

## О ВОЗНИКНОВЕНИИ КОНЕЧНО-АМПЛИТУДНОЙ КОНВЕКЦИИ В ВИБРИРУЮЩЕМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ, НАГРЕВАЕМОЙ СВЕРХУ

Г. С. МАРКМАН, А. Л. УРИНЦЕВ

(Ростов-на-Дону)

Влияние модуляции ускорения силы тяжести на конвективную устойчивость горизонтального слоя жидкости, подогреваемого снизу, изучалось в работах [1-7]. Установлено, что состояние относительного покоя теряет устойчивость и возникает периодическое по времени конвективное течение. Если модуляция такова, что эффективное ускорение сохраняет знак во все моменты времени (безразмерная амплитуда модуляции  $\eta < 1$ ), устойчивость равновесного состояния повышается и кризис равновесия связан с возмущениями того же периода  $T$  по времени, что и модуляция [2-6]. При  $\eta > 1$  задача для возмущений допускает  $T$ - и  $2T$ -периодические решения; наличие модуляции в зависимости от соотношений параметров стабилизирует, либо дестабилизирует равновесие [3, 6].

В настоящей работе исследуется влияние вибрации на устойчивость жидкости при нагреве сверху. В отсутствие вибрации состояние покоя устойчиво при любом нагреве сверху [3]. Наличие вибрации приводит к качественно новому эффекту: состояние относительного покоя теряет устойчивость при переходе числа Рэлея через критическое значение и рождается нестационарное конвективное течение, осциллирующее с частотой, равной половине частоты модуляции. Существенно, что конвекция возникает и при значениях  $\eta < 1$ .

Полученные в работе результаты позволяют провести аналогию с задачей о движении маятника с вибрирующей точкой подвеса. При наличии вибрации точки подвеса ранее неустойчивое верхнее положение физического маятника становится устойчивым: маятник «переворачивается» [8]. В случае конвекции при помощи вибрации можно вызвать неустойчивость жидкости при нагреве сверху и сохранить состояние относительного покоя при подогреве снизу. Впервые на эту аналогию указано в [1], где рассмотрена задача для горизонтального слоя со свободными границами, подогреваемого снизу, при ступенчатой модуляции параметра; однако результаты расчетов нейтральных кривых, подтверждающие возникновение конвекции при нагреве сверху, не приведены (см. также [2, 3]).

В п. 1 изложены результаты расчетов в линейной постановке критических чисел Рэлея для горизонтального слоя со свободными и твердыми границами, нагреваемого сверху. Исследованы зависимости границы устойчивости от параметров задачи: волнового числа, числа Прандтля, амплитуды и частоты модуляции. В п. 2 вторичные периодические течения вблизи порога устойчивости рассчитаны на основе полной системы нелинейных уравнений конвекции. Полученные результаты по нелинейной устойчивости иллюстрируются на примере с двумя свободными границами.

**1. Вычисление границ устойчивости. Линейная задача.** Рассматривается горизонтальный слой вязкой несжимаемой жидкости, колеблющийся как единое целое с частотой  $\omega_0$  и амплитудой вертикального смещения  $d$ . Толщина слоя равна  $l$ ; температура на горизонтальных границах слоя фиксирована:  $T_1$  — на нижней,  $T_2$  — на верхней границе ( $T_2 > T_1$ ). В системе координат, связанной с колеблющимся слоем (ось  $y$  направлена вертикально вверх), безразмерные уравнения конвекции имеют вид [3]

$$\frac{1}{P} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + \frac{1}{P^2} K(\Psi, \Delta \Psi) = \Delta^2 \Psi - R(1 + \eta \sin \omega t) \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$(1.1) \quad P \frac{\partial \theta}{\partial t} + K(\Psi, \theta) = \Delta \theta + R \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$K(u, v) = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Безразмерные переменные и параметры выбраны следующим образом (индекс  $p$  указывает на то, что соответствующая величина размерная)

$$(1.2) \quad x = \frac{x_p}{l}, \quad y = \frac{y_p}{l}, \quad \Psi = \frac{\Psi_p}{\chi}, \quad \theta = \sqrt{\frac{\beta g}{Av\chi}} l \theta_p, \quad t = \frac{\sqrt{v\chi}}{l^2} t_p$$

$$P^2 = Pr = \frac{\nu}{\chi}, \quad R^2 = Ra = \frac{l^4 \beta g A}{v\chi}, \quad \eta = \frac{d\omega_0^2}{g}, \quad \omega = \frac{\omega_0 l^2}{\sqrt{v\chi}}$$

