

О ДИФФУЗИИ К ЦЕПОЧКЕ КАПЕЛЬ (ПУЗЫРЕЙ)
ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ПЕКЛЕ

Ю. П. ГУПАЛО, А. Д. ПОЛЯНИН, Ю. С. РЯЗАНЦЕВ

(Москва)

В работе исследуется задача о диффузии растворенного в потоке вещества к поглощающим каплям (пузырям), движущимся одна за другой в вязкой несжимаемой жидкости. Получено приближенное аналитическое выражение для дифференциального и интегрального потоков вещества на поверхность каждой капли с учетом изменений полей скорости и концентрации, обусловленных присутствием других капель.

Рассмотрена цепочка сферических капель равного радиуса, расположенных на оси однородно-поступательного потока. Показано, что если расстояние между каплями, отнесенное к радиусу капель, удовлетворяет неравенству $1 \ll l \ll P^{1/2}$ (P — число Пекле), то интегральный приток вещества к поверхности второй капли цепочки в 2.41 раза меньше интегрального притока первой (нумерация капель ведется по потоку); а полный диффузионный поток на поверхность произвольной капли с номером k определяется выражением

$$I_k = I_1 [k^{1/2} - (k-1)^{1/2}]$$

где I_1 — полный поток на первую каплю цепочки.

Рассмотрен случай диффузионного взаимодействия твердой частицы и капли. Показано, что для частиц, движущихся одна за другой с одинаковой скоростью в покоящейся жидкости, наличие капли перед твердой частицей приводит к резкому уменьшению полного диффузионного потока твердой (в $O(P^{1/6})$ раз), а наличие твердой частицы перед жидкой не влияет (в главном приближении по характерному параметру диффузии) на полный поток последней.

1. Постановка задачи. Рассматривается установившаяся конвективная диффузия растворенного в потоке вещества к поверхностям нескольких осесимметричных капель (пузырей), расположенных одна за другой на оси ламинарного потока вязкой несжимаемой жидкости.

Предполагается, что для каждой капли может быть введена сферическая система координат, в которой уравнение поверхности $r_k = R_k(\theta_k)$, k — номер частицы, является однозначной функцией θ_k . При наличии двух критических точек, лежащих на оси симметрии, полярный угол отсчитывается от критической точки вытекания. В дальнейшем будет использоваться безразмерная форма записи, где в качестве масштабов выбраны величины: a — характерный размер капель, U , c_0 — характерные скорость и концентрация в набегающем потоке.

Обтекание капель считается ламинарным без застойных зон; поле скоростей, определяемое функцией тока ψ , предполагается известным из решения соответствующей задачи о гидродинамическом обтекании (например, [1-5]).

Для каждой частицы функция тока в области, не захватывающей других частиц, обладает следующими свойствами:

$$(1.1) \quad \psi(r, \theta) |_{r \rightarrow R(\theta)} \rightarrow (r - R(\theta)) f(\theta), \quad f(\theta) = [\partial \psi / \partial r]_{r=R(\theta)}$$

$$(1.2) \quad \psi(r, \theta) |_{\theta \rightarrow 0} \rightarrow A(r) \theta^2, \quad A(r) = \frac{1}{2} [\partial^2 \psi / \partial \theta^2]_{\theta=0}$$

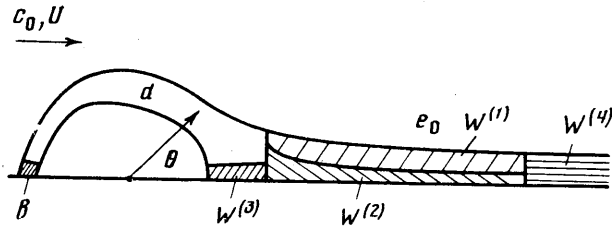
$$(1.3) \quad \psi(r, \theta) \Big|_{\substack{r \rightarrow R(\theta) \\ \theta \rightarrow 0}} \rightarrow \frac{\alpha}{2} (r - R_0) \theta^2, \quad R_0 = R(0),$$

$$\alpha = [\partial^3 \psi / \partial r \partial \theta^2]_{\substack{r=R_0 \\ \theta=0}}$$

Здесь и далее, где это не приводит к путанице, индекс k будет опускаться, свойство (1.1) следует из условия прилипания на поверхности капли, свойство (1.2) — из осесимметрии, свойство (1.3) — следствие (1.1) и (1.2).

Распределение концентрации в потоке определяется решением уравнения конвективной диффузии с граничными условиями постоянства концентрации вдали от капель и полного поглощения на их поверхностях.

