

Из проведенного анализа можно сделать выводы о затухании звуковых колебаний в газе. Именно, увеличение внутренней энергии газа говорит о поглощении энергии акустических колебаний. Декремент затухания звуковой волны определяется долей энергии, поглощаемой в единицу времени

$$\delta = \frac{dE_*}{dt} \frac{1}{E_*}$$

где E_* — энергия звуковой волны.

Поскольку

$$\frac{dE_*}{dt} = - \frac{\partial E}{\partial t}, \quad E_* \approx \langle \rho v^2 \rangle$$

для декремента получаем выражение

$$\delta = -\gamma(\gamma-1)v_2 E/E_* - (\zeta + 4/3\eta)u_2/E_*$$

или, учитывая, что $E \approx \gamma(\gamma-1)\rho c^2$, имеем

$$(4.1) \quad \delta = -M^2\omega - \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta \right) \frac{\omega^2}{\rho c^2}, \quad M Pe > 1$$

$$\delta = -\frac{a_e}{c^2}\omega^2 - \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta \right) \frac{\omega^2}{\rho c^2}, \quad M Pe < 1$$

Последнее выражение для декремента затухания звука находится в полном согласии с формулой (77.6) работы [5], определяющей коэффициент поглощения звука в покоящемся газе.

Процесс турбулентного переноса тепла увеличивает коэффициент теплопроводности и приводит к увеличению декремента затухания звука. Для акустической турбулентности эта зависимость дается выражением (4.1), откуда видно, что в отличие от некоррелирующих ($M Pe < 1$) звуковых волн в развитом каскаде нелинейно-взаимодействующих плоских волн ($M Pe > 1$) низкочастотные (и, следовательно, длинноволновые) колебания затухают эффективнее благодаря турбулентному перемешиванию газа более мелкими масштабами.

Поступила 28 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. Новосибирск, «Наука», 1970.
2. Захаров В. Е., Саздеев Р. З. О спектре акустической турбулентности. Докл. АН СССР, 1970, т. 192, № 2.
3. Вайнштейн С. И. Задача о генерации магнитного поля при наличии акустической турбулентности. Докл. АН СССР, 1970, т. 195, № 4.
4. Накоряков В. Е., Бурдуков А. П., Болдарев А. М., Терлеев П. Н. Тепло- и массообмен в звуковом поле. Новосибирск, 1970.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.

УДК 541.124

ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА К АНАЛИЗУ ХИМИЧЕСКИ НЕРАВНОВЕСНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗОВ

В. С. БЕЛЯНИН

(Москва)

В работе анализируется течение химически неравновесного газа в каналах произвольной формы. Выделены основные определяющие параметры и на их основе получены достаточные условия течения с равновесным или замороженным составом. В качестве иллюстрации полученных результатов рассмотрены течения в обогреваемом канале постоянного сечения и адиабатическом сопле.

1. Общие соотношения. В данной работе при анализе нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих поток реагирующего газа, приняты следующие упрощения: 1) поток газа стационарный и одномерный, 2) диффузионные скорости компонентов значительно меньше средней скорости потока, 3) уравнение состояния принимается таким же, как для идеального газа, 4) химическая реакция не нару-

шает равновесного максвелл-больцмановского распределения. (Это допущение позволяет пользоваться обычными определениями термодинамических величин.)

В дальнейшем рассматривается поток с одной неравновесной обратимой химической реакцией

$$\rho \frac{d\xi}{dt} = \omega^+ \left[1 - \frac{k_r}{k_f} \prod \left(\frac{c_i}{\mu_i} \rho \right)^{\nu_i} \right] = \omega^+ F_0(\xi)$$

Здесь ρ — плотность газа, ξ — удельная степень завершенности реакции [1], μ_i — молекулярная масса компонента i , c_i — массовая доля, ν_i — стехиометрический коэффициент ($\nu_i > 0$ для продуктов реакции, $\nu_i < 0$ для исходных веществ).

