

О ВЛИЯНИИ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОЛЯ СИЛЫ НА ТЕЧЕНИЕ В МГД КАНАЛЕ

В. А. БИТЮРИН, В. Н. ЗАТЕЛЕШИН, Г. А. ЛЮБИМОВ

(Москва)

Перестройка однородного потока в сложное трехмерное течение в канале МГД устройств может быть обусловлена разного рода причинами. В [1] обсуждаются эффекты, связанные со вторичными течениями, возникающими в областях взаимодействия вязких турбулентных слоев несжимаемой жидкости в углах прямоугольного МГД канала. Рассматривается влияние таких вторичных течений на распределение ponderomotorной силы и давления в плоскости поперечного сечения канала. Последние путем осреднения по направлению магнитного поля учитываются в расчете распределения параметров в центральной плоскости, нормальной магнитному полю.

В данной работе рассматривается взаимодействие первоначально однородного потока электропроводной идеальной среды с непотенциальной лоренцевой силой $\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$, которая порождает трехмерное вторичное течение.

В МГД устройствах степень непотенциальности объемной силы определяется выражением $\text{rot } \mathbf{F} = (\nabla V) \mathbf{j} - (\mathbf{j} \nabla) \mathbf{V}$, из которого следует, что сила \mathbf{F} может существенно отличаться от потенциальной в области рассеяния магнитного поля при ненулевых токах в этой зоне, а также в областях неоднородности плотности тока даже в постоянном магнитном поле.

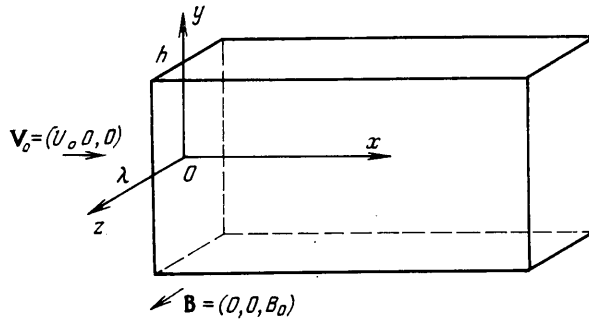
В литературе в основном описаны двумерные течения, возникающие в зоне неоднородности магнитного поля. Из аналитических решений, описывающих такие течения в плоском и осесимметричном случае, можно указать на [2-6]. В МГД генераторе неоднородность магнитного поля обычно проявляется во входной и выходной областях канала и приводит к появлению концевой эффекта в распределении электрических параметров. Непотенциальные объемные силы, связанные с концевыми эффектами, локализованы, как и сам концевой эффект, на длинах порядка калибра канала, и поэтому при малых параметрах взаимодействия не приводят к существенной перестройке потока.

С другой стороны, в МГД генераторе с диагонально проводящими боковыми стенками, распределение плотности тока в поперечном сечении канала неоднородно, что обеспечивает значительную степень непотенциальности объемной силы в рабочей зоне канала. Эти силы могут существенно перестроить поток, так как в отличие от концевой эффект эта перестройка происходит по всей длине канала.

Воздействие непотенциальной объемной силы можно характеризовать параметром непотенциальности $N^* = l_* L \text{rot}_* \mathbf{F} / (\rho_* u_*^2)$, где l_* — характерная длина неоднородности силы, L — характерная длина изменения скорости, $\text{rot}_* \mathbf{F}$ — характерное значение вихря силы. Неоднородность силы, действующей в плоскости поперечного сечения канала, характеризуется продольной компонентой ротора $\text{rot}_{*x} \mathbf{F}$ и приводит к закручиванию потока в этой плоскости. Соответствующий этим силам параметр непотенциальности $N_x^* = B \Delta j_x / (\rho_* u_*^2)$, где Δj — характерное изменение плотности про-

дольного тока в поперечной плоскости, x — характерный размер изменения скорости вдоль канала. Для типичных условий крупномасштабных генераторов открытого цикла величина этого параметра составляет $N_x^* = 0.01 \div 0.1x/h$, где h — поперечный размер канала. Следовательно, на длинах в несколько калибров закручивание потока может привести к формированию интенсивного поперечного течения. Поперечные компоненты ротора силы $\text{rot}_{y,z} \mathbf{F}$ в основном определяют деформацию продольной скорости.

