = \rho R T$$

Здесь x и y — координаты, направленные вдоль и по нормали к поверхности, r — радиус вращения, u , v — продольная и поперечная составляющие скорости, p , ρ , H , T , c_p — давление, плотность, полная энтальпия, статическая температура, удельная теплоемкость газа, μ , λ — коэффициенты молекулярной вязкости и теплопроводности, R — универсальная газовая постоянная, μ_x , λ_x — эффективные (полные) коэффициенты вязкости и теплопроводности, $j=0$ в плоском случае, $j=1$ в осесимметричном случае. Индексы относятся: w — к величинам на стенке, e — к внешней границе пограничного слоя, 0 — к начальному сечению, r — к параметрам восстановления.

Для замыкания системы уравнений при турбулентном режиме течения в данной работе используется модель коэффициентов переноса, предложенная в [2]. Согласно этой работе коэффициенты полного переноса в турбулентном пограничном слое могут быть представлены в виде

$$\mu_x = \mu \varphi(A, \eta_*), \quad \varphi(A, \eta_*) = [A^2 - \eta_*^2 + \sqrt{(\eta_*^2 - A^2)^2 + 4\eta_*^2 A}] / 2A$$

$$(1.2) \quad \lambda_s = \lambda \left[1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} A^2 \varphi(A, \eta_*) \right] / [1 + A \varphi(A, \eta_*)], \quad A = \frac{\rho l^2}{\mu} \frac{\partial u}{\partial y}$$

В соответствии с (1.2) коэффициент полной вязкости зависит только от локального числа Рейнольдса A и от безразмерной величины η_* , определяющей местоположение границы, отделяющей область с преобладающим ламинарным режимом течения от области с преобладающим турбулентным режимом. В развитом турбулентном пограничном слое обычно принимают $\eta_* = 10-12$. Коэффициент полной теплопроводности помимо величин A и η_* зависит также от чисел Прандтля Pr и Pr_T , определенных соответственно по коэффициентам молекулярного и турбулентного переноса (в расчетах принято $\text{Pr} = 0.7$, $\text{Pr}_T = 0.9$). Длина пути перемешивания определяется формулой [3]

$$(1.3) \quad \frac{l}{\delta} = 0.1 \frac{1 - \exp(-8y/\delta)}{1 + \exp(-6y/\delta)}$$

При $y \rightarrow 0$ $l = ky$, где $k = 0.4$.

Коэффициенты переноса принимаются в форме (1.2) по всей толщине пограничного слоя.

К исходной системе уравнений необходимо присоединить граничные условия

$$(1.4) \quad \begin{aligned} u=0, \quad \rho v = (\rho v)_w, \quad a(x) \frac{\partial H}{\partial y} + b(x) H = c(x), \quad y=0 \\ u \rightarrow u_e(x), \quad H \rightarrow H_e(x), \quad y \rightarrow \infty \end{aligned}$$

В начальном сечении задаются профили скорости и энтальпии. В ряде практически важных задач функции $(\rho v)_w$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $u_e(x)$ могут сильно меняться вдоль поверхности, некоторые из этих функций могут меняться скачкообразно, что создает определенные трудности при численных решениях.

2. Исходная система уравнений приводится к безразмерному виду посредством преобразования Дородницына — Лиза

$$(2.1) \quad \eta = \frac{u_e^{r^j}}{b(\xi)} \int_0^\eta \rho dy, \quad \xi = \int_0^\xi r^{2j} u_e \mu_e \rho_e dx \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{u}{u_e}, \quad \frac{\partial f_h}{\partial \eta} = \frac{h}{h_e}$$

