

**О РАЗВИТОМ ТЕЧЕНИИ И СОПРОТИВЛЕНИИ  
В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ШЕРОХОВАТЫМИ СТЕНКАМИ**

**М. С. ПОВАРНИЦЫН**

(Новосибирск)

Расчет турбулентного течения и тепломассообмена в пограничном слое, в трубах и каналах с учетом шероховатости стенок проводился в [1-6]. При этом обычно использовалась модель пути смешения или соображения подобия. Применялись также подходы, использующие уравнение переноса энергии турбулентности [4] или уравнение переноса коэффициента турбулентной вязкости в трубе [5]. Шероховатая стенка описывалась набором параметров, главные из которых высота элементов шероховатости  $k$ , отношение среднего расстояния между элементами к их высоте  $p=l/k$  и отношение длины элемента вдоль потока к высоте.

В данной работе рассчитывается развитое течение в плоском канале на основании решения уравнения переноса коэффициента полной вязкости [7, 8] для различных видов шероховатости. Дается приближенное аналитическое и точное численное решение этого уравнения, находится распределение скорости, дефект скорости, коэффициент трения и проводится сравнение с экспериментами.

1. Для развитого течения в плоском канале уравнения движения и переноса коэффициента полной вязкости  $K$  разделяются и последнее для гладкой стенки принимает вид [8]

$$(1.1) \quad \frac{d}{dy_+} K \frac{dK}{dy_+} + A(K-1) \frac{1-y_+ Y_+^{-1}}{K} - \frac{B_1(K-1)K}{L_+^2(y_+)} = 0$$

Здесь  $A$  и  $B_1$  — универсальные постоянные ( $A=1$ ,  $B_1=12$ ),  $L_+(y_+) = f(y_+)y_+$  — длина смешения, равная по порядку величины размеру вихрей;  $f=0.7 \div 0.95$  при  $4 < y_+ < 26$ ; вне этого интервала  $f=1$ , [8] (см. приведенные ниже данные);  $K = (\nu_\tau + \nu)\nu^{-1}$ ;  $\nu_\tau, \nu$  — коэффициенты турбулентной и кинематической вязкости;  $y_+ = yu^*/\nu$ ,  $Y_+ = hu^*/\nu$ ,  $k^+ = ku^*/\nu$ ,  $u^*$  — динамическая скорость,  $2h$  — ширина канала. Начало координат выбирается на дне шероховатой стенки — между элементами.

Шероховатость с параметрами  $k^+$ ,  $p_1, p_2, \dots$  можно учесть, если из каких-либо соображений найти зависимость  $L_+ = L_+(y_+, k^+, p_1, p_2, \dots)$ . Предполагается, что эту зависимость можно выразить, если принять, что величина вихрей у стенки (при  $0 \leq y \leq k_e$ ) равна величине эффективной шероховатости  $L = k_e$ . При этом  $k_e = k$ , если в промежутках между элементами шероховатости, по всей высоте  $k$  элементов, образуются и не распадаются вихри. Если же пики элементов относительно близки один к другому, то появляются застойные зоны, вихри не образуются по всей высоте пиков и  $k_e < k$ . При большом относительном удалении элементов вихри при движении между соседними элементами вырождаются вплоть до образования нового пограничного слоя и в этом случае вновь  $k_e < k$ .

Шероховатость здесь будет характеризоваться двумя параметрами:  $k$  и  $p=l/k$ . Вводится функция  $\varphi \leq 1$

$$(1.2) \quad k_e^+ = k^+ \varphi(p)$$

Функция  $\varphi(p)$  будет определяться из опыта. Коэффициент полной вязкости  $K$  находится из уравнения (1.1) при условии для  $L_+$  и граничных условиях

$$(1.3) \quad L_+ = k_e^+ = \text{const}, \quad 0 \leq y_+ \leq k_e^+; \quad L_+ = f y_+, \quad y_+ > k_e^+$$