В данной работе рассматривается течение невязкой, нетеплопроводной несжимаемой жидкости в прямоугольном канале под действием объемной силы $\mathbf{F}(x, y, z)$, моделирующей лоренцову силу в канале рамочного МГД генератора. Решение этой задачи в линейном приближении по параметру взаимодействия $N = \sigma B^2 L / \rho_* u_*$ дает картину трехмерного распреде-



Фиг. 1

ления компонентов скорости u, v, w и давления p . Обобщение решения на случай сжимаемой среды при числах Маха, не слишком близких к единице, может быть сделано без особых затруднений [7].

Пусть по каналу прямоугольной формы $|y| \leq h, |z| \leq \lambda, -\infty < x < \infty$ (фиг. 1) движется нетеплопроводная, невязкая, несжимаемая жидкость со скоростью $\mathbf{v} = (u, v, w)$, плотностью ρ_0 , давлением p , проводимостью σ и параметром Холла β . Пусть на участке $-\infty < x, x > L$ жидкость движется в отсутствие магнитного поля, а при $0 < x < L$ — в постоянном магнитном поле $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$. Такое течение в предположении $Re_m \ll 1$ описывается стандартной системой уравнений [7].

Перейдем к безразмерным параметрам по формулам

$$\mathbf{r} = \lambda \mathbf{r}', \quad \mathbf{v} = u_0 \mathbf{v}', \quad p = \rho_0 u_0^2 p', \quad \mathbf{j} = \sigma_0 u_0 B_0 \mathbf{j}', \quad \varphi = u_0 B_0 \lambda \varphi'$$

Здесь φ, \mathbf{j} — соответственно электрические потенциал и ток (штрихи у безразмерных величин в дальнейшем опущены). Представим, следуя [7], все безразмерные величины в виде суммы невозмущенных значений (индекс 0) и возмущений (индекс 1), пропорциональных первой степени N

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + N \mathbf{v}_1, \quad p = p_0 + N p_1, \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + N \mathbf{j}_1, \quad \varphi = \varphi_0 + N \varphi_1$$

Собирая члены с нулевой и первой степенью N , имеем для невозмущенных значений параметров обычную гидродинамическую систему и для возмущений систему уравнений

$$(1) \quad (\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_1 = -\nabla p_1 + \mathbf{j}_0 \times \mathbf{B} / B_0, \quad \nabla \mathbf{v}_1 = 0$$

Электрические величины \mathbf{j}_0, φ_0 находятся из уравнений с соответствующими граничными условиями

$$(2) \quad \mathbf{j}_0 = -(\nabla \varphi_0 + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} / B_0) - \beta \mathbf{j}_0 \times \mathbf{B} / B_0, \quad \nabla \mathbf{j}_0 = 0$$

На боковых стенках канала выполняется условие непротекания жидкости $v_{1n}=v_{0n}=0$.

Пусть входные и выходные условия обеспечивают для невозмущенного течения (в отсутствие магнитного поля) решение с постоянной скоростью и давлением во всем канале $v_0=(1, 0, 0)$, $p_0=\text{const}$.

Прежде чем приступить к решению системы (1) найдем из (2) поле токов в рамочном канале и на основе этого решения построим распределение силы.

Необходимо отметить, что электрическое поле и поле токов в указанных условиях в рамочном канале являются трехмерными. Эта трехмерность обусловлена наличием краевого и концевых эффектов на входе в рабочую зону канала. Эффект Холла значительно осложняет получение решения такой задачи.

В дальнейшем при исследовании качественных гидродинамических эффектов будем пользоваться модельным распределением электродинамических параметров. Примем, что в рабочей зоне канала величины j_0 и φ_0 зависят только от поперечных координат

$$(3) \quad j_0=j_0(y, z), \quad \varphi_0=\varphi^*+\Phi(y, z)$$

Здесь φ^* — распределение потенциала, задаваемого рамками канала.

Такие распределения близки к точным на регулярном в смысле расположения рамок участке рабочей зоны канала вдали от его концов. Концевые эффекты локализуются в окрестности входа и выхода из рабочей зоны на длинах порядка калибра канала. В этих зонах полученные ниже решения будут далеки от истинных.