Тогда для вертикальной составляющей скорости получается выражение

$$v = - \frac{1}{\rho r^j} \frac{\partial}{\partial x} [b(\xi) f(\xi, \eta)]$$

Система уравнений движения и энергии приобретает вид

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(m \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + b \frac{db}{d\xi} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = b^2 \frac{d \ln u_e}{d\xi} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{\rho_e}{\rho} \right] + \\ + b^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{m}{\text{Pr}_T} \frac{\partial^2 f_h}{\partial \eta^2} \right) + b \frac{db}{d\xi} f \frac{\partial^2 f_h}{\partial \eta^2} + m \frac{u_e^2}{h_e} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)^2 = \end{aligned}$$

$$= b^2 \frac{d \ln h_e}{d \xi} \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f_h}{\partial \eta} - \frac{\rho_e}{\rho} \right) + b^2 \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f_h}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 f_h}{\partial \eta^2} \right)$$

$$p = \rho RT, \quad m = \frac{\mu \rho}{\mu_e \rho_e} \varphi(A, \eta^*)$$

Величина $b = b(\xi)$ является произвольной функцией координаты ξ , в приведенных ниже расчетах принято $b(\xi) = \sqrt{2\xi}$.

Граничные условия в соответствии с преобразованием (2.1) представляются в виде

$$(2.3) \quad f = f_w, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, \quad f_h = 0, \quad a_1(\xi) \frac{\partial^2 f_h}{\partial \eta^2} + b_1(\xi) \frac{\partial f_h}{\partial \eta} = c_1(\xi), \quad \eta = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} \rightarrow 1, \quad \frac{\partial f_h}{\partial \eta} \rightarrow 1, \quad \eta \rightarrow \infty$$

Функция тока на стенке отлична от нуля в случае вдува вещества на поверхности и при непрерывном продолжении расчета после некоторого сечения, в котором $f_w \neq 0$.

В общем случае выражение функции тока на стенке представляется в виде

$$f_w = \frac{1}{\sqrt{2\xi}} \left[(f_w \sqrt{2\xi})_{\xi_0} - \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{(\rho v)_w}{\rho_e u_e} \frac{d\xi}{r^j \mu_e} \right]$$

где $(\rho v)_w$ — плотность потока вдуваемого вещества на стенке.

Система уравнений (2.2) с граничными условиями (2.3) решается численно. Весьма важна отработка метода устойчивого счета данной системы уравнений, которая в исходном виде обладает значительной нелинейностью. Это в большой степени обусловлено тем, что коэффициент полной вязкости является согласно равенству (1.2) нелинейной функцией от величины A , которая, будучи представленной в переменных (2.1), становится пропорциональной второй производной от функции тока f . Таким образом, вторая производная от функции тока входит в коэффициент при старшей производной в уравнении движения.

Для ослабления нелинейности и обеспечения устойчивого счета уравнение движения преобразуется к линейному относительно $\partial^2 f / \partial \eta^2$ интегро-дифференциальному уравнению. С этой целью уравнение движения (2.2) интегрируется от η до ∞ . Полученное таким образом уравнение разрешается относительно $\partial^2 f / \partial \eta^2$. После этого проводится формальное дифференцирование полученного уравнения, чтобы к нему можно было применить вычислительные процедуры, разработанные для уравнений третьего порядка. После преобразования уравнение движения приобретает прежний вид (2.2), но величина φ при этом уже не содержит $\partial^2 f / \partial \eta^2$. Выражение для φ представляется в виде

$$(2.4) \quad \varphi = \left(\eta_*^2 + \sqrt{\eta_*^4 + \Psi^2 \frac{\Psi + 2\eta_*^2}{2}} \right) (\Psi + 2\eta_*^2)^{-1},$$

$$\Psi = 2 \frac{\rho_e}{\rho} \left(\rho \frac{l u_e}{\mu} \right)^2 \frac{\mu_e}{b(\xi)} \Phi$$

$$\Phi = -b^2 \left(\frac{d \ln b}{d \xi} f + \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right) -$$

$$-\int_{\eta}^{\infty} \left\{ b \frac{d}{d\xi} \left[b \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - 1 \right) \right] + b^2 \frac{d \ln u_e}{d\xi} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{\rho_e}{\rho} \right] \right\} d\eta$$

Равенство (2.4) используется в дальнейших расчетах.