Число Пекле считается большим, что позволяет применить в задаче метод сращиваемых асимптотических разложений. При этом условие для концентрации растворенного вещества в набегающем потоке для каждой



Фиг. 1

капли зависит от ее относительного положения и устанавливается из решения задачи о диффузии к каплям, расположенным выше по потоку. Поэтому определение диффузионного притока вещества к каждой из капель должно проводиться последовательно, начиная с первой.

Отметим, что аналогичный анализ для твердых частиц был проведен в [6].

2. Одиночная капля. При анализе распределения концентрации около одиночной поглощающей капли будем следовать работе [7], в которой аналогичный анализ выполнен для стоксова обтекания сферической капли однородно-поступательным потоком. В сферической системе координат уравнение конвективной диффузии и граничные условия имеют вид

$$(2.1) \quad \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial c}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) =$$

$$= e^2 \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) \right]$$

$$c|_{r \rightarrow \infty} = 1, \quad c|_{r=R(\theta)} = 0; \quad \frac{\partial c}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{\partial c}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi} = 0,$$

$$e = P^{-1/2}, \quad P = \frac{aU}{D}$$

где D — коэффициент диффузии.

Асимптотический анализ уравнения (2.1) с учетом (1.1)–(1.3) показывает, что при $e \ll 1$ в окрестности капли в потоке можно выделить несколько областей с различным механизмом массопереноса, которые схематически показаны на фиг. 1. Это внешняя область e_0 , диффузионный пограничный слой d , область передней критической точки b и область

диффузионного следа W , которая в свою очередь состоит из подобластей $W^{(i)}$ ($i=1, 2, 3, 4$). В каждой из областей уравнение (2.1) заменяется приближенным путем выделения главных членов разложений по малому параметру e . Соответствие между решениями в этих областях устанавливается асимптотическим сращиванием на их условных границах. Отметим, что аналогичное исследование диффузионного следа за твердой частицей, в потоках с изолированными критическими точками, проведено в [8, 9], а при наличии критических линий на поверхности частицы (например, чистосдвиговой поток) — в [10].

Во внешней области $e_0 = \{e \ll r - R(\theta), e \ll \theta\}$, здесь и далее неравенства в фигурных скобках указывают порядок характерных размеров рассматриваемой области, правая часть уравнения (2.1) пренебрежимо мала, роль диффузии в переносе вещества незначительна. Концентрация в этой области сохраняет постоянное значение, равное значению на бесконечности.

В области передней критической точки $b = \{(r - R(\theta)) \ll e, \pi - \theta \ll e\}$ уравнение (2.1) может быть несколько упрощено, однако в нем сохраняются члены, описывающие диффузию как в тангенциальном, так и в нормальном направлениях. Можно показать, что влияние этой области на распределение концентрации в остальных областях не дает вклада в главные члены соответствующих разложений.

Массообмен в пограничном слое $d = \{r - R(\theta) \ll e, e \ll \theta\}$, слагающийся из конвекции вдоль поверхности капли и диффузии в поперечном направлении, играет определяющую роль в переносе растворенной компоненты к поверхности капли и рассматривается во многих работах (например, [11, 12]). Распределение концентрации в диффузионном пограничном слое имеет вид [12]

$$c^{(d)} = \operatorname{erf}(z/2t^{1/2}), \quad z = e^{-1}\psi$$

$$(2.2)$$

$$t = t(\theta) = \int_0^\pi \sin \tau R^2(\tau) [1 + (R_\tau'/R)^2] f(\tau) d\tau$$

Здесь функция $t(\theta)$ определена в (1.1).

Область диффузионного следа, граница которого определяется $\psi \sim e$, вносит относительно малый вклад в полный диффузионный поток на каплю, равный $O(e)$ [7]. Однако поле концентрации в следе существенно влияет на интенсивность массообмена капель, движущихся за первой каплей.

Оценка отдельных членов уравнения (2.1) в конвективно-погранслоевой области следа $W^{(1)} = \{e \ll r - R_0, e^2 \ll \psi \ll e\}$ показывает, что здесь правой частью уравнения можно пренебречь по сравнению с левой. Поэтому концентрация зависит только от функции тока и вдоль линий тока сохраняет постоянные значения, равные значениям на выходе из диффузионного погранслоя. Явное выражение для концентрации в $W^{(1)}$ определяется сращиванием с решением (2.2) и имеет вид

$$(2.3) \quad c^{(1)}(z) = c^{(d)}(z, \theta \rightarrow 0) = \operatorname{erf}(z/2(t^0)^{1/2}), \quad t^0 = t(0)$$

Область задней критической точки $W^{(3)} = \{r - R_0 = y \ll e, \theta \ll e\}$, в которой существенны как нормальный, так и тангенциальный перенос, и внутреннюю область диффузионного следа $W^{(2)} = \{\psi \ll e^2, e \ll y \ll e^{-1}\}$, в которой радиальным переносом можно пренебречь, рассмотрим совместно.