Положительные значения равновесного градиента температуры  $A = (T_2 - T_1)/l$  соответствуют в этой постановке нагреву сверху. Критические значения числа  $R$  определяются из линеаризованной системы

$$(1.3) \quad \frac{1}{P} \frac{\partial \Delta \Psi'}{\partial t} = \Delta^2 \Psi' - R \cdot (1 + \eta \sin \omega t) \frac{\partial \theta'}{\partial x}$$

$$P \frac{\partial \theta'}{\partial t} = \Delta \theta' + R \cdot \frac{\partial \Psi'}{\partial x}$$

Периодическое по  $x$  (с периодом  $2\pi/\alpha$ ) решение в случае слоя со свободными горизонтальными границами можно искать в виде

$$(1.4) \quad \Psi' = \alpha \psi(t) \sin \alpha x \sin \pi y, \quad \theta' = \tau(t) \cos \alpha x \sin \pi y$$

где  $\alpha$  — волновое число возмущений вдоль оси  $x$ . Вычисление границы устойчивости сводится [3] к отысканию значений  $R = R_*$ , которым соответствуют периодические решения дифференциального уравнения

$$(1.5) \quad \ddot{\tau} + c_1 \dot{\tau} + [c_2 + c_3 R_*^2 (1 + \eta \sin \omega t)] \tau = 0$$

$$(1.6) \quad c_1 = (1 + P^2) k^2 / P, \quad c_2 = k^4, \quad c_3 = \alpha^2 / k^2, \quad k^2 = \alpha^2 + \pi^2$$

Разыскивая периодические решения уравнения (1.5) в виде ряда Фурье

$$(1.7) \quad \tau(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tau_n \exp(in\omega t/2), \quad \tau_{-n} = \bar{\tau}_n \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

и используя затем метод цепных дробей [6], получим для определения критических чисел  $R_*$  два трансцендентных уравнения. Первое из них

$$(1.8) \quad |\rho_0| = 1, \quad \rho_0 = - \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_5 + \dots}}}$$

служит для вычисления чисел  $R$ , которым соответствуют  $2T$ -периодические решения ( $T = 2\pi/\omega$ ), из второго

$$(1.9) \quad \text{Im} \left( \frac{a_0}{2} + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_4 + \dots}} \right) = 0$$

определяются критические числа, соответствующие  $T$ -периодическим решениям. Уравнение (1.9) далее не используется, так как вещественных корней его обнаружить не удалось. Формула для вычисления элементов  $a_n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) цепных дробей, входящих в уравнения (1.8), (1.9) имеет вид

$$(1.10) \quad a_n = 2[-\frac{1}{2}c_1\omega n + i(c_3R_*^2 + c_2 - \frac{1}{4}\omega^2 n^2)] / (c_3R_*^2 \eta)$$

Уравнение (1.8) было получено следующим образом. Подстановка ряда Фурье (1.7) в (1.5) приводит к бесконечной линейной однородной системе уравнений относительно коэффициентов  $\tau_n$ , распадающейся на две подсистемы. Уравнения первой системы связывают только коэффициенты с четными индексами (им соответствует  $T$ -периодическое решение); в уравнения второй системы

$$(1.11) \quad a_{2n+1}\tau_{2n+1} + \tau_{2n-1} - \tau_{2n+3} = 0 \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

являющейся трехдиагональной и служащей для отыскания  $2T$ -периодических решений, входят лишь коэффициенты Фурье с нечетными индексами. Полагая в (1.11)

$$(1.12) \quad \rho_n = \tau_{2n+1} / \tau_{2n-1} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

приходим к уравнениям

$$(1.13) \quad \rho_n = \frac{1}{\rho_{n+1} - a_{2n+1}} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

при помощи которых выводим для  $\rho_0$  представление в виде быстро сходящейся цепной дроби с комплексными элементами

$$(1.14) \quad \rho_0 = - \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_5 + \dots}}}$$

С другой стороны, по определению

$$(1.15) \quad \rho_0 = \frac{\tau_1}{\tau_{-1}} = \frac{\tau_1}{\bar{\tau}_1} = e^{2i\epsilon} \quad (\tau_1 = r e^{i\epsilon})$$