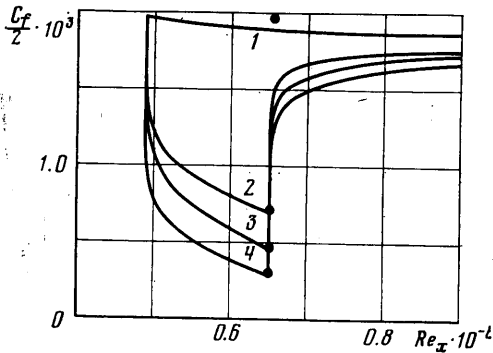
В основу численного метода положена расчетная схема [5].

3. В работе [3] была установлена связь величины η_* с константой турбулентности A^+ в формуле Ван — Дрифта [1]. Эта связь выражается простой формулой

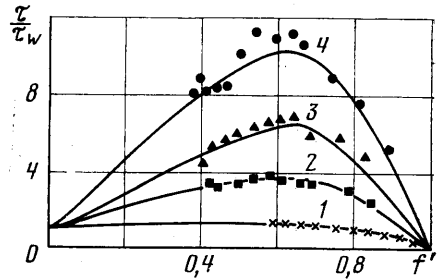
$$(3.1) \quad A^+ = \eta_*/k$$

где k — константа турбулентности ($k=0.4$).

В работе [1] величина A^+ принята постоянной и равной 26, это допущение было удовлетворительным в случае течений без сильных вдувов



Фиг. 1



Фиг. 2

(отсосов), градиентов давления. При наличии вдува и градиента давления для величины A^+ в работе [6] получена более общая формула, уточнение ее проведено на основе обобщения многочисленных опытных данных (при этом указывается точность в пределах 10%).

С использованием зависимости из [6] и формулы (3.1) выражение для величины η_* может быть представлено в виде

$$\eta_* = \eta_*^0 \left[1 + 5.15 \left(v_0^+ + \frac{5.86 P^+}{1 + 5 v_0^+} \right) \right]^{-1}$$

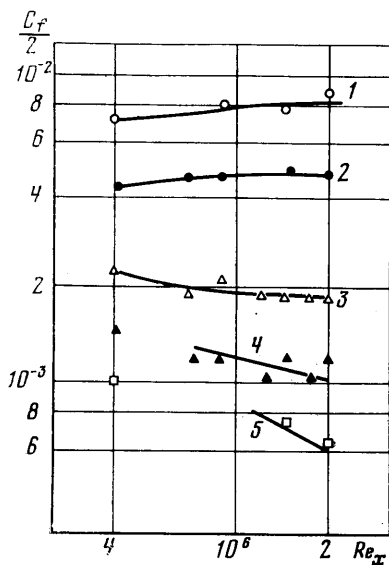
$$P^+ = \frac{v_e}{\rho v_*^3} \frac{dp}{dx}, \quad v_0^+ = \frac{v_w}{v_*}$$

где величина η_*^0 определена при $P^+ = v_0^+ = 0$; v_* — динамическая скорость.

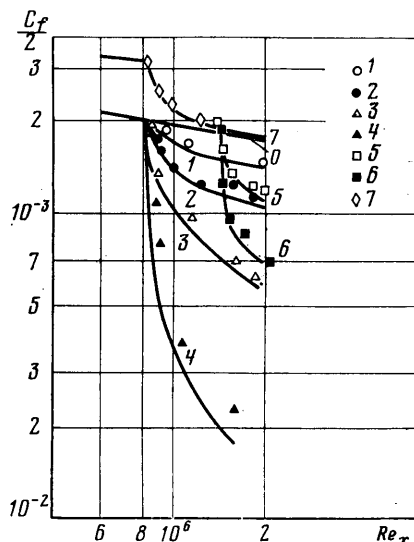
4. Имеется широкий круг технических задач, связанных с расчетом характеристик пограничного слоя на проницаемых поверхностях. Этим задачам посвящено много работ, краткий обзор которых приводится в [7]. Теоретические подходы в этих работах опирались в основном на использование интегральных методов, это давало возможность получать с приемлемой точностью суммарные характеристики пограничного слоя (трение и тепловой поток на стенке). Для указанных работ характерно, что в них рассчитывались параметры в сечениях пограничного слоя, удаленных от начала участка вдува. Начало участка вдува или начало непроницаемого участка, следующего за участком вдува, где происходит резкое перестроение

ние течения, не поддается удовлетворительному расчету с использованием указанных выше подходов.