Преобразуем уравнение кинетики реакции к виду

$$(1.1) \quad \varepsilon \frac{d\xi}{dx} = F(\xi)$$

$$w = dX/dt, \quad x = X/L, \quad \tau_g = L/w, \quad \tau_x = 1/R^+ = \rho \xi_m / \omega^+$$

Здесь L — характерный линейный размер, X — координата вдоль оси канала, w — скорость потока, ξ_m — максимальное значение ξ , $F(\xi) = \xi_m F_0(\xi)$, $\varepsilon = \tau_x / \tau_g$; величина τ_g представляет собой характерное газодинамическое время, а величина τ_x пропорциональна времени химической релаксации [2]. Будем пользоваться начальным условием $\xi(x=0) = \xi^0$.

В общем случае при неизотермическом движении газа численное значение параметра ε может меняться в пределах от $\varepsilon \approx 0$ до $\varepsilon \approx \infty$. Анализ уравнения (1.1) методом возмущения включает в себя получение сингулярного (действительного для $\varepsilon \rightarrow 0$) и регулярного решений (для $\varepsilon \rightarrow \infty$). Решение нелинейного уравнения (1.1) аналитическими методами для промежуточных значений ε наталкивается на непреодолимые трудности.

2. Течение, близкое к замороженному. Пусть

$$(2.1) \quad \varepsilon \rightarrow \infty \quad (\tau_x / \tau_g \gg 1)$$

Необходимо отметить, что эти условия не обязательно означают $\tau_x \rightarrow \infty$; просто скорость реакции намного меньше скорости потока, хотя абсолютная величина самой скорости реакции может быть большой.

При условии (2.1) решение (1.1) можно искать в виде рядов по малому параметру $1/\varepsilon$

$$(2.2) \quad \xi(x, \varepsilon) = \xi_0(x) + (1/\varepsilon) \xi_1(x) + (1/\varepsilon)^2 \xi_2(x) + \dots$$

где $\xi_0(x)$ представляет собой решение для замороженного течения.

Подставляя (2.2) в (1.1), разлагая правую часть уравнения в ряд Тейлора и сравнивая члены с одинаковыми степенями $1/\varepsilon$, получим для нулевого и первого приближений

$$d\xi_0/dx = 0, \quad d\xi_1/dx = F(\xi_0)$$

или, выполняя интегрирование

$$\xi_0(x) = \text{const} = \xi^0, \quad \xi_1(x) = \int_0^x F(\xi_0) dx$$

Здесь учтено, что $\xi(0) = \xi^0$, и поэтому $\xi_1(0) = 0$.

Тогда из разложения (2.2), в котором ограничимся двумя членами, имеем решение

$$\xi(x) = \xi^0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x F(\xi_0) dx$$

Функция $F(\xi_0)$ является слабо меняющейся функцией x , и поэтому характер течения в первом приближении зависит от величины $1/\varepsilon$. При малых значениях $1/\varepsilon$ получим

$$\xi(x) \approx \xi^0 = \text{const}$$

Таким образом, условие (2.1) является достаточным условием осуществления околосамозамороженного течения.

3. Течение, близкое к равновесному. Рассмотрим второй предельный случай, когда

$$(3.1) \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (\tau_x / \tau_g \ll 1)$$

Часто эти условия считаются достаточными для установления химически равновесного течения. Однако в общем случае это не так, и поэтому рассмотрим решение уравнения (1.1) при условии (3.1).

Величина производной $d\xi/dx$ при неизотермическом течении газа в канале ограничена, и поэтому $F(\xi)$ должна приближаться к нулю по мере того, как $\varepsilon \rightarrow 0$. Это означает, что величина ξ стремится к локально-равновесному значению ξ_e^1 , которое соответствует условию $\varepsilon = 0$. В связи с этим будем искать решение (1.1), исходя из решения для случая $\varepsilon = 0$, способом, описанным в работе [3].

Сингулярное решение, полученное методом возмущений, является рядом по переменной ε

$$(3.2) \quad \xi(x, \varepsilon) = \xi_e(x) + \xi_{pe}(x_e) + \varepsilon[\xi_{p1}(x) + \xi_{p1}(x_e)] + \\ + \varepsilon^2[\xi_{p2}(x) + \xi_{p2}(x_e)] + \dots, \quad x_e = x/\varepsilon$$

Подставляя (3.2) в (1.1), разлагая правую часть в ряд по параметру ε и приравнявая члены с одинаковыми степенями ε , получим для нулевого и первого приближений

$$(3.3) \quad F(\xi_e) = 0, \quad \frac{d\xi_e}{dx} = \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_e} \xi_1(x)$$

$$(3.4) \quad \frac{d\xi_{pe}}{dx_e} = F[\xi_e(0) + \xi_{pe}(x_e)] - F[\xi_e(0)] \approx \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_e} \xi_{pe}(x_e)$$