Ниже изучаются гидродинамические эффекты, связанные с непотенциальной составляющей электромагнитной силы в рабочей зоне канала вдали от его концов (на расстояниях больших калибра от концов). При этом детальное распределение параметров в концевых областях, зависящее, в частности, от структуры электрического поля в этих областях, может не рассматриваться. В силу линейности задачи и характера поведения решения вне зоны неоднородного силового воздействия [7] решение для возмущений в рабочей зоне можно представить в виде

$$(4) \quad p_1=p_{1x}^\circ x+p_{1y}^\circ y+p_1'(y, z), \quad p_{1x}^\circ, \quad p_{1y}^\circ=\text{const}$$

$$v_1=v_1^\circ(y, z)+v_1'(y, z)x$$

Здесь p_1' , v_1' — определяются силами, действующими на регулярном участке канала, а v_1° определяется детальной структурой концевых областей, p_{1x}° и p_{1y}° — потенциальной составляющей силы на рабочем участке. В дальнейшем будем интересоваться только поведением величин p_1' и v_1' . Примем для их вычисления распределения электрических параметров (3) при $0 < x < L/\lambda$. При этом полученные решения будут близки к точным вдали от концов канала (в области $h/\lambda \leq x \leq (L-h)/\lambda$). Поведение этих решений в концевых областях должно приниматься во внимание при вычислении v_1° и распределения давления.

Сформулируем граничные условия для потенциала в рамочном канале с охлаждаемыми электродными стенками. Как известно из [8], охлаждение стенок канала приводит к возникновению слоев резкого изменения потенциала. Толщина этих слоев определяется зависимостью проводимости от температуры. Для типичных условий крупномасштабных генераторов на продуктах сгорания эти слои много тоньше, чем тепловой и гидродинамический. Наличие таких слоев повышенного сопротивления приводит к стеканию части тока на боковые стенки канала. При некоторых условиях, как отмечается, например, в экспериментальной работе [9] на установке

Стенфордского университета, доля тока, стекающего на боковые стенки, может составить от 55% на аноде, до 35% на катоде (температура электродов менялась от 940° К на аноде до 1120° К на катоде). Этот же эффект обнаружен в численных расчетах [10].

С точки зрения рассматриваемой задачи (течение в ядре потока) изменение потенциала в граничных слоях должно учитываться в виде эффективного граничного условия. Для его получения проинтегрируем проекцию уравнения закона Ома на нормальное к стенке направление поперек слоя с переменной электропроводностью, предполагая, что $j_{y0} = \text{const}$. Пренебрегая членами, пропорциональными δ/h , где δ — толщина слоя, h — ширина канала, получим, например, для верхней ($y=h/\lambda$) электродной стенки

$$(5) \quad r_y(1+\beta^2)j_{y0} = \varphi_0 - \varphi^*, \quad r_y = \int_{(h-\delta)/\lambda}^{h/\lambda} \frac{dy}{\sigma}$$

где φ^* — потенциал электрода, φ^0 — потенциал на внутренней границе слоя, прилегающего к ядру потока. Выразив j_{y0} через потенциал ядра в точке, прилегающей к пограничному слою, получим граничное условие для φ_0 на верхнем электроде. Аналогично получают граничные условия на других стенках. Отметим, что в данной постановке величины r_y , r_z задаются и моделируют сопротивление газодинамических пограничных слоев, электропроводность в которых является сильной функцией температуры.

Условие (5) показывает, что изменение потенциала в пограничном слое вблизи электрода неоднородно по периметру канала и пропорционально плотности тока, стекающего на электрод в данной точке. Из результатов [10] следует, что распределение потенциала в ядре потока, полученное с помощью граничного условия (5), близко к точному решению, в котором электропроводность меняется непрерывно в соответствии с профилем температуры для турбулентного пограничного слоя при соответствующем выборе величин r_y , r_z .