Применение численных методов к решению системы уравнений пограничного слоя позволяет с достаточной точностью рассчитывать детальные характеристики пограничного слоя, такие как профили скорости, температуры, трения и т. д. Как показывает сопоставление с опытами, этот подход обеспечивает также вполне удовлетворительный расчет характеристик пограничного слоя в начале участка вдува и сразу после его окон-



Фиг. 3



Фиг. 4

чания, т. е. в местах наиболее резкого изменения характеристик пограничного слоя вдоль продольной координаты.

Ниже дается несколько примеров расчета турбулентного пограничного слоя на поверхностях с проницаемыми участками.

В качестве одного из примеров рассмотрен турбулентный пограничный слой на пластине, имеющей участок равномерного вдува; в расчете использованы исходные данные из экспериментальной работы [8], в которой измерения были выполнены в конце пористого участка при вдуве азота в воздушный поток. Результаты расчета и соответствующие опытные данные приводятся на фиг. 1, 2. На фиг. 1 показано изменение коэффициента трения вдоль поверхности (кривые 1-4 соответствуют $B=0, 5, 10, 20$, где $B=(\rho v)_{in}2/(\rho_e u_e c_f)$, $c_f=2\tau_w/\rho_e u_e^2$; участок вдува простирается от $Re_x=4,9 \cdot 10^5$ до $Re_x=6,5 \cdot 10^5$). Величина трения на проницаемом участке существенно зависит от интенсивности вдувания; расчетные значения в конце пористого участка согласуются с экспериментальными [8]. Согласно расчету трение в начале проницаемого участка и в начале следующего за ним непроницаемого участка меняется резко (с вертикальной касательной); такое изменение согласуется с результатами асимптотических оценок. Изменение трения поперек пограничного слоя, являющееся детальной характеристикой течения, показано на фиг. 2, там же приводятся опытные данные из [8]. Расчетные данные на фиг. 2 согласуются с опытными.

Для сопоставлений были использованы также опытные данные из [9, 10], в которых измерения трения выполнены в нескольких точках по-

верхности. В [9] измерения трения на стенке проведены в точках, удаленных от начала проникаемого участка, где имеется плавное изменение параметров течения. Для [10] характерно, что измерения выполнены в начале участка вдува, где параметры течения меняются наиболее резко. На фиг. 3 показано расчетное изменение трения, соответствующее опытными данным [9]. Кривые 1, 2 соответствуют отсосу с параметром $F = -0.0076$, -0.0046 , где $F = (\rho v)_w / (\rho_e u_e)$; кривая 3 соответствует непроницаемой поверхности $F = 0$; кривые 4, 5 соответствуют вдуву с параметрами $F = 0.0019$, 0.0038 ; может быть отмечено удовлетворительное соответствие расчетных и опытных данных.

Расчетные кривые трения в начале участка вдува показаны на фиг. 4, расчет проведен в соответствии с экспериментальной работой [10]. Начало проникаемого участка соответствовало $Re_x = 0.8 \cdot 10^6$ или $Re_x = 1.3 \cdot 10^6$. Расчетные кривые 1-6 получены при значениях параметра $F = 0.001$, 0.0019 , 0.0038 , 0.0078 , 0.0019 , 0.0038 . Кривая 0 соответствует непроницаемой пластине. Кривая 7 рассчитана для случая непроницаемой поверхности, которая расположена сразу за участком отсоса с интенсивностью $F = -0.0024$. Соответствие опытных точек кривым показано табличкой на фиг. 4. Как уже отмечалось выше, в начале участка вдува трение резко падает, это обстоятельство в данном случае подтверждается опытами. Резкое изменение трения наблюдается также непосредственно за участком отсоса, в начале следующего за ним непроницаемого участка (кривая 7).