откуда и следует уравнение (1.8). Коэффициент  $\tau_1$  определяется с точностью до произвольного вещественного множителя  $\pm r$ :  $\tau_1 = \pm r \sqrt{\rho_0}$ , где символом  $\sqrt{\phantom{x}}$  обозначено главное значение квадратного корня из комплексного числа (разрез осуществлен вдоль отрицательной полуоси комплексной плоскости). Не теряя в общности множителя,  $\pm r$  можно положить равным единице, если потребовать

$$(1.16) \quad |\tau_1| = 1, \quad \operatorname{Re} \tau_1 > 0$$

Вычислив  $\tau_1$ , нетрудно найти  $\tau_3$ , затем  $\tau_5$ ,  $\tau_7$  и т. д., пользуясь соотношением (1.12). В результате, суммируя ряд Фурье (1.7) с коэффициентами  $\tau_n = 0$  ( $n=0, \pm 2, \pm 4, \dots$ ), получим собственную функцию, соответствующую  $2T$ -периодическим решениям.

Вычисления показали, что нейтральная кривая (линия, разделяющая области устойчивости и неустойчивости на плоскости  $\alpha$ ,  $\operatorname{Re} \lambda = R_*^2$ ) имеет вид «языка», причем область неустойчивости находится внутри языка. Кривая 1 на фиг. 1 соответствует значениям параметров  $\operatorname{Pr} = 0.733$  (воздух),  $\omega = 200$ ,  $\eta = 0.95$ . Точка минимума  $M_1$  нейтральной кривой имеет в этом

случае координаты  $\alpha=3.302$ ,  $Ra_* = 17075$ . С ростом величины  $P+1/P$  при фиксированных  $\omega$  и  $\eta$  нейтральная кривая смещается вверх, при увеличении частоты  $\omega$  язык расширяется, его «носик» при этом перемещается вправо.

Отметим, что при  $\eta < 1$  существует только один язык и возмущения с достаточно малой длиной волны экспоненциально затухают во времени. При  $\eta > 1$  картина усложняется: появляются новые языки и область неустойчивости расширяется вправо (этот случай в известном смысле рассмотренному в [6], так как при  $\eta > 1$  эффективное ускорение силы тяжести меняет знак).

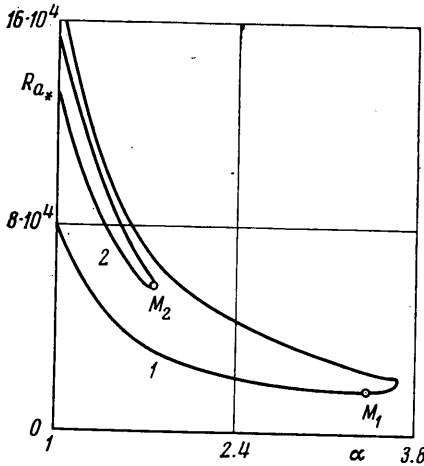
В случае слоя с твердыми изотермическими стенками, используя аппроксимацию скорости и температуры из ([3], стр. 240), приходим снова к уравнению (1.5) с коэффициентами

$$c_1 = \frac{\alpha^4 + 24\alpha^2 + 504}{\alpha^2 + 12} P + \frac{306 + 31\alpha^2}{31P}$$

(1.17)

$$c_2 = \frac{(\alpha^4 + 24\alpha^2 + 504)(306 + 31\alpha^2)}{31(\alpha^2 + 12)}$$

$$c_3 = \frac{121\alpha^2}{124(\alpha^2 + 12)}$$



Фиг. 1

Нейтральная кривая, найденная из уравнения (1.8) с коэффициентами (1.10), (1.17), приведена на фиг. 1 (кривая 2,  $Pr=0.733$ ,  $\omega=200$ ,  $\eta=0.95$ ). Наибольший интерес представляет точка  $M_2$  ( $\alpha=1.758$ ,  $Ra_* = 56776$ ) этой кривой, с которой связана первая потеря устойчивости при нагреве сверху.

По-видимому, этот тип конвективной неустойчивости можно наблюдать в эксперименте. Так, например, расчеты показывают, что в слое воздуха толщиной 27 мм, заключенном между двумя твердыми изотермическими стенками, вибрирующем с частотой 50 гц и амплитудой смещения  $d=3.7$  мм, конвекция должна возникнуть при разности температур на горизонтальных стенках  $29^\circ C$ .