Уравнение и граничные условия для $W^{(2)}$ имеют вид

$$(2.4) \quad \frac{\partial c^{(2)}}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial c^{(2)}}{\partial \xi}, \quad \xi = e^{-2}\psi$$

$$\left[\sqrt{\xi} \frac{\partial c^{(2)}}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} = 0, \quad c^{(2)}|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{e}{\sqrt{\pi t^{\circ}}} \xi$$

а распределение концентрации в области задней критической точки $W^{(3)}$ определяется ($S = \alpha^{1/2} e^{-1}\theta$, $Y = \alpha^{1/2} (R_0 e)^{-1} (r - R_0)$)

$$(2.5) \quad Y \frac{\partial c^{(3)}}{\partial Y} - \frac{S}{2} \frac{\partial c^{(3)}}{\partial S} = \frac{\partial^2 c^{(3)}}{\partial Y^2} + \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial S} S \frac{\partial c^{(3)}}{\partial S}$$

$$c^{(3)}|_{Y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial c^{(3)}}{\partial S} \right|_{S=0} = 0, \quad c^{(3)}|_{S \rightarrow \infty} \rightarrow c^{(d)}|_{\theta \rightarrow 0} = \frac{e^2 R_0}{2\sqrt{\pi t^{\circ}} \alpha} Y S^2$$

Здесь третье граничное условие — условие срачивания с решением диффузионного погранслоя d , коэффициент α определен в выражении (1.3).

Для завершения формулировки задачи (2.4), (2.5) необходимо добавить условие срачивания решений в областях $W^{(2)}$ и $W^{(3)}$

$$(2.6) \quad c^{(3)}(Y \rightarrow \infty) = c^{(2)}(y \rightarrow 0)$$

Из (2.4), (2.5) видно, что в области $W^{(2)}$ концентрация имеет порядок e , а в $W^{(3)}$ — порядок e^2 . Поэтому для выполнения (2.6) необходимо потребовать

$$(2.7) \quad c^{(2)}(y, \xi(y, \theta))|_{y \rightarrow 0, \theta = \text{const} \rightarrow 0}$$

Распределение концентрации в областях $W^{(2)}$ и $W^{(3)}$, определяемое выражениями (2.4) — (2.7), имеет вид

$$(2.8) \quad c^{(2)}(y, \xi) = \frac{e}{\sqrt{\pi t^{\circ}}} (\xi + 2y)$$

$$c^{(3)}(Y, S) = \frac{e^2 R_0}{2\sqrt{\pi t^{\circ}} \alpha} Y (S^2 + 4)$$

Из выражения (2.8) видно, что локальный диффузионный поток на поверхность капли имеет порядок e и равен

$$j^{(3)} = [\partial c^{(3)} / \partial r]_{r=R_0} = 1/2 e R_0 (\pi t^{\circ} \alpha)^{-1/2} (S^2 + 4)$$

Рассмотрим теперь область смешения $W^{(4)} = \{e^{-1} \ll r, \psi \ll e\}$, в которой существует лишь тангенциальный перенос. Концентрация в $W^{(4)}$ удовлетворяет следующему уравнению и граничным условиям:

$$(2.9) \quad \frac{\partial c^{(4)}}{\partial \rho} = 2 \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial c^{(4)}}{\partial z}, \quad (z = e^{-1}\psi, \quad \rho = ey)$$

$$\left[\sqrt{z} (\partial c^{(4)} / \partial z) \right]_{z=0} = 0, \quad c^{(4)}(z \rightarrow \infty) = 1$$

$$c^{(4)}|_{\rho \rightarrow 0} = [c^{(1)} + c^{(2)} - (\pi t^{\circ})^{-1/2} z]_{y \rightarrow \infty}$$

Здесь начальное условие определяется срачиванием с решениями в областях $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$.

Функция

$$(2.10) \quad c^{(4)}(z, \rho) = \mathbf{B}(z, \rho) * c^{(1)}(z)$$

$$\mathbf{B}(z, \rho) * u(z) = \int_0^\infty \frac{1}{2\rho} \exp\left(-\frac{z+z^*}{2\rho}\right) I_0\left(\frac{\sqrt{zz^*}}{\rho}\right) u(z^*) dz^*$$

удовлетворяет уравнению и первым двум граничным условиям (2.9), а при фиксированном z и $\rho \rightarrow 0$, $c^{(4)}(z, \rho) \rightarrow c^{(1)}(z)$ [13]; I_ν — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка ν .

