МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1978

УДК 532.58

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА КОНТУР СО СТОРОНЫ ПОТОКА ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПОСТОЯННОЙ ЗАВИХРЕННОСТЬЮ

С. Д. ВИЛЬХОВЧЕНКО

(Москва)

Общая теория движения деформирующегося контура в потенциальном потоке изложена в монографии [1]. Для плоских потоков с постоянной завихренностью много работ посвящено частному случаю этих потоков — сдвиговому потоку, в который помещался неподвижный контур. В работах [2–4] рассмотрены профили частного вида, в [5] — общий случай. Движение произвольного твердого контура в сдвиговом потоке с переменной поступательной составляющей рассмотрено в [6]. В [7] получено точное выражение для силы, действующей на движущуюся окружность переменного радиуса со стороны произвольного плоского потока с постоянной завихренностью. В [8] получена формула для силы, действующей на движущийся деформирующийся контур со стороны произвольного линейного потока, однако результат не был представлен через характеристики потока и формы контура.

В настоящей работе задача с однородно-завихренным потоком сведена к задаче с потенциальным потоком. Для определенного класса потоков разработан приближенный метод расчета гидродинамического воздействия на контур. С помощью этого метода в приближении линейного потока получены формулы для гидродинамических силы и момента. Результат представлен через локальные характеристики внешнего потока и гидродинамические характеристики формы контура. Приводятся свойства характеристик формы для контуров с одной и двумя осями симметрии. Установлены формулы для вычисления гидродинамических характеристик формы, основанные на конформном отображении.

1. Под внешним к данному контуру L потоком будем понимать разность между результирующим потоком и потоком, регулярным вне контура и связанным с присутствием последнего в жидкости. Если L — единственная граница жидкости, то внешний поток совпадает с невозмущенным. Будем предполагать дифференцируемость поля скоростей $\mathbf{v}$ внешнего потока в некотором круге K, содержащем контур. Центр K удобно помещать в центр площади контура, если расположение особых точек поля скоростей позволяет сделать такой выбор. Введем подвижную декартову систему координат с началом в центре K и радиус-вектором $\mathbf{z}$, движение которой определяется поступательной $\mathbf{A}$ и угловой $\mathbf{B}$ скоростями. В рассматриваемый момент времени t введем вспомогательную систему отсчета, совпадающую с подвижной системой координат и движущуюся с поступательной $\mathbf{v}_0$ и угловой $\boldsymbol{\omega}$ скоростями

$$\mathbf{v}_0(t)\equiv\mathbf{v}(0,t), \quad \boldsymbol{\omega}={}^1/_2\operatorname{rot}\mathbf{v}$$

Относительно новой системы отсчета внешний и результирующий потоки потенциальны, а поступательная $\mathbf{U}$ и угловая $\boldsymbol{\Omega}$ скорости, а также циркуляция Γ результирующего потока $\mathbf{q}$ равны

$$\mathbf{U}=\mathbf{A}-\mathbf{v}_0, \quad \boldsymbol{\Omega}=\mathbf{B}-\boldsymbol{\omega}, \quad \Gamma=C-2\omega S \tag{1.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}=\omega\mathbf{e}_3$; $\mathbf{e}_3$ — единичный вектор, ортогональный физической плоскости; S — площадь области G, ограниченной контуром; C — циркуляция по контуру результирующего поля скоростей в исходной системе отсчета. Интеграл динамических уравнений движений результирующего потока относительно новой системы отсчета можно записать в виде

$$(1.2)\qquad \frac{-(p-p_0)}{\rho}=-\frac{p'}{\rho}+\left(\frac{d\mathbf{v}_0}{dt}-\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{U}\right)\mathbf{z}+2\omega\psi-\frac{1}{2}\omega^2r^2$$

$$\frac{-p'}{\rho}=\frac{\delta\Phi}{\delta t}-(\mathbf{U}+\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{z})\mathbf{q}+\frac{|\mathbf{q}|^2}{2}$$