Численно исследовалась зависимость минимального по  $\alpha$  критического числа Рэлея  $Ra_m = \min_{\alpha} Ra_*(\alpha)$  от параметров задачи. Кривые 1, 2, 3 фигуры 2 рассчитаны при  $\omega=200$  и  $\eta$  равном соответственно 0.95, 0.97 и 1. Влияние частоты модуляции отражено на фиг. 3 (1 —  $Pr=0.268$ ,  $\eta=0.85$ ; 2 —  $Pr=0.268$ ,  $\eta=0.95$ ; 3 —  $Pr=0.733$ ,  $\eta=0.95$ ), при этом величина  $Ra_m$  имеет по частоте  $\omega$  четко выраженный минимум.

Вычисления показали, что конвекция в вибрирующем слое с твердыми стенками, подогреваемом сверху, может возникать лишь в узкой области чисел Прандтля при наличии глубокой модуляции достаточно высокой частоты.

К уравнению (1.5) с коэффициентами (1.17) (или (1.6) для слоя со свободными границами) сводится задача о возникновении конвекции в постоянном поле силы тяжести, когда равновесный градиент температуры однороден по толщине и синусоидально модулируется во времени [3]. Поэтому результаты расчетов применимы и в этом случае.

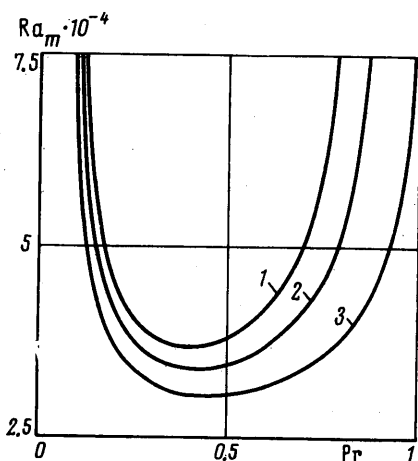
**2. Нелинейная задача.** Для построения решения нелинейной системы (1.1), отвечающего от равновесия при числах  $R$ , близких к критиче-

скому, и исследования утойчивости вторичного режима используется метод Ляпунова — Шмидта в форме, развитой в работах [9-11]. Введем пространство  $H_{2T}$  как замыкание множества гладких вектор-функций  $w = \{\Psi(x, y, t), \theta(x, y, t)\}$ , периодических по  $t$  с периодом  $2T$  и по  $x$  с периодом  $2\pi/\alpha$  по норме, порожденной скалярным произведением

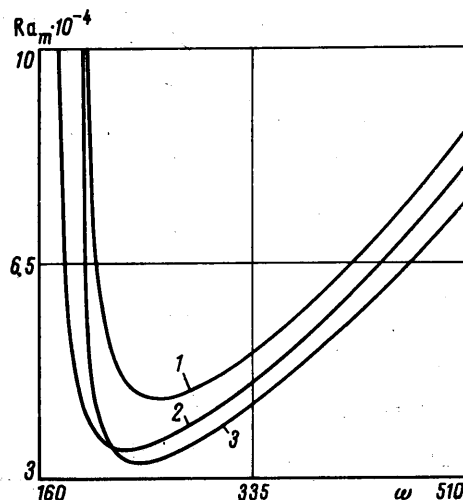
$$(w_1, w_2)_{H_{2T}} = (\Psi_1, \Psi_2)_E + (\theta_1, \theta_2)_E, \quad w_n = \{\Psi_n, \theta_n\}, \quad n=1, 2$$

$$(g_1, g_2)_E = \int_0^{2T} \int_0^1 \int_0^{2\pi/\alpha} g_1 g_2 dx dy dt, \quad g_1, g_2 \in L_2$$

При этом компоненты вектор-функций должны удовлетворять на границах слоя  $y=0, 1$  краевым условиям  $\Psi = \partial\Psi/\partial y = \theta = 0$  при наличии твер-