Докажем теперь, что функция $c^{(4)}(z, \rho)$ в соответствующем предельном переходе согласуется с решением во внутренней области диффузионного следа $W^{(2)}$ (2.8). Так как в $W^{(2)}$ $z \sim e$ и $\rho \sim e$, то это соответствует следующему предельному переходу в (2.10): $\rho \rightarrow 0$, $\rho/z = 2\kappa = \text{const}$.

Заменой $z^* = \rho^2 z^{-1} \lambda^2$ интеграл (2.10) приводится к виду

$$c^{(4)}(z, \rho) = 2\kappa e^{-1/4\kappa} \int_0^\infty \lambda e^{-\kappa \lambda^2} I_0(\lambda) c^{(1)}(2\rho \kappa \lambda^2) d\lambda$$

Используя выражение (2.3) и ограничиваясь первым членом разложения $c^{(1)}$ в ряд по степеням ρ , получаем

$$(2.11) \quad c^{(4)} \rightarrow \frac{4\kappa^2 \rho}{\sqrt{\pi t^0}} e^{-1/4\kappa} \int_0^\infty \lambda^3 e^{-\kappa \lambda^2} I_0(\lambda) d\lambda = \\ = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi t^0}} \Phi\left(-1, 1, -\frac{1}{4\kappa}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t^0}} (z + 2\rho)$$

($\rho \rightarrow 0$, $\rho/z = \text{const}$)

Здесь при вычислении предела были использованы следующие соотношения [14]:

$$(2.12) \quad \int_0^\infty \lambda^{\Delta-1} e^{-\kappa \lambda^2} I_0(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\Delta}{2}\right) \kappa^{-\Delta/2} e^{1/4\kappa} \times \\ \times \Phi\left(1 - \frac{\Delta}{2}, 1, -\frac{1}{4\kappa}\right), \quad \Phi(-1, 1, x) = 1 - x$$

где $\Phi(a, c, x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Из выражения (2.12) видно, что $c^{(4)}(z, \rho)$ согласуется с решением во внутренней области следа $W^{(2)}$. Поэтому формула (2.10) задает распределение концентрации в области смешения $W^{(4)}$.

Используя (2.11), можно показать, что если подействовать оператором $\mathbf{B}(z, \rho)$ на первый член разложения $c^{(1)}$ в ряд по степеням z , то получим распределение концентрации в области смешения $W^{(2)}$ (2.8)

$$\mathbf{B}(z, \rho) * z / \sqrt{\pi t^0} = c^{(2)}(\xi, y), \quad (z = e\xi, \rho = ey)$$

Поэтому выражение для концентрации в $W^{(2)}$, полученное в работе [6], упрощается и принимает вид (2.10).

Отметим, что аналогично случаю капли можно получить распределение концентрации во внутренней области диффузионного следа за твердой частицей [7, 8]. Для этого достаточно подействовать оператором \mathbf{B}_1

$$V_1(\xi, \rho_1) * u(\xi) = \int_0^{\infty} \frac{\xi^*}{2\rho_1} \exp\left(-\frac{\xi^2 + \xi^{*2}}{4\rho_1}\right) I_0\left(\frac{\xi\xi^*}{2\rho_1}\right) u(\xi^*) d\xi^*$$

на первый член разложения $c^{(1)}(\xi)$ в ряд по степеням $\xi = e^{-2/3}\psi^{1/2}$ (ψ — функция тока)

$$\begin{aligned} V_1(\xi, \rho_1) * 3^{1/2}\Gamma^{-1}(1/3)(\tau^0)^{-1/3}\xi &= c^{(2)}(y, \zeta) = \\ &= e^{1/3} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1/3)} \frac{2^{1/2}3^{1/3}}{(\tau^0)^{1/3}} y^{1/2} \Phi\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{\zeta}{2y}\right), \quad \left(\rho_1 = \frac{1}{2} e^{2/3}y\right) \end{aligned}$$

Это утверждение доказывается с помощью первого равенства в (2.12) для $\Delta=3$. Поэтому выражения для концентрации в области смешения, полученные в случае твердой частицы в [7, 9], упрощаются и принимают вид

$$c^{(4)}(\xi, \rho_1) = V_1(\xi, \rho_1) * \Gamma^{-1}(1/3) \gamma(1/3, \xi^3/9t^0)$$

где γ — неполная гамма-функция.

Выражения (2.2), (2.3), (2.8), описывающие распределение концентрации в областях d , $W^{(i)}$ ($i=1, 2, 3$), можно записать единой формулой, справедливой при $r \ll e^{-1}$

$$(2.13) \quad c^*(r, \psi) = \operatorname{erf}(\psi/2e\sqrt{t(\theta)}) + 2e(r-1)/\sqrt{\pi t^0}$$

где ψ — функция тока, $t(\theta)$ определена в выражении (2.2).