Введем функцию $\Phi = \varphi_0 - \varphi^*$ и учтем, что в рамочном канале $\varphi^* = -E_x^0(x - y \operatorname{ctg} \theta)$, (E_x^0 — холловское поле (параметр задачи), θ — угол наклона рамок к оси канала). Для функции Φ получим следующую краевую задачу:

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + (1+\beta^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= 0 \\ \pm r_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \Phi &= \pm r_y(1+E_x^0(\operatorname{ctg} \theta - \beta)), \quad y = \pm \frac{h}{\lambda} \\ \pm r_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \Phi &= 0, \quad z = \pm 1 \end{aligned}$$

Пусть r_y , r_z — константы, не зависящие от координат, тогда для Φ получается решение в виде ряда по $\cos \gamma_k z$, где γ_k определяются из уравнения $r_z \gamma_k \operatorname{tg} \gamma_k = 1$. Используя это решение, для φ_0 получаем

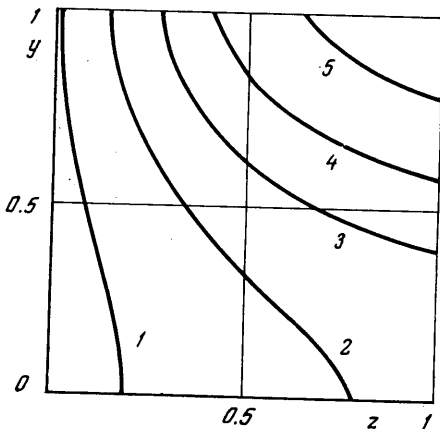
$$\begin{aligned} \varphi_0 &= -E_x^0(x - y \operatorname{ctg} \theta) + \\ &+ r_y(1+E_x^0(\operatorname{ctg} \theta - \beta)) \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\gamma_k z) \operatorname{sh}(\sqrt{1+\beta^2} \gamma_k y) \end{aligned}$$

(7)

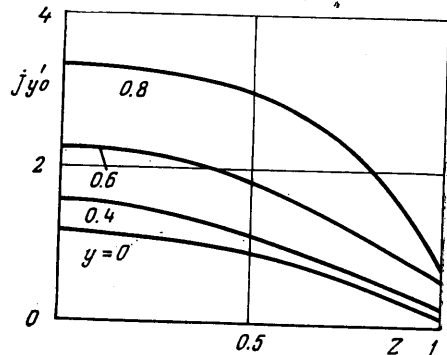
$$A_k = \frac{C_k}{(r_y \sqrt{1+\beta^2} \gamma_k + \text{th}(\gamma_k \sqrt{1+\beta^2} h/\lambda)) \text{ch}(\gamma_k \sqrt{1+\beta^2} h/\lambda)}$$

$$C_k = \frac{4 \sin \gamma_k}{(2\gamma_k + \sin^2 \gamma_k) \gamma_k}$$

Соответствующее решению (7) при $r_y=r_z=0.1$, $h=\lambda=1$, $\beta=1.5$ распределение в поперечном сечении канала функции тока ψ для неоднородной части \mathbf{j}'_0 ($\mathbf{j}'_0 = \mathbf{j}'_0^* + \mathbf{j}'_0'$, $\mathbf{j}'_0^* = (-1/(1+\beta^2), 0)$) представлено на фиг. 2. Кривые 1—5 соответствуют различным значениям ψ : 1 — 0.006, 2 — 0.008, 3 — 0.013, 4 — 0.021, 5 — 0.036; ψ принималась равной нулю при $z=0$. Распределение y — компоненты плотности тока j'_{y0} , вычисленное по неоднородной части потенциала Φ , которая определяет непотенциальную часть элек-



Фиг. 2



Фиг. 3

ромагнитной силы, представлено на фиг. 3. На фиг. 2, 3 величины ψ и j'_{y0} отнесены к $(1+E_x^0 \text{ctg} \theta - \beta)$.

Полученное электродинамическое решение дает возможность вычислить компоненты лоренцовой силы в рабочей зоне канала.