Фиг. 2



Фиг. 3

дых стенок или условиям  $\Psi = \partial^2\Psi/\partial y^2 = \theta = 0$  в случае свободных границ. Систему (1.1) запишем в виде нелинейного операторного уравнения в  $H_{2T}$

$$(2.1) \quad Aw + RB(t)w = K_2(w, w)$$

$$Aw = \left\{ P^{-1} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} - \Delta^2 \Psi, P \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta \right\}$$

$$B(t)w = \left\{ (1 + \eta \sin \omega t) \frac{\partial \theta}{\partial x}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right\}$$

$$K_2(h, h') = -\{P^{-2}K(h_1, \Delta h_1'), K(h_1', h_2)\}$$

$$h = \{h_1, h_2\}, \quad h' = \{h_1', h_2'\}, \quad h, h' \in H_{2T}$$

Разыскивая малые решения уравнений конвекции, отводящиеся от состояния равновесия, положим в (2.1)

$$(2.2) \quad w = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m w_m, \quad R = R_* + \delta \varepsilon^2, \quad w_m = \{\Psi_m, \theta_m\}$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр,  $\delta = \pm 1$ . Характер ветвления решений уравнений конвекции определяется знаком  $\delta$ : в случае  $\gamma = 1$  вторичный режим существ-

вует при числах  $R$ , больших критического, в случае  $\delta = -1$  — при  $R$ , меньших критического. Знак  $\delta$  заранее не известен и определяется в процессе решения задачи. Подставляя (2.2) в (2.1) и группируя члены одинакового порядка по  $\varepsilon$ , приходим к серии рекуррентных линейных задач вида

$$(2.3) \quad Aw_m + R_* B(t) w_m = f_m(x, y, t), \quad m=1, 2, 3, \dots$$

где  $f_m$  — известные правые части, которые нетрудно выписать. Из уравнения для членов первого порядка выводим, что  $w_1 = \beta u$ , где  $u = \{\Psi', \theta'\}$  — нормированное решение линейной задачи (1.3), а  $\beta$  — константа, подлежащая определению. Величину  $\beta$  можно считать положительной. Коэффициент  $w_2$  при  $\varepsilon^2$  запишем в виде  $w_2 = \beta^2 w_2'$ , где  $w_2'$  находится при решении задачи

$$(2.4) \quad Aw_2' + R_* B(t) w_2' = K_2(u, u), \quad (w_2', v)_{H_{2T}} = 0$$

Здесь  $v = \{\Phi, \Gamma\}$  ( $v \in H_{2T}$ ) удовлетворяет линейной системе уравнений

$$(2.5) \quad \frac{1}{P} \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial t} + \Delta^2 \Phi - R_* \frac{\partial \Gamma}{\partial x} = 0$$

$$P \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \Delta \Gamma + R_* (1 + \eta \sin \omega t) \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

сопряженной (1.3).

Из условия разрешимости неоднородных задач (2.3)

$$(2.6) \quad (f_m, v)_{H_{2T}} = 0 \quad (m=2, 3, 4, \dots)$$

при  $m=3$  находим постоянную  $\beta$

$$(2.7) \quad \beta = \left[ \delta \frac{(Bu, v)_{H_{2T}}}{(K_2(u, w_2') + K_2(w_2', u), v)_{H_{2T}}} \right]^{1/2}$$

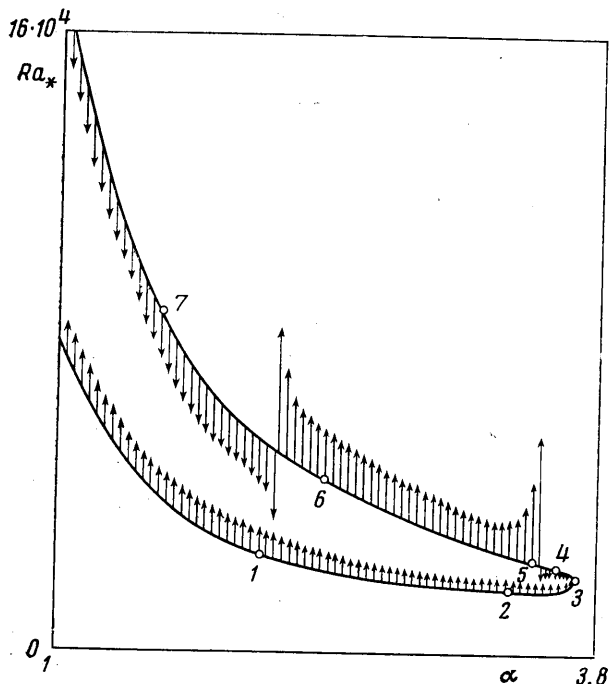
Знак величины  $\delta$  выбирается таким образом, чтобы подкоренное выражение было неотрицательным.