В отличие от случая твердой частицы, когда концентрация на оси потока растет пропорционально корню квадратному из расстояния до ее поверхности [9], рост концентрации за каплей линейный. С другой стороны, порядок концентрации во внутренней области следа за каплей ($P^{-1/2}$) меньше, чем за твердой частицей ($P^{-1/3}$). Это показывает, что за каплей имеются более удобные условия для перемешивания, а раствор более обеднен по сравнению с твердой частицей.

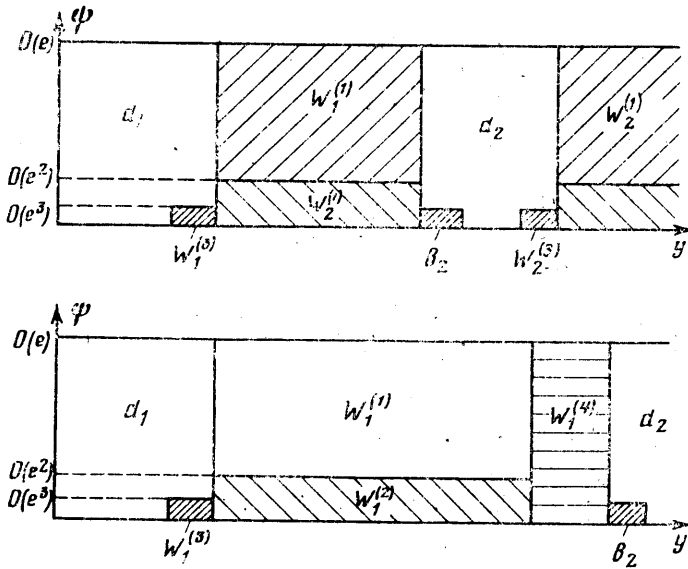
3. Произвольное число капель (пузырей). Здесь рассмотрим задачу о диффузии растворенного в потоке вещества к системе осесимметричных поглощающих капель, расположенных одна за другой по оси потока. Основная цель здесь — определение полных диффузионных потоков на поверхность каждой капли. Как и в п. 2, считаем, что у каждой капли есть только две критические точки, лежащие на оси потока.

Следа за фиксированной линией тока, которая вблизи первой капли лежит в секторе $\theta^0 \ll e$, видим, что она выходит из него около поверхности второй капли. Поэтому результаты, полученные в п. 2, становятся неприменимыми при $r_2 - R_2(\pi) \sim e$ (фиг. 2.)

На поверхности второй капли можно выделить области передней $b_2 = \{r_2 - R_2(\theta_2) \ll e, \pi - \theta_2 \ll e\}$ и задней $W_2^{(3)} = \{r_2 - R_2(\theta_2) \ll e, \theta_2 \ll e\}$ критических точек, и область диффузионного погранслоя $d_2 = \{r_2 - R_2(\theta_2) \ll e, e \ll \theta_2\}$. Вклады областей b_2 и $W_2^{(3)}$ в полный диффузионный поток на каплю несущественны по сравнению с вкладом d_2 . Поэтому для нахождения главного члена разложения полного диффузионного потока на частицу достаточно получить решение в диффузионном погранслое d_2 .

Условие натекания «на входе» в погранслоя d_2 зависит от расстояния между каплями l_1 ; при $l_1 \ll e^{-1}$ оно определяется распределением концентрации в областях $W_1^{(1)}$ и $W_1^{(2)}$, а при $e^{-1} \ll l_1$ — выражением (2.10) для распределения концентрации в области смешения (фиг. 2).

Рассмотрим сначала случай $l_k \ll e^{-1}$ ($k=1, 2, \dots, N$). Можно показать, что распределение концентрации во внутренней области $W_1^{(2)}$ не влияет на старший член разложения решения в диффузионном погранслое d_2 .



Фиг. 2

Поэтому условие натекания для второй капли определяется выражением (2.3).

Аналогично рассуждениям, проведенным для первой капли, можно показать, что в окрестности второй капли существует диффузионный след W_2 , конвективно-пограничная область которого будет задавать условие натекания для диффузионного погранслоя третьей капли...