$$(1.4) \quad K = K_0, \quad y_+ = 0$$

$$(1.5) \quad \partial K / \partial y_+ = 0, \quad y_+ = Y_+$$

Нелинейное уравнение (1.4) в диапазоне  $0 < y_+ \leq k_e^+$ ,  $k_e^+ \ll Y_+$  при отбрасывании несущественного члена  $y_+/Y_+$  имеет решением константу

$$(1.6) \quad K = k_e^+ \sqrt{A/B_1}$$

Естественно допустить, что и на стенке величина  $K$  имеет то же значение

$$(1.7) \quad K_0 = k_e^+ \sqrt{A/B_1}$$

Это допущение эквивалентно введению вместо (1.4) условия  $\partial K / \partial y_+ = 0$  (см. [4, 5]).

В диапазоне  $k_e^+ \leq y_+ \leq Y_+$  уравнение (1.1) с граничными условиями (1.5) и (1.6) имеет решение [8]

$$(1.8) \quad K^2 = c_1 y_+^{b+1/2} + c_2 y_+^{-b+1/2} + A y_+^2 \left( \frac{1}{B_1 - 1} - \frac{y_+}{Y_+(B_1 - 3)} \right)$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{4} + 2B_1}$$

При выводе (1.8) принималось, что  $L_+ = y_+$  и  $1 - K^{-2} \approx 1$ . Численные расчеты показали, что последнее условие можно применять вплоть до  $y_+ = 3 \div 5$ .

Коэффициент  $K$  (1.8) имеет максимум при  $y_+/Y_+ \approx 0.6$ .

В результате решения уравнения (1.1) и уравнения для продольного импульса находятся скорость, средняя скорость и коэффициент трения

$$(1.9) \quad u/u^* \equiv u^+ = \int_0^{y_+} (1 - y_+ Y_+^{-1}) K^{-1} dy_+$$

$$(1.10) \quad \langle u^+ \rangle \equiv Y_+^{-1} \int_0^{Y_+} u^+ dy_+, \quad \lambda = 8 / \langle u^+ \rangle^2$$

С учетом (1.6), (1.8)

$$(1.11) \quad u^+ = (y_+/k_e^+) \sqrt{B_1/A} (1 - y_+/2Y_+), \quad 0 \leq y_+ \leq k_e^+$$

$$(1.12) \quad u^+ = \sqrt{B_1/A} (1 - k_e^+/2Y_+) + \int_{k_e^+}^{y_+} (1 - y_+ Y_+^{-1}) K^{-1} dy_+, \quad k_e^+ \leq y_+ \leq Y_+$$

Отсюда при естественном условии  $k_e^+ \ll Y_+$  находится универсальное значение скорости при  $y_+ = k_e^+$

$$(1.13) \quad u^+(k_e^+) = \sqrt{B_1/A}$$

При  $B_1 = 12$ ,  $A = 1$  имеем  $u^+(k_e^+) = 3.46$ .

Расчеты показали, что при  $y_+ \geq k_e^+$  коэффициенты  $K$  для гладкой и шероховатой стенок близки. Отсюда скорость  $u^+$  по (1.12) при  $y_+ > k_e^+$  равна

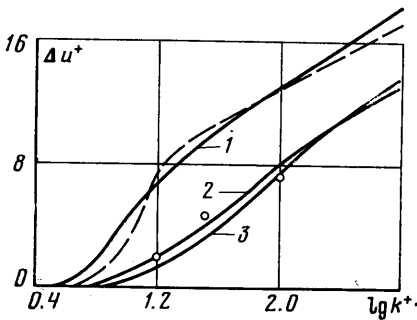
сумме  $u^+(k_e^+)$  и избытка скорости в канале с гладкими стенками. Последний отсчитывается от величины  $u_{\Gamma}^+(y_+ = k_e^+)$ .