Для возмущений скорости и давления из (1) получим

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x} = -\nabla p_1 + \mathbf{F}_0, \quad \nabla \mathbf{v}_1 = 0$$

$$(8) \quad F_{x0} = j_{y0} = \frac{1}{1+\beta^2} \left(-\frac{\partial \Phi^*}{\partial y} - \beta \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} - 1 - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)$$

$$F_{y0} = -j_{x0} = -E_x^0 + \beta j_{y0}$$

Из (8) для возмущения давления p_1 и скорости v_1 получаем уравнения

$$(9) \quad \Delta p_1 = \text{div} \mathbf{F}_0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$(10) \quad \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x} = -\nabla p_1 + \mathbf{F}_0$$

Граничное условие непротекания на боковых стенках канала преобразуется с помощью (10) в следующее условие для давления:

$$(11) \quad \frac{\partial p_1}{\partial n} = F_{n0}$$

Так как вне отрезка $0 \leq x \leq L/\lambda$ воздействие на поток отсутствует, то

$$(12) \quad \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0 \quad (x = \pm \infty)$$

Поскольку сила F_0 разрывна при $x=0, L/\lambda$, в этих сечениях необходимо сшивать решения, полученные в областях $x < 0, 0 < x < L/\lambda, x > L/\lambda$. Условия сшивки возмущений давления получаются из условий на поверхности сильного разрыва [14]. Для несжимаемой жидкости эти условия имеют вид $\{u\} = \{p_n + uv\} = 0$, откуда для возмущений получаем $\{v_1\} = \{p_1\} = 0$.

Дифференцируя по y и z соотношения на разрыве для v_1 и w_1 и используя уравнение неразрывности, получим $\{\partial u_1 / \partial x\} = 0$. Отсюда, используя уравнение (10), получим второе условие для возмущения давления в сечении сильного разрыва

$$(13) \quad \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial x} \right\} = \{F_{x0}\}$$

Таким образом, задача определения p_1 сводится к краевой задаче для уравнения Пуассона (9), (11) — (13).

Представим силовые члены в (9) в виде

$$F_{x0} = \langle F_{x0} \rangle_{y,z} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} F_{xkm} \cos k\pi z \cos r_m' y, \quad k^2 + m^2 \neq 0$$

$$F_{y0} = \langle F_{y0} \rangle_z + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} F_{ykm} \cos k\pi z \cos r_{my}$$

$$(14) \quad \langle f \rangle_z = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f dz, \quad \langle f \rangle_{y,z} = \frac{\lambda}{4h} \int_{-1}^1 \int_{-h/\lambda}^{h/\lambda} f dz dy$$

$$r_m = \frac{(m+0.5)\pi\lambda}{h}, \quad r_m' = \frac{m\pi\lambda}{h}, \quad r_0 = 0$$

$$F_{x0} = F_{y0} = 0 \quad (x < 0, \quad x > L/\lambda)$$

Выбор такой системы функций для разложения силы в ряд Фурье диктуется, с одной стороны, четностью функции F_0 по координатам y, z , а с другой — необходимостью удовлетворить граничным условиям на стенках канала. Коэффициенты F_{xkm} и F_{ykm} обеспечивают сходимость рядов (14). Для проводимых ниже качественных оценок их точные значения не понадобятся.

Составляющие силы $\langle F_{y0} \rangle_z$ и $\langle F_{x0} \rangle_{y,z}$ в (14) приводят к возникновению поперечного и продольного градиента давления, так как соответствующая этим членам сила потенциальна. Чтобы отделить влияние непотенциальной части лоренцовой силы, положим $\langle F_{y0} \rangle_z = \langle F_{x0} \rangle_{y,z} = 0$. Влияние потенциальной силы на течение определяет величины p_{1x}^0 и p_{1y}^0 в (4). В силу линейности задачи возмущения, соответствующие различным компонентам силы, складываются.

Для наглядности рассмотрим отдельно взаимодействие потока с непотенциальной частью продольной F_{x0} и поперечной F_{y0} силы, так как результаты этих взаимодействий качественно различны.