где p — давление, p_0 — функция только времени, Φ и ψ соответственно потенциал и функция тока поля скоростей $\mathbf{q}$, ρ — плотность жидкости, производные d/dt и $\delta/\delta t$ определяют изменение относительно исходной системы отсчета и подвижной системы координат соответственно, $r=|\mathbf{z}|$. Из последней формулы (1.1) следует:

$$(1.3)\qquad \frac{d\Gamma}{dt}=-2\omega\frac{dS}{dt}$$

т. е. поток q динамически возможен тогда и только тогда, когда деформация контура не сопровождается изменением площади S. Скалярное поле $2\omega\psi-p'/\rho$ однозначно всегда. Отсюда и из (1.2) можно получить следующие выражения для гидродинамических силы $\mathbf{F}$ и момента $\mathbf{M}$ относительно начала подвижной системы координат:

$$(1.4)\qquad \frac{\mathbf{F}}{\rho}=\frac{\mathbf{F}'}{\rho}+\boldsymbol{\omega}\times\left(2\frac{\delta}{\delta t}S\mathbf{c}+S\mathbf{U}\right)+S\left[\frac{d\mathbf{v}_0}{dt}-\omega\mathbf{c}(2\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\omega})\right]$$

$$\frac{\mathbf{M}}{\rho}=\frac{\mathbf{M}'}{\rho}+\boldsymbol{\omega}\left(\frac{\delta J}{\delta t}+\mathbf{U}S\mathbf{c}\right)+S\mathbf{c}\times\frac{d\mathbf{v}_0}{dt}$$

$$S\mathbf{c}=\int\limits_S\mathbf{z}\,ds,\qquad J=\int\limits_S r^2\,ds$$

Здесь $\mathbf{c}$ и J — соответственно центр площади и момент инерции фигуры G; $\mathbf{F}'$ и $\mathbf{M}'$ вычисляются по известным формулам [1], специализированным для непрерывного результирующего потока

$$(1.5)\qquad \frac{F'}{\rho}=iU\Gamma+\overline{\frac{i}{2}\int\limits_L\left(\frac{dw}{dz}\right)^2dz}+\frac{d'}{dt}\left[\frac{d'}{dt}Sc+SU+i\int\limits_L z\,dw\right]$$

$$\frac{M'}{\rho}=\operatorname{Re}\left[-i\bar{U}\left(\frac{d'}{dt}Sc+i\int\limits_L z\,dw\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int\limits_L z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2dz+\frac{\delta}{\delta t}\frac{1}{2}\int\limits_L z\bar{z}\,dw\right]$$

где производная d'/dt определяет изменение относительно вспомогательной системы отсчета, $z=z_1+iz_2$, $w(z)$ — комплексный потенциал векторного поля $\mathbf{q}$. Формулами (1.4), (1.5) задача с однородно-завихренным результирующим потоком сведена к задаче с потенциальным результирующим потоком, циркуляция которого, однако, может меняться при изменении площади, ограниченной контуром.

2. Рассмотрим класс внешних потоков $\mathbf{u}=\mathbf{v}-(\mathbf{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{z})$, для которых ряд Тейлора поля скоростей сходится в круге K. Тогда частичные суммы $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots$ этого ряда аппроксимируют с возрастающей точностью внешний

поток в K, а точное решение безграничной задачи о движении данного контура в потоке $\mathbf{S}_n$ является приближенным решением исходной задачи (не обязательно безграничной). Найдем решение для потока $\mathbf{S}_1$ — линейного потока. Его потенциал V можно записать в виде

$$V=\frac{1}{2}u_{mn}\pi_{mn},\qquad \pi_{mn}=z_m z_n-\delta_{mn}z_2{}^2,$$
$$u_{mn}(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_m}{\partial z_n}+\frac{\partial v_n}{\partial z_m}\right)(0,t) \tag{2.1}$$

Здесь и дальше используется запись суммирования по дважды повторяющимся индексам, которые пробегают значения 1, 2, δ_{mn} — символ Кронекера. Потенциал $\Phi=V+\varphi$ результирующего поля скоростей можно представить в виде

$$\Phi=\Gamma\varphi_-+\varphi_++U_j\varphi_j+\Omega\varphi_6+{}^1/{}_2u_{mn}(\pi_{mn}-\varphi_{mn}) \tag{2.2}$$