Дефект скорости  $\Delta u^+ = u_{\Gamma}^+ - u^+$  при  $y_+ > k_e^+$ , полученный с учетом решения (1.12) и  $K_{\Gamma} \approx K$ , не зависит от координаты  $y_+$

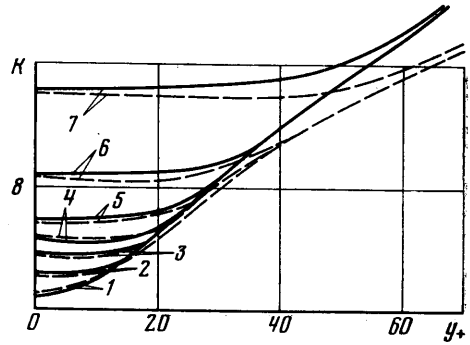
$$(1.14) \quad \Delta u^+ = \int_0^{k_e^+} (1 - y_+ Y_+^{-1}) K_{\Gamma}^{-1} dy_+ - \sqrt{B_1/A} (1 - k_e^+/2Y_+)$$

Аналитические и численные расчеты (см. фиг. 3) подтверждают это при  $k_e^+ > 5$ . Гладкая стенка отмечена индексом Г.

На фиг. 1 показан дефект скорости  $\Delta u^+$ , пунктир — максимальный дефект скорости, замеренный для пограничного слоя [1, 2], точки — опыты



Фиг. 1



Фиг. 2

[9] для песочной шероховатости; сплошные линии — расчет для канала: 1 —  $\varphi = 1.0$ ; 2 —  $\varphi = 0.2$ ,  $p = 3.38$  — песочная шероховатость, численный расчет; 3 — то же, аналитическое решение.

2. Для более точного анализа было получено численное решение уравнения (1.1) с учетом (1.3) с граничными условиями (1.4), (1.5), (1.7). Добавление члена  $\partial Z / \partial x_+$ ,  $Z = K^2$ , приводит к уравнению, для которого можно использовать метод установления

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\sqrt{Z}}{2} \frac{\partial^2 Z}{\partial y_+^2} + A(\sqrt{Z} - 1)(1 - y_+ Y_+^{-1}) - B_1 Z (\sqrt{Z} - 1) L_+^{-2}$$

Уравнение решается по явной схеме с выполнением условия  $\Delta x_+ < (\Delta y_{+n} + \Delta y_{+(n+1)}) \Delta y_{+(n+1)} / 4K_n^j$ . Индекс  $n$  отмечает значения функций при неравномерной разбивке поперечной координаты, индекс  $j$  — продольной. На входе ( $j=0$ ) значения  $K_n^0$  задаются грубо для различных  $k_e^+$  и  $Y_+$ . Счет прекращается, когда  $Z_n^j = \text{const}(j)$ . Находились  $u_n^{j+1}$ ,  $\langle u^{j+1} \rangle$  и числа

$$(2.1) \quad \text{Re}_h = u(h) h \nu^{-1} = Y_+ u_N^{j+1}$$

$$\text{Re}_D = \langle u \rangle 4h \nu^{-1} = 4Y_+ \langle u^{j+1} \rangle, \quad \lambda = 8 / \langle u^{j+1} \rangle^2$$

Здесь и ниже  $D = 4h$  — гидравлический диаметр.

Приведем оптимальные значения разбивки  $y_{+n}$  и функции  $f_n$  при  $y_+ > k_e^+$  для промежутка  $0 \leq y_+ \leq 25$ .

$n$	0	1	2	3	4	5	6
$y_{+n}$	0	4	8	12	16	20	25
$f_n$	1	0.80	0.70	0.72	0.76	0.81	0.89

Вне этого промежутка  $L_{+n} = y_{+n}$ ,  $f_n = 1$ . Были исследованы диапазоны  $Y_+ = 250 \div 2000$ ,  $k_e^+ = 5 \div 30$ . На фиг. 2 показаны значения  $K$  вблизи стенки для случаев  $Y_+ = 250$  (пунктир) и 2000 (сплошные кривые). Кривые 1–7 соответствуют значениям  $k_e^+$ : 0,8, 12, 16, 20, 30, 50. От величины  $Y_+$  (числа Re) коэффициент  $K$  у стенки зависит слабо. Зависимость  $K(y_+)$  во всем диапазоне  $0 \leq y_+ \leq Y_+$  совпадает с приближенным решением (1.6), (1.8). Наблюдается незначительный рост коэффициента с ростом  $Y_+$  при  $y_+ \leq k_e^+$ .