Пусть $F_0 = (F_{x0}, 0, 0)$

$$F_{x0} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} F_{xkm} \cos k\pi z \cos r_m' y, \quad k^2 + m^2 \neq 0$$

$$F_{x0} = 0 \quad (x < 0, x > L/\lambda)$$

Тогда для p_1 имеем

$$(15) \quad p_1 = - \sum_{x < 0} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(y, z) \exp(\gamma_{km}' x)$$

$$p_1 = - \sum_{0 < x < L/\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(y, z) (\exp(-\gamma_{km}' x) - \exp(\gamma_{km}'(x - L/\lambda)))$$

$$p_1 = \sum_{x > L/\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(y, z) \exp(\gamma_{km}'(L/\lambda - x))$$

$$C_{km}(y, z) = \frac{F_{xkm}}{2\gamma_{km}'} \cos k\pi z \sin r_m' y, \quad \gamma_{km}'^2 = r_m'^2 + (k\pi)^2$$

При получении (15) опущены члены, пропорциональные $\exp(-\pi L/\lambda)$, $\exp(-r_1' L/h)$. Такое допущение справедливо при достаточной длине канала L/λ .

Из (15) видно, что возмущения давления, вызванные непотенциальной частью продольной силы $F_{x0}(y, z)$, экспоненциально затухают в окрестности входного ($x=0$) и выходного ($x=L/\lambda$) сечений и, следовательно, в рабочей зоне канала практически равны нулю. Для возмущений скорости получаем из (10) следующие выражения:

$$(16) \quad u_1 = -p_1 + F_{x0}(y, z)x, \quad v_1 = - \int_{-\infty}^x \frac{\partial p_1}{\partial y} dx, \quad w_1 = - \int_{-\infty}^x \frac{\partial p_1}{\partial z} dx$$

Из (15) и (16) легко видеть, что возмущения поперечных скоростей v_1, w_1 аналогично возмущениям давления p_1 затухают экспоненциально в окрестности входного и выходного сечений. В рабочей зоне канала отлично от нуля только возмущение продольной скорости, причем $u_1 = F_{x0}x$. (Решение этого типа для $F_{x0} = F_{x0}(y)$ получено в [7]). Таким образом, в рабочей зоне канала профили возмущений продольной скорости подобны, а их амплитуда линейно нарастает вниз по потоку.

Обратимся теперь к анализу воздействия на течение непотенциальной части поперечной силы $F_{y0}(y, z)$. Пусть $F_0 = (0, F_{y0}, 0)$, где F_{y0} определяется из (14). При этом решение для p_1 имеет вид

$$(17) \quad p_1 = \sum_{x < 0} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(y, z) \exp(\gamma_{km} x)$$

$$p_1 = \sum_{0 < x < L/\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(y, z) (2 - \exp(-\gamma_{km} x) + \exp(\gamma_{km}(x - L/\lambda)))$$

$$p_1 = \sum_{x > L/\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(y, z) \exp(\gamma_{km}(L/\lambda - x))$$

$$C_{km}(y, z) = F_{ykm} \frac{r_m}{2\gamma_{km}^2} \cos k\pi z \sin r_m y, \quad \gamma_{km}^2 = (k\pi)^2 + r_m^2$$

Члены, пропорциональные $\exp(\pm\gamma_{km}x)$, затухают в окрестности входного $x=0$ и выходного $x=L/\lambda$ сечений, т. е. описывают концевые явления в перестройке давления. В рабочей зоне канала $0 < x < L/\lambda$ на расстоянии порядка калибра и более от входного и выходного сечения возмущения давления не зависят от продольной координаты.

Для возмущений скорости в рабочей зоне канала в данном случае получим

$$u_1 = -p_1(y, z) = -p_1'$$

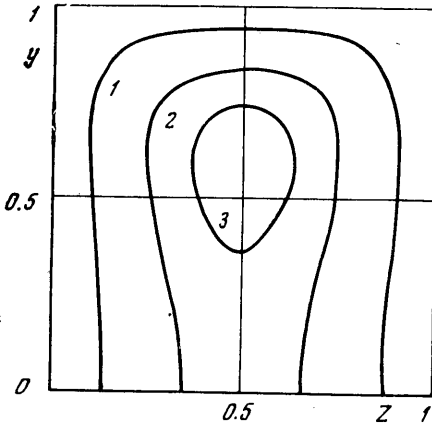
$$v_1 = - \int_{-\infty}^x \frac{\partial p_1}{\partial y} dx + F_{y0} x = \left(-\frac{\partial p_1'}{\partial y} + F_{y0} \right) x$$

(18)

$$w_1 = - \int_{-\infty}^x \frac{\partial p_1}{\partial z} dx = -\frac{\partial p_1'}{\partial z} x$$

Анализ решений (15) — (18) показывает, что решение в рабочей зоне канала действительно представимо в форме (4).