Дифференциальное уравнение для $\xi_{p1}(x_e)$ имеет довольно сложный вид. Не выписывая этого уравнения, отметим, что из анализа общего решения следует [3] пропорциональность ξ_{p1} величине $\exp(-1/\varepsilon)$, и поэтому не будем в приближенном анализе учитывать в (3.2) член $\varepsilon \xi_{p1} \sim \varepsilon \exp(-1/\varepsilon)$.

Решением уравнения (3.4) является функция

$$(3.5) \quad \xi_{pe}(x_e) = \xi_{pe}(0) \exp\left[\left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_e(0)} x_e \right] = \\ = [\xi^0 - \xi_e(0)] \exp \left[-x \frac{\tau_p(\xi_e(0))}{\tau_g} \right]$$

Второе равенство в (3.5) написано с учетом соотношения

$$\frac{\varepsilon}{\left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_e}} = \frac{w}{LR_e + \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_e}} = - \frac{\tau_p}{\tau_g}$$

где τ_p — время химической релаксации, согласно определению [2] равное

$$(3.6) \quad \tau_p = - \left[R_e + \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right)_{\xi=\xi_e} \right]^{-1}$$

Используя (3.3) и (3.5), из решения (3.2) в первом приближении получим

$$(3.7) \quad \xi(x, \varepsilon) = \xi_e(x) + [\xi^0 - \xi_e(0)] \exp \left[-x \frac{\tau_p}{\tau_g} \right] - \tau_p \frac{d\xi_e}{dt}$$

Введем время τ_* , характеризующее скорость изменения равновесной удельной степени завершенности реакции и являющееся наряду с τ_g характерным временем потока

$$\tau_*^{-1} \equiv \frac{d \ln \xi_e}{dt} = \frac{d \ln \xi_e}{\tau_g dx}$$

Если начальное условие задачи соответствует химически равновесному состоянию, т. е. $\xi^0 = \xi_e(0)$, то тогда из (3.7) получаем

$$(3.8) \quad \frac{\xi_e(x) - \xi(x, \varepsilon)}{\xi_e(x)} = \frac{\tau_p}{\tau_*}$$

¹ Здесь и ниже индекс e обозначает равновесные условия.

Второе слагаемое в (3.7), выражающее влияние начальных условий, может быть исключено из рассмотрения также и на длине канала $x \geq x_0 = \ln \beta^{-1} (\tau_g/\tau_p)$, т. е. когда $\exp(-x\tau_p/\tau_g) \leq \beta$, где β — заданная точность (величина β должна выбираться достаточно малой по сравнению с единицей).

Если не учитывать влияния начальных условий, то согласно (3.8) течение будет близким к равновесному при

$$(3.9) \quad \tau_p/\tau_* \ll 1$$

Это соотношение является достаточным условием установления химически равновесного течения.

Таким образом, из выполненного анализа можно сделать следующие выводы. Для осуществления околоравновесного течения достаточным условием является выполнение соотношения $\tau_x/\tau_g \gg 1$. Для установления околоравновесного течения достаточным является условие $\tau_p/\tau_* \ll 1$.

4. Примеры конкретных расчетов. Ограничиваясь наиболее интересным случаем околоравновесного течения, применим полученные результаты к анализу потока газа в обогреваемом канале постоянного сечения и адиабатическом сопле.

Течение в обогреваемом канале. Практический критерий околоравновесного течения в обогреваемом канале можно получить непосредственно из соотношения (3.8). Действительно, для любой заданной точности достижения равновесия $\beta > 0$ ($\beta \ll 1$) неравенство $\beta \geq |(\xi_e - \xi)/\xi_e|$ выполняется, когда $\tau_p/\tau_* \leq \beta$, или

$$(4.1) \quad d \ln \xi_e/dX \leq \beta/x_p, \quad x_p = \tau_p w_e$$

где x_p — характерная длина релаксации. Ценность этого критерия заключается в том, что все величины определяются свойствами химически равновесного потока.