Свойства течения у шероховатой стенки определяются зависимостью  $K(y_+, k_e^+)$  вблизи стенки, где численное и аналитическое решения отличаются незначительно. У стенки течение описывается универсальными параметрами  $y_+$ ,  $k_e^+$ ,  $A$  и  $B_1$ , т. е. является близким для пограничного слоя, трубы или плоского канала. Это позволяет использовать опытные данные в трубах или пограничном слое для сравнения с расчетными в каналах.

На фиг. 3 представлены распределения скорости для  $Y_+ = 2000$  при различной шероховатости  $k_e^+$ . Кривые 1–7 соответствуют значениям  $k_e^+ = 0, 8, 12, 16, 20, 30, 50$ .

У стенки имеется область линейной зависимости скорости, причем эта область расширяется с ростом параметра  $k_e^+$ . Подтверждается эквидистантность кривых. Здесь же приведены опытные данные для гладкой трубы [10]. Точки 1–4 соответствуют числам  $Re = 6100, 9900, 27\,300, 49\,000$ .

Линия  $u^+(y_+ = k_e^+)$  — прямая со слабым отрицательным наклоном, причем  $u^+(k_e^+) = 3.40$  в согласии с (1.13).

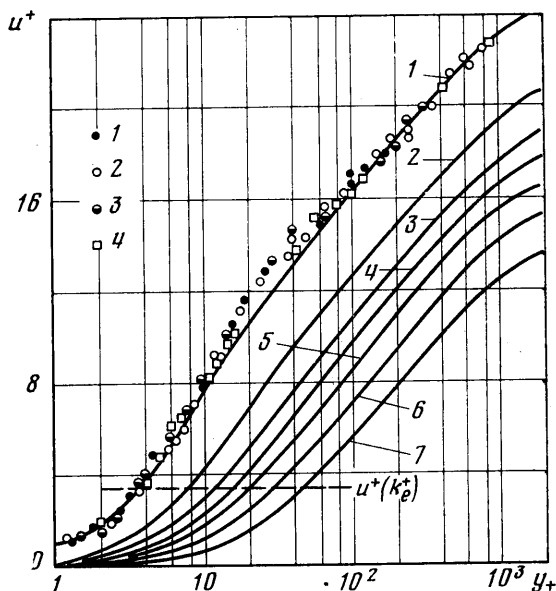
Значения скорости  $u^+$ , полученные аналитически, близки к значениям, полученным численно.

Предельное значение дефекта скорости  $\Delta u^+$ ,  $\varphi = 1$  соответствует экспериментальным данным (см. фиг. 1). Численные расчеты приводят к лучшему совпадению с опытными данными. При расчетах использовалась функция  $\varphi(p)$  из (3.5).

3. Определим из сравнения с опытными данными функцию  $\varphi$ . Эксперименты по течению в пограничном слое и в трубах показывают, что влияние естественной шероховатости наибольшее при  $p = 4.68$  [1, 2], т. е. в этом случае можно принять  $\varphi = 1$ ,  $k_e^+ = k^+$ . Для других  $p$  дефект скорости  $\Delta u^+$  меньше и  $\varphi < 1$ . В [1] дано семейство зависимостей  $\Delta u^+(k^+, p)$  для полностью проявленной шероховатости. Скорость для пограничного слоя представлена в виде

$$(3.1) \quad u^+ = K_1^{-1} \ln(y/k) + A_1 - f(p), \quad K_1 = 0.41, \quad A_1 = 5.5; \quad f(p) = \Delta u^+ - K_1^{-1} \ln(ku^*/\nu)$$