Полученные выше выводы относительно поведения возмущений связаны с конкретным видом выражений для сил (14). Можно показать, что при соответствующем выборе коэффициентов возникающие в рассматриваемой задаче силы (8) могут быть представлены в виде (14). Для доказательства этого факта, а также для практических расчетов поля возмущений в рассматриваемой задаче необходимо получить фактические разложения решения (7) в двойной ряд по $\cos k\pi z$ и $\cos r_m y$. Получаемые при этом выражения весьма громоздки для качественного анализа. В связи с этим в дальнейшем с целью упрощения примем следующее модельное выражение для силы F_{y0} :



Фиг. 4

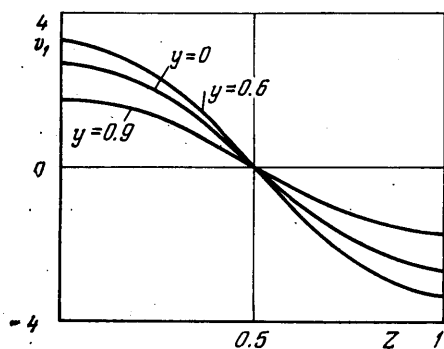
$$(19) \quad F_{y0}(y, z) = A \cos \alpha y \cos \pi z$$

Коэффициенты A и α в этом выражении выбираются таким образом, чтобы средние градиенты силы $\langle \partial F_{y0} / \partial z \rangle_z = (F_{y0}(y, 1) - F_{y0}(y, 0)) / 2$, вычисленные по модели (19) и по (7), (8), совпали при $y=0$ и $y=h/\lambda$. Дело в том, что при таком выборе A и α в модели с хорошей точностью сохраняется по отношению к решению (7), (8) не только качественный, но и количественный характер зависимости F_{y0} от y, z .

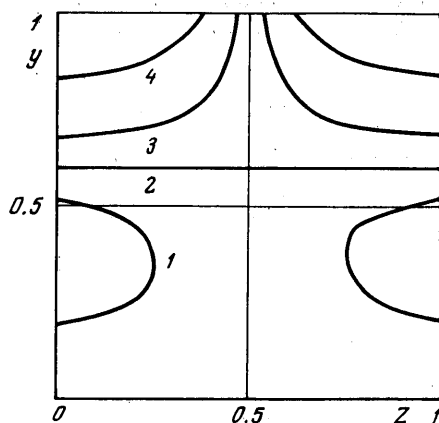
Будем исследовать характер возмущений в рабочей зоне канала (выше отмечалось, что принятое приближение для расчета электродинамических параметров не позволяет рассчитывать поле сил вблизи концов канала).

Возмущения, вызванные силой F_{x0} , легко находятся из (16) и (8) после непосредственной подстановки решения (7) для j_{y0}

$$(20) \quad u_1 = F_{x0} x = j_{y0} x$$



Фиг. 5



Фиг. 6

Для вычисления возмущений, вызванных поперечной силой F_{y0} , используем модельное выражение (19).

Воспользовавшись полученным выше выводом о том, что возмущения давления в рабочей зоне канала, вызванные воздействием силы F_{y0} , не зависят от продольной координаты, из (17) имеем

$$p_1'(y, z) = (B_1 \operatorname{sh} \alpha y + B_2 \operatorname{sh} \pi y) \cos \pi z$$

$$(21) \quad B_1 = \frac{A\alpha}{\alpha^2 - \pi^2}, \quad B_2 = \frac{(A - B_1\alpha) \operatorname{ch}(\alpha h/\lambda)}{\pi \operatorname{ch}(\pi h/\lambda)}$$

Для возмущений скорости u_1 , v_1 и w_1 , используя (19), получим

$$(22) \quad u_1 = 0, \quad v_1 = - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial p_1}{\partial y} - F_{y0} \right) dx, \quad w_1 = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial p_1}{\partial z} dx$$