На начальном участке вдува происходит резкое перестроение профиля скорости, который с возрастанием числа Рейнольдса Re_x становится менее наполненным, при этом увеличивается толщина пограничного слоя. С возрастанием параметра вдува перестроение профиля скорости усиливается, увеличивается протяженность области перестройки течения по сравнению со случаями меньших значений параметра вдува.

Определенный интерес может представлять применение вдува и отсоса в их комбинации. Экспериментальное исследование теплообмена на проницаемой поверхности при чередовании участков вдува и отсоса выполнено в [4]. Рассматриваемый пример характерен резким изменением характеристик пограничного слоя при переходе от участков вдува к участкам отсоса и при обратных переходах. Опыты в [4] были проведены на плоской модели при числе Маха основного потока $M_e = 2.25$, температуре газа $T_e = 150^\circ \text{K}$. В опытах измерены температура стенки на участках вдува и отсоса, температура вдуваемого воздуха. Теплообменный участок состоял из восьми секций вдува (шириной 16 мм), чередующихся с восемью секциями отсоса (шириной 5 мм), между ними располагались теплоизолированные перегородки толщиной 0.5 мм.

С помощью изложенного метода была проведена серия расчетов для случаев чередования участков вдува и отсоса. Ниже в качестве иллюстрации показано два примера подобного расчета. Граничные условия были приняты соответствующими условиям эксперимента в работе [4]: на непроницаемом участке, предшествующем теплообменному, полагалось, что тепловой поток в стенку равен нулю и вертикальная составляющая скорости на стенке также равна нулю; на участке вдува задавалась величина вдува, для теплового потока использовалось условие баланса энергии у проницаемой стенки в виде

$$(4.1) \quad c_p (\rho v)_w (T - T_{-\infty}) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \quad y=0$$

где $T_{-\infty}$ — температура вдуваемого воздуха до прохождения пористой оболочки (в опытах температура вдуваемого воздуха превышала температуру основного потока).

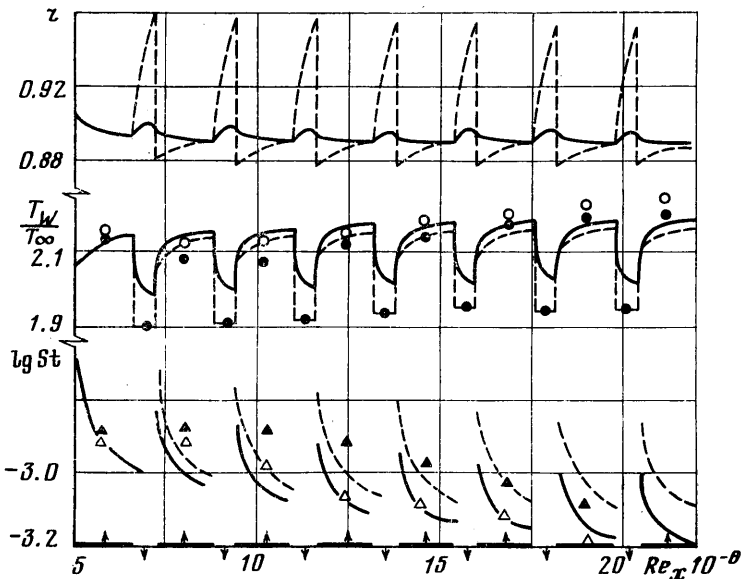
На участках отсоса задавались относительная величина отсоса F' ($F' = (\rho v)_w / \rho_e u_e$) и температура стенки T_w , известные из опыта. В случае $F' = 0$ на участках отсоса принималось $\partial T / \partial y = 0, y = 0$.

С опытными данными сравнивались расчетные значения температуры и числа Стантона на участках вдува. Число Стантона определялось в виде

$$St = -\lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_w \right) / c_p \rho_e u_e (T_r - T_w)$$

где T_r — температура восстановления.