Эксперименты для различных видов шероховатости (песочная, камни, шары, пирамиды, уголки, стержни и т. д.) описываются приближенно



Фиг. 3

корреляциями [1, 2]

$$(3.2) \quad \begin{aligned} f(p) &= 17.35(1.625 \lg p - 1), \quad 0 \leq p \leq 4.68 \\ f(p) &= -5.95(1.103 \lg p - 1), \quad p \geq 4.68 \end{aligned}$$

Представим (3.1) в виде

$$(3.3) \quad u^+ = 5.6 \lg (y_+/k_e^+) + A_1 - 1.5, \quad \Delta u^+ = 5.6 \lg k_e^+ + 1.5$$

тогда с учетом (3.2)

$$(3.4) \quad \begin{aligned} k_e^+ &\equiv \varphi k^+ = 4.46 \cdot 10^{-4} p^5 k^+, \quad p \leq 4.68 \\ k_e^+ &= 6.25 p^{-1.18} k^+, \quad p > 4.68 \end{aligned}$$

Скорость и дефект скорости при течении в шероховатых трубах также описываются функциями (3.1), (3.3), но с наклоном 5.75, поэтому для трубы

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \varphi &= 5.25 \cdot 10^{-4} p^{4.87}, \quad p \leq 4.68 \\ \varphi &= 5.95 p^{-1.15}, \quad p > 4.68 \end{aligned}$$

Отметим, что в [1, 2] в действительности вместо параметра  $p$  взята плотность шероховатости — отношение всей площади к площади, занятой элементами. Однако в [11] показано, что корреляции (3.2) более приемлемы при использовании параметра  $p$ .

4. Для получения коэффициента трения  $\lambda(\text{Re}_D, k/D, p)$  необходимо найти  $\langle u^+ \rangle$ . Однако, используя параметры задачи  $Y_+$  и  $k_e^+$ , можно получить лишь зависимость  $\lambda(k_e^+, Y_+)$ .

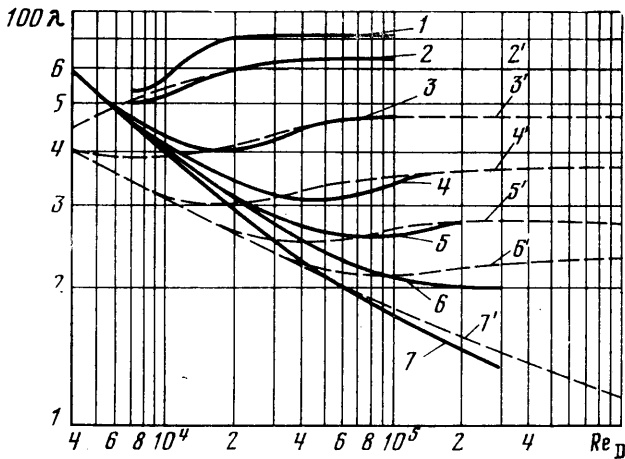
По соотношению (2.1) можно найти также  $\lambda(\text{Re}_D)$  при заданном

$$(4.1) \quad k_e^+ \equiv (k_e/4h) \sqrt{\lambda/8\text{Re}_D}$$

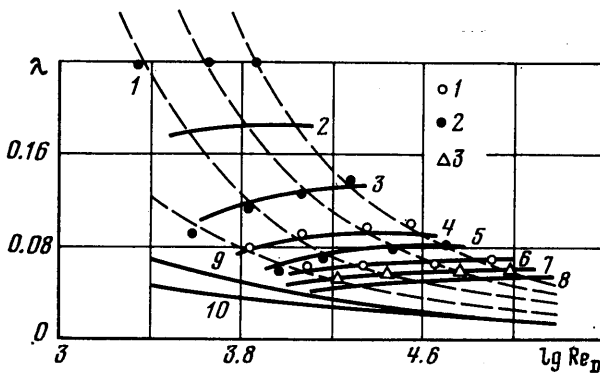
На фиг. 5 показана пунктиром такая зависимость. Эти данные можно рассматривать как исходные при получении стандартных зависимостей  $\lambda(\text{Re}_D, k/D, p)$ . Чтобы построить их, необходимо задать величины  $k_e(k/l)/4h$  и  $k_e^+$  и по (4.1) найти  $c = \sqrt{\lambda} \text{Re}_D$ . Далее из фиг. 5 находится точка на кривой с заданными  $k_e^+$  (разыскивается корень уравнения  $\sqrt{\lambda} \text{Re}_D = c$ ). Изменением  $k_e^+$  находится другая точка и т. д.