где все потенциалы, кроме φ_-, однозначны, определяются только формой контура и являются решениями следующих краевых задач:

$$\frac{\partial\varphi_-}{\partial\nu}=0,\qquad \int\limits_L d\varphi_-=1,\qquad \operatorname{grad}\varphi_-\to0,\qquad r\to\infty$$
$$\frac{\partial\varphi_+}{\partial\nu}=U_+,\qquad \operatorname{grad}\varphi_+\to0,\qquad r\to\infty$$
$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial\nu}=\nu_j,\qquad \frac{\partial\varphi_6}{\partial\nu}=(\mathbf{z}\times\boldsymbol{\nu})_3,\qquad \frac{\partial\varphi_{jk}}{\partial\nu}=\frac{\partial\pi_{jk}}{\partial\nu}$$
$$\varphi_j,\ \varphi_6,\ \varphi_{jk}\to0,\quad r\to\infty \tag{2.3}$$

Здесь $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали к контуру, $U_+\boldsymbol{\nu}$ — скорость перемещения контура относительно подвижной системы координат. Очевидно, $\varphi_{22}=\pi_{22}=0$. Формулы (1.5) приводят к следующему результату:

$$\frac{F_j'}{\rho}=\varepsilon_{j3k}\Gamma U_k-\left(\frac{\delta I_j}{\delta t}+\varepsilon_{j3k}\Omega I_k\right)-$$
$$-u_{jk}\left[I_k+S(U_k+\varepsilon_{k3n}\Omega c_n)+\frac{\delta}{\delta t}(Sc_k)\right]$$
$$\frac{M'}{\rho}=-\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{dS}{dt}-\left(\frac{\delta N}{\delta t}+\varepsilon_{3jk}U_jI_k\right)+\varepsilon_{3jk}u_{jn}P_{kn} \tag{2.4}$$

где ε_{jkn} — компоненты тензора Леви — Чивита, а величины $\mathbf{I}$, N и P_{kn} определяются формулами

$$\mathbf{I}(\Phi)=-\mathbf{e}_3\times\int\limits_L\mathbf{z}\,d\Phi,\qquad N(\Phi)=-\frac{1}{2}\int\limits_L r^2\,d\Phi$$
$$P_{kn}(\varphi')=-\pi[a_{kn}(\varphi')-\delta_{kn}a_{22}(\varphi')] \tag{2.5}$$

Коэффициенты $a_{kn}=a_{nk}$ определяют функцию s_2

$$s_2=\frac{a_{kn}\pi_{kn}}{2r^4},\qquad \varphi'=\sum_{n=0}^{\infty}s_n,\qquad \varphi'=\varphi-\Gamma\frac{\theta}{2\pi} \tag{2.6}$$

ряд в (2.6) представляет собой разложение функции φ' по круговым гармоникам целой степени в окрестности бесконечно удаленной точки, θ — полярный угол. Определим гидродинамические характеристики контура следующими формулами:

$$\begin{aligned}
&\gamma_j = I_j(\varphi_-), \quad \mu_j = I_j(\varphi_+), \quad \lambda_{jk} = I_j(\varphi_k), \quad \lambda_{j6} = I_j(\varphi_6)\\
&\gamma_6 = N(\varphi_-), \quad \mu_6 = N(\varphi_+), \quad \lambda_{66} = N(\varphi_6)\\
&\gamma_{jk} = P_{jk}\left(\varphi_- - \frac{\theta}{2\pi}\right), \quad \mu_{jk} = P_{jk}(\varphi_+), \quad A_{mnjk} = P_{mn}(\varphi_{jk})\\
&\lambda_{jmn} = P_{mn}(\varphi_j), \quad \lambda_{6mn} = P_{mn}(\varphi_6)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Для однозначных потенциалов определения характеристик формы и величин I и N эквивалентны соответствующим определениям для пространственного случая из [9]. Характеристики λ_{pq} (p, $q=1$, 2, 6) представляют собой коэффициенты присоединенных масс, отнесенных к плотности жидкости. Характеристики формы с двумя индексами и более симметричны по последним двум индексам. Кроме того

$$A_{mnjk} = A_{jkmn}, \quad \gamma_{22} = \mu_{22} = \lambda_{j22} = \lambda_{622} = A_{mn22} = 0 \tag{2.8}$$