Если течение осуществляется с малой скоростью (квадрат числа Маха является малой величиной), то тогда уравнение сохранения количества движения записывается как $P(x) = \text{const}$, а уравнение сохранения энергии для равновесного потока можно представить в виде [4]

$$dT_e/dX = q/(GC_{pe})$$

где P — давление, C_{pe} — удельная изобарная теплоемкость газа, q — линейная тепловая нагрузка, передаваемая нормально от стенок канала к потоку газа с массовым расходом G . Отношение q/G представляет собой энергию, подведенную извне к единице массы газа на единице длины канала. С учетом уравнения энергии окончательно из (4.1) найдем

$$\frac{q}{G} \leq \frac{\beta C_{pe}}{x_p (\partial \ln \xi_e / \partial T_e)_P}$$

Выполнение этого неравенства, определяющего верхний предел значения величины q/G , является достаточным условием близости течения к химически равновесному с точностью не хуже β относительно состава, выраженного через удельную степень завершенности.

Течение в адиабатическом сопле. Выпишем уравнения, описывающие химически равновесное адиабатическое течение, которое в этом случае является и изэнтропическим

$$d\rho/\rho + dw/w + dA/A = 0, \quad dP + \rho w dw = 0$$

$$dS(T, P \text{ или } \rho) = 0, \quad F(T, P \text{ или } \rho) = 0$$

$$P - \rho R_0 T / \mu = 0$$

Здесь S — энтропия, R_0 — универсальная газовая постоянная; индекс e у величин T , P , ρ и w для простоты опущен. Площадь локального поперечного сечения канала $A(x)$ считается заданной функцией координаты x .

Из приведенных уравнений после преобразований можно получить

$$(4.2) \quad \frac{dw}{w} = \frac{1}{M_e^2 - 1} \frac{dA}{A}, \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{M_e^2}{M_e^2 - 1} \frac{dA}{A}$$

$$\frac{dP}{P} = -a_e^2 \frac{\rho}{P} \frac{M_e^2}{M_e^2 - 1} \frac{dA}{A} = -a_e^2 \frac{\mu}{R_0 T} \frac{M_e^2}{M_e^2 - 1} \frac{dA}{A}$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{M_e^2}{M_e^2 - 1} \left[\frac{1 + \rho \mu \Delta v (\partial \xi_e / \partial \rho)_T - a_e^2 \rho / P}{1 + T \mu \Delta v (\partial \xi_e / \partial T)_\rho} \right] \frac{dA}{A} = E_T(T, \rho) \frac{M_e^2}{M_e^2 - 1} \frac{dA}{A}$$

$$(4.3) \quad \frac{d\xi_e}{\xi_e} = \frac{M_e^2}{M_e^2 - 1} \left[\left(\frac{\partial \ln \xi_e}{\partial \ln T} \right)_\rho E_T(T, \rho) - \left(\frac{\partial \ln \xi_e}{\partial \ln \rho} \right)_T \right] \frac{dA}{A} \equiv \\ \equiv E_\xi(T, \rho) \frac{M_e^2}{M_e^2 - 1} \frac{dA}{A}$$

Здесь $a_e^2 = (\partial P / \partial \rho)_s$ — равновесная скорость звука, $M_e = w/a_e$ — локальное равновесное число Маха, Δv — изменение числа молей при реакции, $E_T(T, \rho)$ и $E_\xi(T, \rho)$ — функции, вводимые соответственно уравнениями (4.2) и (4.3).

Заметим, что функции E_T и E_ξ могут быть выражены и через термодинамические переменные T и P

$$E_T(T, P) = \frac{1 + a_e^2 \mu / R_0 T [P \mu \Delta v (\partial \xi_e / \partial P)_T - 1]}{1 + T \mu \Delta v (\partial \xi_e / \partial T)_P} \\ E_\xi(T, P) = \left(\frac{\partial \ln \xi_e}{\partial \ln T} \right)_P E_T(T, P) - a_e^2 \frac{\mu}{R_0 T} \left(\frac{\partial \ln \xi_e}{\partial \ln P} \right)_T$$

Очевидно, $E_T(T, \rho) = E_T(T, P)$ и $E_\xi(T, \rho) = E_\xi(T, P)$. Частные производные от ξ_e по параметрам T , P и ρ , которые входят в E_T и E_ξ , можно вычислить для произвольной обратимой реакции по формулам работы [1].