Были проведены сравнения с экспериментами в шероховатой трубе с использованием гидравлического диаметра, так как данных о плоском канале в литературе не было найдено. На фиг. 4 представлены графики коэффициента трения для труб с песочной шероховатостью и численные расчеты для плоского канала с песочной шероховатостью  $p=3.2-3.7$ ,  $\varphi^{-1}=3-6$ . Сплошные линии 1-7 — расчет при следующих значениях параметров: 1 —  $\varphi^{-1}/4$ ,  $D/2k=15$ ; 2 —  $1/3$ , 15; 3 —  $1/4$ , 30.6; 4 —  $1/4$ , 60; 5 —  $1/3$ , 126; 6 —  $1/3$ , 252; 7 — гладкий канал. Пунктир — эксперимент для трубы с песочной шероховатостью [12]. Кривые 2', 3', 4', 5', 6', 7' соответствуют значениям  $D/2k=15, 30.6, 60, 126, 252$  и  $\infty$ . Чтобы совпадение с опытными данными при умеренных числах  $\text{Re}$  было удовлетворительным, величина  $\varphi$  должна возрастать от  $1/3$  до  $1/3$  с ростом  $D/2k$ . При малых числах  $\text{Re}_D (< 3 \cdot 10^4)$  коэффициент  $\lambda$  для плоского канала с гладкими стенками в соответствии с опытом [13] больше, чем для гладкой трубы. Соответственно коэффициент трения  $\lambda$  в шероховатом канале несколько выше.

Величину  $\lambda$  можно найти также, используя экспериментальную кривую  $\lambda(\text{Re}_D)$  и расчетные кривые  $\lambda(\text{Re}_D, k_e^+)$ . Таким способом проводились сравнения рассчитанных коэффициентов  $\lambda$  в канале с замеренными в трубе с искусственной шероховатостью в виде колец высотой  $k$  и расстоянием



Фиг. 4



Фиг. 5

между кольцами  $l$  [14]. Вначале необходимо разыскать функцию  $\varphi(p)$ . Для шероховатой трубы с поперечными кольцами опыт дает [14]

$$u^+(k^+) = \sqrt{8/\lambda} + 2.5 \ln(2k/D) + 3.75$$

Подстановка сюда экспериментальных значений  $\lambda(Re_D)$  и  $k/D$  определяет  $u^+(k^+)$  и  $k^+ = (k/D) Re_D \sqrt{\lambda/8}$ . Для  $p=10$  в эксперименте при  $k^+=40-100$  получено  $u^+(k^+)=3.4$ . Отсюда следует  $k_e^+=k^+$ , т. е.  $\varphi(10)=1$ . При увеличении  $p$  опытное значение  $u^+(k^+)$  возрастает, т. е. в согласии с формулой, полученной из (1.11)

$$(4.2) \quad u^+(k^+) = \sqrt{B_1/A} (1 - k^+/2Y_+) / \varphi(p)$$

должно быть  $\varphi(p) < 1$ .

На основании обработки большого числа опытов, проведенных в трубах с шероховатостью в виде поперечных ребер, в работе [6] наибольший дефект скорости получен также при  $p=8-12$ .