С помощью (2.7) получаем окончательно

$$\begin{aligned}
&I_j = \Gamma\gamma_j + \mu_j + U_k\lambda_{jk} + \Omega\lambda_{j6} - {}^1/_2 u_{mn}\lambda_{jmn}\\
&N = \Gamma\gamma_6 + \mu_6 + U_k\lambda_{6k} + \Omega\lambda_{66} - {}^1/_2 u_{mn}\lambda_{6mn}\\
&P_{jk} = \Gamma\gamma_{jk} + \mu_{jk} + U_m\lambda_{mjk} + \Omega\lambda_{6jk} - {}^1/_2 u_{mn}A_{mnjk}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

При $\Gamma=\omega=0$ формулы для силы и момента совпадают с формулами гидродинамического воздействия в пространственном случае [9, 10]. Для контуров с осью симметрии z_1 обращаются в нуль γ_1, γ_{11}, μ_2, μ_6, μ_{12}, λ_{12}, λ_{16}, λ_{112}, λ_{211}, A_{1112}, а для контуров, симметричных относительно двух координатных осей только следующие характеристики формы могут быть отличны от нуля: γ_6, γ_{12}, μ_{11}, λ_{11}, λ_{22}, λ_{66}, λ_{612}, A_{1212}, A_{1111}.

3. Установим формулы для вычисления характеристик формы в терминах конформного отображения. Потенциалам формы контура из (2.2) соответствуют комплексные потенциалы, которые будем обозначать буквой $w(z)$ с теми же индексами отличия, что и у соответствующих им вещественных потенциалов. Выражения характеристик формы через комплексные потенциалы нетрудно получить из следующих формул:

$$\begin{aligned}
&I_1(\Phi) + iI_2(\Phi) = -\left(SU + i\Omega Sc + \frac{\delta}{\delta t}Sc + i\int_L z\,dw\right)\\
&N(\Phi) = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_L z\bar{z}\,dw, \qquad \operatorname{Re} w = \Phi\\
&P_{11}(\varphi') + iP_{12}(\varphi') = -i\int_L z^2\,dw', \qquad \operatorname{Re} w' = \varphi'
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Далее, существует и единственная функция

$$X(\zeta) = k_{-1}\zeta + k_0 + f(\zeta), \qquad k_{-1} > 0, \qquad f(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n\zeta^{-n} \tag{3.2}$$

совершающая конформное отображение области вне окружности R: $|\zeta|=1$ на внешность L. Для контура, симметричного относительно оси z_1, все коэффициенты k_n, $n=-1, 0, 1, \ldots$, действительны, а для контура, симметричного относительно двух координатных осей, равны нулю все коэффициенты с четными номерами. Каждому потенциалу $w(z)$ соответствует потенциал $W(\zeta)=w(X(\zeta))$. При построении потенциалов $W(\zeta)$ нужно наложить некоторые ограничения на контур L, а именно контур может быть кусочно-гладкой кривой со складками [11], но на каждой из дуг угол наклона касательной удовлетворяет условию Липшица. Решения даются формулами

$$W_1=f-\frac{k_{-1}}{\zeta}, \quad W_2=-i\left(\frac{k_{-1}}{\zeta}+f\right), \quad W_-=\frac{1}{2\pi i}\ln\zeta$$

$$W_6=-i\left(\frac{k_0k_{-1}}{\zeta}+\frac{k_{-1}f}{\zeta}+\bar{k}_0f+f_{-0}\right)$$

$$W_{11}=f^2+2k_0f+2k_{-1}(\zeta f-k_1)-\frac{2k_{-1}\bar{k}_0}{\zeta}-\frac{k_{-1}^2}{\zeta^2} \tag{3.3}$$

$$W_{12}=-\frac{i}{2}\left[\frac{k_{-1}^2}{\zeta^2}+\frac{2k_{-1}\bar{k}_0}{\zeta}+f^2+2k_{-1}(\zeta f-k_1)+2k_0f\right]$$

$$\frac{dW_+}{d\zeta}=\frac{1}{\zeta}\left(\frac{1}{2\pi}\frac{dS}{dt}+\bar{\sigma}_{+0}\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\sigma_{-0}\right)+$$

$$+\frac{df}{d\zeta}\left(\frac{d\bar{k}_0}{dt}+\frac{dk_{-1}}{dt}\frac{1}{\zeta}\right)+\frac{k_{-1}}{\zeta^2}\left(\frac{dk_0}{dt}+\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