Поскольку для нахождения числа Стантона необходимо знание параметров восстановления, то расчеты выполнялись в двух вариантах. Вначале рассчитывался пограничный слой при наличии вдува и отсоса, но при отсутствии теплового потока в стенку, в результате определялись



Фиг. 5

температура восстановления и коэффициент восстановления на пронцаемых участках. Коэффициент восстановления определялся по формуле

$$r = (T_r - T_e) / (T_s - T_e)$$

где T_e — статическая температура газового потока, T_s — температура торможения газового потока.

Затем расчет повторялся при граничных условиях, соответствующих опытам; тепловой поток в этих случаях был отличен от нуля и определялся из условия (4.1). Результаты двух примеров расчета показаны на фиг. 5, сплошные линии соответствуют случаю $F = 0.001, F' = 0$; пунктирные линии — случаю $F = 0.001, F' = -0.007$. На оси абсцисс показано расположение участков вдува (стрелка вверх) и участков отсоса (стрелка вниз). Коэффициент восстановления r (фиг. 5, верхний график) при нулевом отсосе меняется вдоль пластины в узких пределах; при наличии отсоса изменение r более значительно, на участках отсоса величина r существенно возрастает.

Изменение расчетной температуры поверхности показано на фиг. 5 (средний график), на графике показаны также опытные значения темпе-

ратуры проницаемой стенки для случаев $F=0.001$, $F'=0$ (светлые точки) и $F=0.001$, $F'=-0.007$ (темные точки). Изменение расчетного числа Стантона на участках вдува приведено на нижнем графике фиг. 5, там же нанесены опытные значения St [⁴] для случая $F=0.001$, $F'=0$ в виде светлых треугольников и для случая $F=0.001$, $F'=-0.007$ в виде темных треугольников.

Расчетные значения St находятся в удовлетворительном соответствии с опытными.

Как видно из фиг. 5, при наличии отсоса числа Стантона на следующих за участками отсоса секциях вдува увеличиваются по сравнению со случаем $F'=0$.

Авторы признательны Г. А. Тирскому и Г. А. Любимову за обсуждение работы.

Поступила 16 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Driest E. R., Van.* On turbulent flow near a wall. *J. Aeronaut. Sci.*, 1956, vol. 23, No. 11.
2. Совершенный В. Д. Модель полной вязкости в пристеночной области турбулентного пограничного слоя. *Инж.-физ. ж.*, 1974, т. 27, № 5.
3. Алексин В. А., Совершенный В. Д. Численный расчет турбулентного пограничного слоя с резким изменением граничных условий. В сб. «Турбулентные течения». М., «Наука», 1977.
4. Леонтьев А. И., Рождественский В. И., Виноградов Ю. А., Сысоев В. И. Экспериментальное исследование теплообмена на плоской проницаемой поверхности при чередовании участков вдува и отсоса. *Тепломассообмен* — 5, т. 1, ч. 2. Минск, 1976.
5. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое. В сб. «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы». М., «Наука», 1964.
6. *Kays W. M.* Heat transfer to the transpired turbulent boundary layer. *Intern. J. Heat and Mass Transfer*, 1972, vol. 15, No. 5.
7. Юревич Ф. Б., Чупрасов В. В. Влияние массопереноса в пограничном слое на теплообмен (обзор). *Изв. АН БССР. Сер. физ.-энерг. н.*, 1970, № 3.
8. *Wooldridge C. E., Muzzy R. J.* Boundary-layer turbulence measurements with mass addition and combustion. *AIAA Journal*, 1966, vol. 4, No. 11.
9. *Simpson R. L., Moffat R. J., Kays W. M.* The turbulent boundary layer on a porous plate: experimental skin friction with variable injection and suction. *Intern. J. Heat and Mass Transfer*, 1969, vol. 12, No. 7.
10. *Simpson R. L.* The effect of a discontinuity in wall blowing on the turbulent incompressible boundary layer. *Intern. J. Heat and Mass Transfer*, 1971, vol. 14, No. 12.