Рекуррентная система уравнений, описывающая распределение концентрации в диффузионном погранслое капли цепочки, имеет вид

$$(3.1) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t_k} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) c_k^{(d)} = 0, \quad (k=1, 2, \dots, N)$$

$$c_k^{(d)}|_{z=0} = 0, \quad c_k^{(d)}|_{z=\infty} = 1 \quad (z=e^{-1}\psi)$$

$$c_k^{(d)}|_{t_k=0} = c_{k-1}^{(d)}(z, t_{k-1}^{\circ}), \quad c_0 \equiv 1$$

$$t_k = t_k(\theta_k) = \int_{\theta_k}^{\pi} \sin \tau \left[R_k^2 + \left(\frac{d}{d\tau} R_k \right)^2 \right] f_k(\tau) d\tau, \quad t_k^{\circ} = t_k(0)$$

Введение новой переменной

$$(3.2) \quad t^* = \sum_{i=1}^{k-1} t_i^{\circ} + t_k$$

сводит систему (3.1) к уравнению

$$(3.3) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t^*} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) c = 0$$

$$c|_{t^*=0} = 1, \quad c|_{z=0} = 0, \quad c|_{z=\infty} = 1$$

Распределение концентрации в диффузионном погранслое k -й капли определяется решением задачи (3.3) и имеет вид

$$(3.4) \quad c_k^{(d)}(z, t_k) = \operatorname{erf} \left(z / \sqrt{2} \sqrt{\sum_{i=1}^{k-1} t_i^\circ + t_k(\theta_k)} \right)$$

Локальный и полный диффузионные потоки на k -ю каплю задаются выражениями

$$(3.5) \quad j_k(\theta_k) = \frac{\partial c_k^{(d)}}{\partial n} \Big|_{r_k=R_k(\theta_k)} = \frac{f_k(\theta_k)}{e\sqrt{\pi}R_k} \times \\ \times \sqrt{R_k^2 + (dR_k/d\theta)^2} \cdot \left[\sum_{i=1}^{k-1} t_i^\circ + t_k(\theta_k) \right]^{-1/2} \\ I_k = 2\pi \int_0^\pi \sin \tau R_k^2(\tau) j_k(\tau) d\tau \\ I_k^\circ = \frac{4}{e\sqrt{\pi}} \left[\left(\sum_{i=1}^k t_i^\circ \right)^{1/2} - \left(\sum_{i=1}^{k-1} t_i^\circ \right)^{1/2} \right]$$

Здесь I_k° — полный диффузионный поток на сферическую каплю.

Рассмотрим цепочку сферических капель (пузырей) равного радиуса, обтекаемых однородно-поступательным потоком. Функция тока вблизи поверхности капли имеет вид

$$(3.6) \quad \Psi_k = \frac{1}{2(\beta+1)} (r_k-1) \sin^2 \theta_k, \quad 1 \ll l_k \ll e^{-1}$$

Для t_k° из последнего выражения (3.1) получаем $t_k^\circ = 2/3(\beta+1)$. Окончательно для полного диффузионного потока на поверхность k -й капли цепочки имеем

$$(3.7) \quad I_k = I_1 [k^{1/2} - (k-1)^{1/2}], \quad I_\Sigma = \sum_{k=1}^N I_k = I_1 N^{1/2}$$

$$I_1 = 4e^{-1} \sqrt{2\pi/3(\beta+1)} \quad (I_k \rightarrow 1/2 I_1 k^{-1/2}, \quad k \rightarrow \infty)$$

Здесь I_1 — полный диффузионный поток на поверхность первой капли ($\beta=0$ соответствует газовому пузырю).

Из выражений (3.7) видно, что капли взаимодействуют одна с другой сильнее, чем твердые частицы [6], так как полный диффузионный поток на их поверхности быстрее стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ (для твердых сфер $I_k \rightarrow \frac{2}{3} I_1 k^{-1/2}$, $k \rightarrow \infty$), а суммарный поток I_Σ определяется корнем квадратным из N и растет медленнее (по N), чем в случае твердых частиц ($I_\Sigma = I_1 N^{2/3}$).

Случай $e^{-1} \ll l_k$ ($k=1, \dots, N$). Если расстояние между частицами много больше e^{-1} , то условие натекания для диффузионного пограничного слоя d_2 второй капли будет определяться областью смешения диффузионного следа первой капли $W_{k-1}^{(4)}$ (фиг. 2). Уравнение и граничные условия для распределения концентрации в диффузионном погранслое второй капли имеют вид

$$(3.8) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t_2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) c_2^{(d)} = 0, \quad c_2^{(d)}|_{z=0} = 0, \quad c_2^{(d)}|_{z=\infty} = 1, \\ c_2^{(d)}|_{t_2=0} = c_1^{(4)}(z, \rho_1)|_{\rho_1=e l_1}$$

Здесь t_2 — определено в выражении (3.5), а $c_1^{(4)}(z, \rho_1)$ — в (2.10).
Решение задачи (3.8) имеет вид

$$(3.9) \quad c_2^{(d)}(z, t_2) = L(z, t_2) * c_1^{(4)}(z, e l_1),$$

$$L(z, t) * u(z) = \int_0^{\infty} \frac{(zz^*)^{1/2}}{2t} \exp\left(-\frac{z^2+z^{*2}}{4t}\right) I_{1/2}\left(\frac{zz^*}{2t}\right) u(z^*) dz^*$$