Используя соотношения (3.9) и (4.3), методом, аналогичным рассмотренному в предыдущем примере, получаем

$$\left| \frac{1}{A} \frac{dA}{dX} \right| \leq \left| \frac{M_e^2 - 1}{M_e^2} \frac{\beta}{x_p E_\xi} \right|$$

Этот критерий определяет верхний предел величины относительного изменения площади поперечного сечения канала и является достаточным условием околоравновесного течения с точностью не хуже β по величине ξ .

Критерий (3.9) нетрудно представить и в других видах. Например, используя (4.2), легко получить

$$\left| \frac{1}{T} \frac{dT}{dX} \right| \leq \left| \frac{E_T}{E_\xi} \frac{\beta}{x_p} \right|$$

Так как целью является общее исследование течения реагирующего газа в каналах, то не будем проводить каких-либо оценок или рассматривать более специальные случаи. Отметим только, что вопросам оценки степени химической неравновесности в потоках посвящены, например, работы [5-8].

В заключение рассмотрим только одну особенность потока в адиабатическом сопле. Если рассматривать расширяющуюся часть сопла, то вследствие уменьшения плотности и температуры вниз по потоку будет происходить увеличение времени релаксации τ_p , причем начиная с некоторого сечения расширяющегося участка течение газа очень быстро переходит к практически замороженному. В этом случае для определения параметров потока достаточно получить условие, определяющее положение «точки замораживания», от которой с одной стороны течение будет близким к равновесному, с другой — близким к замороженному. Если считать, что в этой точке одновременно выполняются (или не выполняются) достаточные условия околоравновесного (2.1) и околоравновесного (3.9) течений, то будем иметь

$$(4.4) \quad \tau_p / \tau_* = \tau_g / \tau_x$$

Полагая, что τ_g и τ_x одного порядка, т. е. $\varepsilon \approx 1$, получим из (4.4) критерий, определяющий «точку замораживания», который совпадает с предложенным в работе [7]

$$\tau_p = \tau_* \quad \text{или} \quad d \ln \xi_e / dX = x_p^{-1}$$

Если считать, что τ_p и τ_g одного порядка, то получим из (4.4) критерий, аналогичный критерию Брея [3]

$$\tau_* = \tau_x \quad \text{или} \quad w d \ln \xi_e / dX = R^+$$

Дальнейший анализ свойств потока газа в переходной зоне требует более детального рассмотрения.

Поступила 6 IX 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белянин В. С., Шпильрайн Э. Э.* К расчету равновесного состава многокомпонентной реагирующей газовой смеси. Теплофизика высоких температур, 1975, т. 13, № 5.
2. *Белянин В. С.* Релаксационные процессы в химически реагирующих газах. Изв. АН БССР. Сер. физ.-энерг. н., 1977, № 2.
3. *Васильева А. Б.* Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных задач. Добавление 2 к кн.: Вазов В. «Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений». М., «Мир», 1968.
4. *Белянин В. С., Горбунова Н. И., Шпильрайн Э. Э.* Математическое описание турбулентного изобарного течения химически реагирующего газа в обогреваемой трубе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 1.
5. *Penner S. S.* Thermodynamics and chemical kinetics of one-dimensional nonviscous flow through a Laval nozzle. J. Chem. Phys., 1951, vol. 19, No. 7.
6. *Rudin M.* Criteria for thermodynamic equilibrium in gas flow. Phys. Fluids, 1958, vol. 1, No. 5.
7. *Ельяшевич М. А., Анисимов С. И.* Релаксационные явления при течении газа с большой скоростью. Докл. АН БССР, 1961, т. 5, № 8.
8. *Vray K. N. C.* Atomic recombination in a hypersonic wind-tunnel nozzle. J. Fluid Mech., 1959, vol. 6, No. 1. (Рус. перев.: Рекомбинация атомов в соплах гиперзвуковых аэродинамических труб. В сб. «Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций». М., Изд-во иностр. лит., 1962.)

Технический редактор *Е. В. Синицына*

Сдано в набор 17/XI-1977 г. Т-04119 Подписано к печати 24/I-1978 г. Тираж 1965 экз.
Зак. 3054 Формат бумаги 70×108¹/₁₆ Усл. печ. л. 16,8 Бум. л. 6 Уч.-изд. л. 18,5

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10