Для исследования устойчивости вторичного режима и состояния равновесия был использован метод линеаризации: нелинейные уравнения конвекции (1.1) были линеаризованы сначала в окрестности периодического режима (2.2), затем в окрестности тривиального решения, соответствующего состоянию покоя, после чего разыскивались решения вида  $z(x, y, t) \exp(\sigma t)$  в первом случае и вида  $z'(x, y, t) \exp(\sigma' t)$  во втором ( $z, z' \in H_{2T}$ ). Полагая  $R$  близким к  $R_*$  и используя метод работы [11], приходим к формулам для показателей экспонент

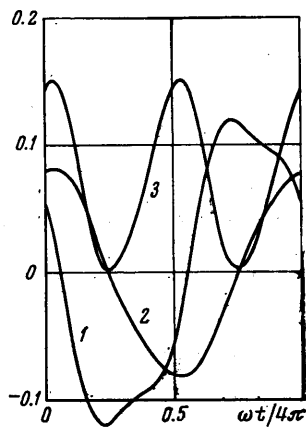
$$(2.8) \quad \sigma = \frac{i\omega}{2} + \mu \delta \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), \quad \sigma' = \frac{i\omega}{2} - \mu(R - R_*) + o(|R - R_*|)$$

$$\mu = \frac{(Bu, v)_{H_{2T}}}{(Nu, v)_{H_{2T}}}, \quad Nu = \{P^{-1} \Delta \Psi', P \theta'\}$$

Поведение возмущений во времени определяется вещественной частью показателя: отрицательной вещественной части соответствует затухание возмущений, положительный — рост и, следовательно, неустойчивость исследуемого режима. Расчеты вторичного  $2T$ -периодического режима были проведены для случая свободных границ. При решении всех краевых задач и вычислении интегралов, входящих в формулы (2.7), (2.8), использовались



Фиг. 4



Фиг. 5

разложения в ряды Фурье. Для выбранной модели находим, что  $u = \sin \pi y \{ \alpha \psi(t) \sin \alpha x, \tau(t) \cos \alpha x \}$ ; вектор  $w_2' = \{ \Psi_2', \Theta_2' \}$  имеет вид

$$(2.9) \quad \Psi_2' = 0, \quad \Theta_2' = \frac{1}{2} \alpha^2 \pi q(t) \sin 2\pi y$$

где  $q$  — периодическое решение дифференциального уравнения

$$(2.10) \quad Pq + 4\pi^2 q = \psi \tau, \quad \psi = \frac{1}{\alpha^2 R_*} (P\tau + k^2 \tau)$$

Здесь  $\psi, \tau$  (см. (1.4)) — собственное решение линейной задачи для амплитуд возмущений, нормированное условием (1.16). Решение сопряженной задачи разыскиваем в форме

$$(2.11) \quad \Phi = \alpha \varphi(t) \sin \alpha x \sin \pi y, \quad \Gamma = \gamma(t) \cos \alpha x \sin \pi y$$

и приходим к уравнениям

$$(2.12) \quad \ddot{\varphi} - c_1 \dot{\varphi} + [c_2 + (R_*^2 c_3 (1 + \eta \sin \omega t))] \varphi = 0 \\ \gamma = k^2 (P^{-1} \dot{\varphi} - k^2 \varphi) / R_*$$

Уравнение (2.12) отличается от (1.5) лишь знаком коэффициента  $c_1$ , поэтому решение  $\varphi(t)$  связано с  $\tau(t)$  соотношением  $\varphi(t) = \tau(\pi/\omega - t)$ .

Отсюда для разложения  $\varphi(t)$

$$(2.13) \quad \varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_{2n+1} e^{i(n+1/2)\omega t}, \quad \Phi_{-m} = \bar{\Phi}_m, \quad m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$

имеем

$$(2.14) \quad \Phi_{2n+1} = i(-1)^{n+1} \bar{\tau}_{2n+1} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

В итоге для констант  $\beta$  и  $\mu$  получаем формулы

$$(2.15) \quad \beta = \frac{1}{\alpha \pi} \left( \frac{2I_1 \delta}{I_2} \right)^{1/2}, \quad \mu^{-1} = \frac{k^2}{PI_1} \int \varphi \psi dt - \frac{P}{\alpha^2 I_1} \int \tau \gamma dt$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} [(1 + \eta \sin \omega t) \varphi \tau + \psi \gamma] dt, \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \psi q \gamma dt$$

с помощью которых были изучены вторичные режимы вблизи нейтральной кривой ( $Pr=0.733$ ,  $\omega=200$ ,  $\eta=0.95$ ).