Экспериментальные данные для  $u^+(k^+)$  при  $p=10-40$  [14] согласуются с теоретическими (4.2), если принять

$$\varphi(p) = (p/10)^{-0.71}, \quad p \geq 10$$

На фиг. 5 показаны расчетные (сплошные линии) и опытные (точки) значения коэффициента  $\lambda$  для  $k/D=0.02$ ,  $p=20, 40$  (точки 1) и  $p=10$ ,  $k/D=0.04, 0.02, 0.01$  (точки 2). Здесь же приведены экспериментальные данные для песочной шероховатости [<sup>12</sup>] при  $k/D=1/30$  (точки 3); 1 —  $k/D=0.04$ ,  $p=10$ ; 2 — 0.03, 10; 3 — 0.02, 10; 4 — 0.02, 20; 5 — 0.01, 10; 6 — 0.02, 40; 8 — 0.005, 10; 7 —  $k/D=0.033$ ,  $\phi=0.185$  (песочная шероховатость); 9 — гладкий канал (расчет); 10 — гладкая труба (опыт [<sup>12</sup>]). Пунктирными кривыми 11—14 на фиг. 5 соответствуют значения  $k_e^+=8, 16, 30, 50$ .

Некоторое завышение теоретических значений  $\lambda$  при малых Re и слабой шероховатости объясняется различием геометрии в теории и эксперименте.

Автор признателен Е. В. Юрловой, выполнившей ряд расчетов.

Поступила 18 III 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Dvorak F. A. Calculation of turbulent boundary layers on rough surfaces in pressure gradient. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 9. (Рус. перев.: Расчет турбулентного пограничного слоя на шероховатой поверхности при наличии градиента давления. Ракетная техника и космонавтика, 1969, т. 7, № 9.)
2. Dvorak F. A. Calculation of compressible turbulent boundary layers with roughness and heat transfer. AIAA Journal, 1972, vol. 10, No. 11. (Рус. перев.: Расчет сжимаемого турбулентного пограничного слоя на шероховатой поверхности с учетом теплообмена. Ракетная техника и космонавтика, 1972, т. 10, № 11).
3. Yaglom A. M., Kader B. A. Heat and mass transfer between a rough wall and turbulent fluid flow at high Reynolds and Péclet numbers. J. Fluid Mech., 1974, vol. 62, pt. 3.
4. Taylor P. A. Some comparisons between mixing-length and turbulent energy equation models of flow above a change in surface roughness. Lect. Notes Phys., 1973, vol. 19, p. 246—253.
5. Лебедев А. Б., Секундов А. Н. Применение уравнения для турбулентной вязкости при описании течения вблизи шероховатой поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 5.
6. Baumann W., Rehme K. Friction correlations for rectangular roughnesses. Intern. J. Heat and Mass Transfer, 1975, vol. 18, No. 10.
7. Nee V. W., Kovaszny L. S. G. Simple phenomenological theory of turbulent shear flows. Phys. Fluids, 1969, vol. 12, No. 3.
8. Поварницын М. С. Расчет коэффициента турбулентной вязкости и течения в плоском канале. Инж.-физ. ж., 1977, т. 32, № 3.
9. Goddard F. E., Jr. Effect of uniformly distributed roughness on turbulent skin-friction drag at supersonic speeds. J. Aerospace Sci., 1959, vol. 26, No. 1.
10. Lindgren E. R., Chao J. Average velocity distribution of turbulent pipe flow with emphasis on the viscous sublayer. Phys. Fluids, 1969, vol. 12, No. 7.
11. Simpson R. L. A generalized correlation of roughness density effects on the turbulent boundary layer. AIAA Journal, 1973, vol. 11, No. 2.
12. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
13. Dalle Donne M., Meerwald E. Heat transfer and friction coefficients for turbulent flow of air in smooth annuli at high temperatures. Intern. J. Heat and Mass Transfer, 1973, vol. 16, No. 4.
14. Webb R. L., Eckert E. R. G., Goldstein R. J. Heat transfer and friction in tubes with repeated-rib roughness. Intern. J. Heat and Mass Transfer, 1971, vol. 14, No. 4.