Проводя рассуждения аналогично случаю $l_k \ll e^{-1}$, можно получить распределение концентрации в диффузионном погранслое k -й частицы

$$(3.10) \quad c_k^{(d)}(z, t_k) = L(z, t_k) * c_{k-1}^{(4)}(z, e l_k), \quad c_0^{(4)} = 1,$$

$$c_k^{(4)}(z, \rho_k) = B(z, \rho_k) * c_k^{(d)}(z, t_k^{\circ})$$

Отметим, что распределение концентрации во внутренней области $W_k^{(2)}$ k -й частицы определяется формулой

$$c_k^{(2)}(\xi, y_k) = p_k(\xi + 2y_k), \quad p_k = [\partial c_k^{(d)} / \partial z]_{z=0, t_k=e^{-1}}$$

Выражение для распределения концентрации в области смешения диффузионного следа капель $c_{k-1}^{(4)}$ при $l_{k-1} \ll e^{-1}$ переходит в решение конвективно-погранслоевой области следа, поэтому $c_{k-1}^{(4)}$ задает равномерно-пригодное по e условие натекания для диффузионного пограничного слоя k -й капли. Это говорит о том, что формула (3.10) справедлива для любых расстояний между каплями.

Дифференциальный и полный диффузионный потоки на k -ю каплю определяются

$$(3.11) \quad j_k(\theta_k) = \frac{\partial c_k^{(d)}}{\partial n} \Big|_{r_k=R_k(\theta_k)} = e^{-1} f_k(\theta_k) \sqrt{1 + (R_k'/R_k)^2} h_k(\theta_k)$$

$$I_k = 2\pi \int_0^{\pi} \sin \tau R_k^2(\tau) j_k(\tau) d\tau, \quad I_k^{\circ} = 2\pi e^{-1} \int_0^{\theta_k^{\circ}} h_k(\tau) d\tau$$

$$h_k(\theta_k) = \int_0^{\infty} \frac{z^*}{2\sqrt{\pi t_k}^{1/2}} \exp\left(-\frac{z^{*2}}{4t_k}\right) c_{k-1}^{(4)}(z^*, e l_{k-1}) dz^*$$

Здесь I_k° — полный диффузионный поток на каплю сферической формы. При $l_{k-1} \ll e^{-1}$ соотношения (3.10), (3.11) переходят в формулы (3.5), (3.7).

Если предположить, что поле течения не содержит областей замкнутой циркуляции, то все результаты, полученные выше, можно обобщить, аналогично тому как это делалось в [12], на случай, когда на каплях помимо изолированных критических точек есть еще и критические линии.

4. Взаимодействие твердых частиц и капель. Здесь рассмотрим задачу о диффузионном взаимодействии капель и твердых частиц. Для простоты ограничимся случаем двух частиц.

Рассмотрим сначала влияние диффузионного следа капли на твердую частицу. Предполагаем, что расстояние между частицами удовлетворяет соотношению $l \ll e^{-1}$, тогда условие натекания для твердой частицы будет определяться распределением концентрации в конвективно-погранслоевой области капли (фиг. 3).

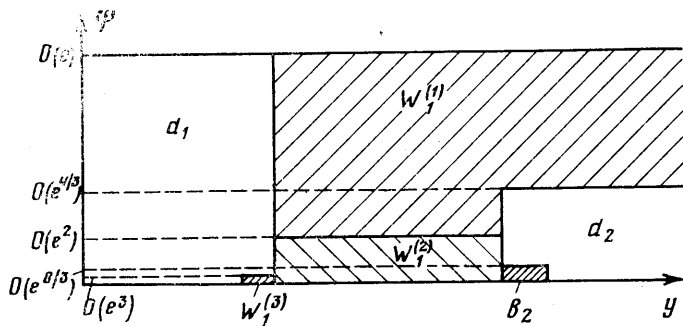
Распределение концентрации в диффузионном пограничном слое твердой частицы $d_2 = \{r_2 - R_2(\theta_2) \ll e^{2/3}, e^{2/3} \ll \theta_2\}$ определяется решением следующей задачи:

$$(4.1) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \xi^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) c = 0, \quad (\xi = e^{-2/3} \psi^{1/2})$$

$$c|_{\xi=0} = 0, \quad c|_{\tau=0} = c_1^{(1)}(z \rightarrow 0) = e^{1/6} (\pi t_1^0)^{-1/2} \xi^2$$

$$\tau = \tau(\theta_2) = \frac{1}{2} \int_{\theta_2}^{\pi} \sin \tau [R_2^2 + (R_2')^2] g_2^{1/2}(\tau) d\tau, \quad g_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \Big|_{r_2 = R_2(\theta_2)}$$

Здесь начальное условие определяется сращиванием с решением (2.3) в конвективно-погранслойной области следа капли.