Вычисленные значения  $\beta$  изображены на фиг. 4 в виде стрелок, при этом стрелка направлена вверх, если вторичный режим существует при  $R > R_*$ , и вниз в противоположном случае. Длина стрелки характеризует в некотором выбранном масштабе численное значение постоянной  $\beta$ . Расчеты показали, что на всей нейтральной кривой, за исключением некоторого отрезка верхней ветви, периодический режим ответвляется внутрь «языка». При переходе через граничные точки этого исключительного отрезка величина  $\beta$  претерпевает разрыв, обращаясь в бесконечность, а константа  $\delta$  меняет знак. В крайней правой точке нейтральной кривой  $\alpha = \alpha_{\max}$  значение  $\beta$  равно нулю, что вызвано слиянием верхней и нижней ветвей (обращение  $\beta$  в нуль и бесконечность отмечалось также в других задачах [12, 13]).

Номера точек	$\alpha$	$Ra_*$	$\beta$	$\mu \cdot 100$	$\delta$
1	2.00	25944	3.58	-72	+1
2	3.30	17075	2.75	-40	+1
3	3.73	19070	1.84	-3.6	+1
4	3.63	22313	4.69	19	-1
5	3.53	23837	5.57	27	+1
6	2.33	44464	7.11	69	+1
7	1.53	85149	6.05	72	-1

Вычисленные значения  $\mu$  оказались отрицательными на нижней ветви нейтральной кривой и положительными на верхней. Это свидетельствует в силу формул (2.8) о том, что вторичные режимы, ответвляющиеся внутрь языка, устойчивы, а ответвляющиеся наружу — неустойчивы; внутренность языка, как и следовало ожидать, является областью неустойчивости состояния покоя. Некоторые численные результаты приведены ниже (числа первой колонки — номера точек нейтральной кривой фиг. 4).

Зависимость величин  $\psi$ ,  $\tau$ ,  $q$  от времени в точке 2 минимума нейтральной кривой представлена на фиг. 5, где 1 —  $\psi$ , 2 —  $0.04 \tau$ , 3 —  $100 q$ .

Заметим, что  $2T$  — периодическое решение задачи (1.3) обладает свойством антипериодичности  $\psi(t+T) = -\psi(t)$ . Это позволяет дать наглядное описание движения жидкости. Плоский слой разбивается, как и в стационарном случае на прямоугольные ячейки; при этом направление вращения конвективных валов в ячейках чередуется. Наличие модуляции силы тяжести приводит к тому, что направление вращения валов не остается постоянным во времени: через время  $T$  все валы синхронно меняют направление вращения на противоположное.

Авторы благодарны участникам Всесоюзной зимней школы «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости» (Москва, 1976) за полезное обсуждение.

Поступила 20 XII 1976



## ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О параметрическом возбуждении конвективной неустойчивости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Юрков Ю. С. О конвективной устойчивости при наличии периодически меняющегося параметра. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
4. Зеньковская С. М., Симоненко И. Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
5. Маркман Г. С. О конвективной неустойчивости слоя жидкости в модулированном поле внешних сил. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.
6. Маркман Г. С., Юдович В. И. Численное исследование возникновения конвекции в слое жидкости под действием периодических по времени внешних сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.
7. Бурдэ Г. И. О конечно-амплитудной конвекции, возникающей в модулированном поле тяжести. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 6.
8. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. ЖЭТФ, 1951, т. 21, вып. 5.
9. Сорокин В. С. О стационарных движениях в жидкости, подогреваемой снизу. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2.
10. Юдович В. И. Пример потери устойчивости и рождения вторичного течения жидкости в замкнутом сосуде. Матем. сб., 1967, т. 74, вып. 4.
11. Юдович В. И. Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
12. Маркман Г. С., Уринцев А. Л. О влиянии высокочастотной вибрации на возникновение вторичных конвективных режимов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 2.
13. Уринцев А. Л. Возникновение автоколебаний в пограничном слое. В сб. «Пристенное турбулентное течение». Тр. 18-го Сибирского теплофизического семинара, ч. 1. Новосибирск, 1975.