Учитывая представление (4), из (20) — (22) получим следующие выражения для компонент возмущений скорости (4):

$$(23) \quad u_1' = F_{x0}, \quad v_1' = -((B_1\alpha - A) \operatorname{ch} \alpha y + B_2\pi \operatorname{ch} \pi y) \cos \pi z$$

$$w_1' = \pi(B_1 \operatorname{sh} \alpha y + B_2 \operatorname{sh} \pi y) \sin \pi z$$

Отсюда видно, что можно ввести функцию тока ψ_1 следующим образом:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial z} = v_1', \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = -w_1', \quad \psi_1 = 0 \quad (z=0, y=h/\lambda)$$

На фиг. 4 представлено распределение ψ_1 в правом верхнем квадранте поперечного сечения канала. Физический смысл ψ_1 — проекция траектории жидкой частицы на плоскость поперечного сечения канала. При расчетах полагалось $A=0.02$, $\alpha=2.5$, что позволяет моделировать в указанном выше смысле распределение поперечной компоненты лоренцевой силы при сопротивлении пограничных слоев $r_y=r_z=0.1$. Кривые 1—3 соответствуют следующим значениям ψ_1 : 1 — 0.0033, 2 — 0.0075, 3 — 0.01.

На фиг. 5, 6 представлены распределения поперечной скорости v_1' и изобар неоднородной части давления p_1' . На фиг. 6 кривые 1—4 соответствуют следующим значениям p_1' : 1 — (-0.0012), 2 — 0, 3 — 0.0015, 4 — 0.0087.

Чтобы проиллюстрировать эффект действия непотенциальной лоренцовой силы, примем условия для коммерческого генератора на угле [12]

$$B=6 \text{ тл}, \quad \sigma=5.4 \text{ мо/м}, \quad u_0=750 \text{ м/сек}, \quad E_x^\circ=-980 \text{ в/м}, \\ L=22 \text{ м}, \quad s=h\lambda=1.4 \text{ м}^2, \quad G=720 \text{ кг/сек}$$

Если принять, что поперечное сечение канала — прямоугольник и величина сопротивления пристеночной зоны $r \approx 0.1$, то на выходе из канала поперечные компоненты скорости могут достигать 20—30% продольной скорости.

Поступила 15 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Maxwell C. D., Doss E. D., Oliver D. A., Curry B. P. Consideration of three-dimensional effects in MHD power generators. Proc. 15-th Symp. Eng. Aspects Magneto-hydrodyn., Philadelphia, 1976.
2. Hasimoto H. Swirl of a conducting gas due to the Hall effect. J. Phys. Soc. Japan, 1964, vol. 19, No. 8.
3. Ehlers F. E. Linearized magnetogasdynamic channel flow with axial symmetry. ARS Journal, 1961, vol. 31, No. 3.
4. Levy R. H. Exact solutions to a class of linearized magnetohydrodynamic flow problems. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 11.
5. Вагажин А. Б., Холщевникова Е. К. Течение анизотропно проводящей среды по каналу в зоне входа в магнитное поле. ПМТФ, 1967, № 5.
6. Sutton G. W., Carlson A. W. End effect in inviscid flow in a magnetohydrodynamic channel. J. Fluid Mech., 1961, vol. 11, No. 1.
7. Вагажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М., «Наука», 1970.
8. Любимов Г. А. О вязком пограничном слое на электроде при переменной электропроводности среды. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
9. Eustis R. H., Cima R. M., Berry K. E. Current distribution in conducting wall MHD Generation. Proc. 11-th Sympos. Eng. Aspects Magnetohydrodynamics, Pasadena, California, 1970.
10. Битюрин В. А., Бураханов Б. М., Желнин В. А., Ковбасюк В. И., Медин С. А., Руткевич И. М. Теоретическое исследование двумерных электрических эффектов и развитие инженерной методики расчета МГД каналов рамочного типа. VI Международная конференция по МГД генераторам электрической энергии. Вашингтон, 1975.
11. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. I, М., «Наука», 1973.
12. Bergman P. D., Binstock D. Utilisation of western coal for MHD energy conversion. Proc. 15-th Sympos. Eng. Aspects Magnetohydrodynamics. Philadelphia, 1976.