Фиг. 3

Решение задачи (4.1) определяется выражением [13]

$$(4.2) \quad c(\xi, \tau) = \frac{e^{1/6}}{\sqrt{\pi t_1^0}} \left\{ \xi^2 + 2 \int_0^{\tau} \int_0^{\infty} \frac{(\xi \xi^*)^{1/2}}{3 \tau^*} \exp\left(-\frac{\xi^2 + \xi^{*3}}{9 \tau^*}\right) \times \right. \\ \left. \times I_{1/2} \left(\frac{2(\xi \xi^*)^{3/2}}{9 \tau^*} \right) d\xi^* d\tau^* \right\}$$

Дифференциальный и полный диффузионные потоки на твердую частицу определяются

$$(4.3) \quad j_2(\theta_2) = \frac{\partial c}{\partial n} \Big|_{r_2 = R_2(\theta_2)} = \\ = \frac{g_2^{1/2}(\theta_2)}{e^{1/6}} \frac{2 \cdot 3^{2/3} \Gamma(2/3) \tau^{1/6}}{(\pi t_1^0)^{1/2} \Gamma(1/3)} \\ I_2 = 2\pi \int_0^{\pi} \sin \tau R_2^2(\tau) j_2(\tau) d\tau, \\ I_2^0 = \frac{2\sqrt{\pi} \cdot 3^{2/3} \Gamma(2/3) \tau_0^{1/6}}{\sqrt{t_1^0} \Gamma(1/3)} P^{1/6}, \quad \tau_0 = \tau(0)$$

Здесь I_2° — полный диффузионный поток на сферическую частицу. Из (4.2) — (4.4) видно, что диффузионный след капли сильно снижает массообмен твердой частицы со средой. В этом случае диффузионный поток на твердую частицу имеет порядок $I_2 \sim e^{-1/6}$, который в отсутствие капли был бы $O(e^{-2/3})$.

Если капля находится в диффузионном следе твердой частицы, то главное приближение по характерному параметру диффузии (e) для диффузионного погранслоя будет тем же, что и в отсутствие твердой частицы. При этом верны формулы

$$(4.4) \quad T = T^* (1 + O(P^{-1/6}))$$

где T — любой параметр, характеризующий диффузионный погранслой капли, а звездочка означает, что соответствующая величина вычислена без учета диффузионного взаимодействия капли и твердой частицы.

В заключение отметим, что при диффузионном взаимодействии частиц наиболее сильное влияние оказывает диффузионный след капли, который может снизить полный диффузионный поток на твердую частицу в $O(P^{1/6})$ раз, в то время как диффузионный след твердой частицы в главном приближении по характерному параметру диффузии не влияет на полный диффузионный поток капли. Диффузионное взаимодействие капли с каплей и твердой частицы с твердой может привести к изменению полного потока частицы, находящейся в диффузионном следе другой, в несколько раз.

Поступила 25 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Wacholder E., Weihs D. Slow motion of a fluid sphere in the vicinity of another sphere or a plane boundary. Chem. Engng Sci., 1972, vol. 27, No. 10.
2. Ruston E., Davies G. A. The slow unsteady settling of two fluid spheres along their line of centers. Appl. Sci. Res., 1973, vol. 28, No. 1, 2.
3. Reed L. D., Morrison F. A. The slow motion of two touching fluid spheres along their line of centers. Intern. J. Multiphase Flow, 1974, vol. 1, No. 4.
4. Harper J. F. On the bubbles rising in line at large Reynolds numbers. J. Fluid Mech., 1970, vol. 41, No. 4.
5. Morrison F. A. Breakup a bubble chain. Chem. Engng Sci., 1973, vol. 28, No. 4.
6. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. О массообмене частиц, расположенных на оси потока, при больших числах Пекле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 2.
7. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. Массоперенос в диффузионном следе капли при стоксовом обтекании. ПММ, 1977, т. 41, вып. 2.
8. Sih P. H., Newman J. Mass transfer to the rear of a sphere in Stokes flow. Intern. J. Heat and Mass Transfer, 1967, vol. 10, No. 12.
9. Полянин А. Д. Распределение концентрации в диффузионном следе частицы, обтекаемой стоксовым потоком. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 1.
10. Полянин А. Д. О структуре диффузионного следа поглощающей частицы вблизи критических линий. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 3.
11. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
12. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. Диффузия к частице при больших числах Пекле в случае произвольного осесимметричного обтекания вязкой жидкостью. ПММ, 1976, т. 40, вып. 5.
13. Sutton W. G. L. On the equation of diffusion in a turbulent medium. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1943, vol. 182, No. 988.
14. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 2. М., «Наука», 1973.