где функции f_-, σ_- регулярны вне R, а f_+, σ_+ — внутри R, на R все функции конечны и удовлетворяют соотношениям

$$f_-+f_+=f\bar{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right), \quad \sigma_-+\sigma_+=\zeta\frac{df}{d\zeta}\frac{\partial}{\partial t}\bar{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \tag{3.4}$$

Если f имеет конечное число полюсов, то задача нахождения указанных функций решается разложением правых частей (3.4) в ряд простейших дробей. В общем случае решение можно получить методами теории интеграла типа Коши [11]. Функции с индексами $+0$ и -0 строятся по правилам $g_{+0}=g_+-g_+(0)$, $g_{-0}=g_--g_-(\infty)$, и для любой функции g функция $\bar{g}(1/\zeta)$ определяется формулами

$$g(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\zeta^n, \quad \bar{g}\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\bar{a}_n\zeta^{-n}$$

Переходя в (3.1) к интегрированию по R, с помощью (3.3) можно получить следующие формулы:

$$\lambda_{11}+i\lambda_{12}=2\pi k_{-1}(k_{-1}-k_1)-S, \quad \lambda_{22}-i\lambda_{12}=2\pi k_{-1}(k_{-1}+k_1)-S$$

$$\lambda_{26}-i\lambda_{16}=2\pi k_{-1}[k_0k_{-1}+\bar{k}_0k_1+D_1(f_{-0})]-Sc, \quad \gamma_2-i\gamma_1=-k_0$$

$$2\gamma_{12}-i\gamma_{11}=-(2k_{-1}k_1+k_0^2), \quad \gamma_6=-\frac{1}{2}(k_{-1}^2+k_0\bar{k}_0+f_+(0)+f_-(\infty))$$

$$\lambda_{111}+i2\lambda_{112}=-4\pi k_{-1}[k_{-1}k_2-k_0(k_{-1}-k_1)], \; 2\lambda_{212}-i\lambda_{211}=$$
$$=4\pi k_{-1}[k_0(k_{-1}+k_1)+k_{-1}k_2]$$

$$\mu_1+i\mu_2=2\pi\left[k_{-1}\frac{dk_0}{dt}-k_1\frac{d\bar{k}_0}{dt}+D_1\left(\bar{\sigma}_{+0}\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\sigma_{-0}\right)\right]+$$

$$+k_0\frac{dS}{dt}-\frac{\delta}{\delta t}Sc$$

(3.5)
$$2\lambda_{612}-i\lambda_{611}=4\pi k_{-1}[k_0(D_1(f_{-0})+k_0k_{-1}+\bar{k}_0k_1)+$$
$$+k_{-1}(D_2(f_{-0})+k_{-1}k_1+\bar{k}_0k_2)]$$
$$2A_{1212}-iA_{1211}=4\pi k_{-1}\Big[k_0(k_{-1}\bar{k}_0+k_0k_1+k_{-1}k_2)+$$
$$+\frac{k_{-1}}{2}(k_{-1}^2+2k_0k_2+k_1^2+2k_{-1}k_3)\Big]$$
$$A_{1111}=-8\pi k_{-1}\,\mathrm{Re}\Big[k_0(k_0k_1+2k_{-1}k_2-k_{-1}\bar{k}_0)+$$
$$+k_{-1}\left(\frac{k_1^2}{2}+k_{-1}k_3+\frac{k_{-1}^2}{2}\right)\Big]$$
$$\mu_{11}+i2\mu_{12}=(k_0^2+2k_{-1}k_1)\frac{dS}{dt}+$$
$$+2\pi k_{-1}\Big[2k_0\left(D_1(\bar{\sigma}_{+0}(1/\zeta)+\sigma_{-0})+k_{-1}\frac{dk_0}{dt}-k_1\frac{d\bar{k}_0}{dt}\right)+$$
$$+k_{-1}\left(D_2\left(\bar{\sigma}_{+0}\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\sigma_{-0}\right)+k_{-1}\frac{dk_1}{dt}-k_1\frac{dk_{-1}}{dt}-2\frac{d\bar{k}_0}{dt}k_2\right)\Big]$$
$$\lambda_{66}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_R W_6\,dX_{+0},\qquad \mu_{66}=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_R X_{+0}\,dW_+$$

где $D_n(g)$ — коэффициент при ζ^{-n} ряда Лорана функции $g(\zeta)$ в окрестности точки $\zeta=\infty$

$$X_{+0}=\bar{k}_0k_{-1}\zeta+\bar{f}(1/\zeta)(k_{-1}\zeta+k_0)+f_{+0}$$

Для примера рассмотрим случай эллипса с полуосями l_1 и l_2

$$k_{-1}=\frac{l_1+l_2}{2},\qquad k_1=\frac{l_1-l_2}{2},\qquad f(\zeta)=\frac{k_1}{\zeta},$$
$$S=\pi l_1l_2,\qquad J=\frac{S}{4}(l_1^2+l_2^2)$$

Нетрудно получить следующие выражения:

$$I_1=U_1\pi(k_{-1}-k_1)^2,\qquad I_2=U_2\pi(k_{-1}+k_1)^2$$
$$N=-\frac{\Gamma}{2}(k_{-1}^2+k_1^2)+\Omega 2\pi(k_1k_{-1})^2-2u_{12}\pi k_{-1}^3k_1$$

(3.6)
$$P_{11}=2\pi k_{-1}\left[\frac{k_1}{\pi}\frac{dS}{dt}+k_{-1}\left(k_{-1}\frac{dk_1}{dt}-k_1\frac{dk_{-1}}{dt}\right)\right]-$$
$$-u_{11}2\pi k_{-1}^2(k_{-1}^2-k_1^2)$$
$$P_{12}=-\Gamma k_{-1}k_1+\Omega 2\pi(k_1k_{-1})^2-u_{12}\pi k_{-1}^2(k_{-1}^2+k_1^2)$$

Формулы для коэффициентов присоединенных масс $\lambda_{\alpha\beta}$ в (3.5) эквивалентны аналогичным формулам из [1], где конформное отображение осуществляется с единичного круга.

Автор благодарен Ю. Л. Якимову, осуществлявшему научное руководство.

Поступила 20 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.
2. *Tsien H. S.* Symmetrical Joukowsky airfoils in shear flow. Quart. Appl. Math., 1943, vol. 1, No. 2.
3. *Mitchell A. R., Murrey J. D.* Two-dimensional flow with constant shear past cylinders with various cross sections. ZAMP, vol. 6, 1955.
4. *Патель Т. С.* Профиль крыла с вращающимся закрылком в сдвиговом потоке. Вестн. МГУ, Сер. матем., механ., 1974, № 2.
5. *James D. G.* Two-dimensional airfoils in shear flow. Quart. J. Mech. and Math., 1951, vol. 4, pt 4.
6. *Obala J.* Sur les écoulements de cisaillement à tourbillon constant autor d'un profil animé d'un mouvement quelconque. J. mécanique, 1974, vol. 13, No. 1.
7. *Якимов Ю. Л.* Движение деформирующегося цилиндра в произвольном плоском потоке идеальной несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
8. *Вильховченко С. Д.* Движение деформирующегося контура в потоке идеальной несжимаемой жидкости с постоянной завихренностью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 3.
9. *Вильховченко С. Д.* Гидродинамический момент, действующий со стороны линейного потенциального потока идеальной несжимаемой жидкости на движущееся деформирующееся тело. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 5.
10. *Якимов Ю. Л.* Силы, действующие на малое тело в произвольном потоке несжимаемой жидкости, и уравнения движения двухфазной среды. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 3.
11. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. М., «Наука», 1968.