ЛИТЕРАТУРА

1. *Gross E. P., Ziering S.* Heat flow between parallel plates. Phys. Fluids, 1959, vol. 2, No. 6.
2. *Liu C. Y., Lees L.* Kinetic theory description of plane compressible Couette flow. In: Rarefied Gas Dynamics. New York — London, Acad. Press., 1961.
3. *Bassanini P., Cercignani C., Pagani C. D.* Comparison of kinetic theory analyses of linearized heat transfer between parallel plates. Intern. J. Heat Mass Transfer, 1967, vol. 10, No. 4.
4. *Горелов С. Л., Коган М. Н.* Решение задачи о скачке температуры (течение в слое Кнудсена) и линейной задачи о передаче тепла между двумя параллельными пластинами в разреженном газе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
5. *Шахов Е. М.* О приближенных кинетических уравнениях в теории разреженных газов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1.
6. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
7. *Ziering S.* Shear and heat flow for maxwellian molecules. Phys. Fluids, 1960, vol. 3, No. 4.
8. *Loyalka S. K., Ferziger H.* Model dependence of the temperature slip coefficient. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, No. 8.
9. *Teagan W. P., Springer G. S.* Heat-transfer and density-distribution measurements between parallel plates in the transition regime. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, No. 8.

УДК 533.7

О МАКРОСКОПИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА С ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

В. А. РЫКОВ, В. Н. СКОБЕЛКИН

(Москва)

В [1] получена система модельных кинетических уравнений, описывающая движения двухатомного газа с вращательными степенями свободы. В настоящей работе на основе асимптотического анализа этих уравнений осуществлен предельный переход к режиму сплошной среды. В рассматриваемом случае кроме числа Кнудсена K существенным параметром является также характерное значение величины Z, обратная величина которой имеет смысл доли неупругих столкновений. Описание движения газа в режиме сплошной среды возможно при произвольной скорости обмена энергией между поступательными и внутренними степенями свободы [2]. В настоящей работе при единственном условии $K \ll 1$ получены двухтемпературные уравнения сплошной среды, справедливые при произвольном Z. Состояние жидкой частицы в общем случае характеризуется вращательной и поступательной температурами. При условиях малости не только величины $K \ll 1$, но и произведения $KZ \ll 1$ система двухтемпературных уравнений сводится к однотемпературным уравнениям Навье — Стокса, содержащим объемный коэффициент вязкости.

1. В основу исследования положена система кинетических уравнений [1]

$$
\frac{\partial f_0}{\partial t} + \xi_j \frac{\partial f_0}{\partial x_j} = \frac{\nu}{Z} (f_0{}^r - f_0) + \nu \left(1 - \frac{1}{Z}\right) (f_0{}^t - f_0)
$$

(1.1)

$$
\frac{\partial f_1}{\partial t} + \xi_j \frac{\partial f_1}{\partial x_j} = \frac{\nu}{Z} (f_1{}^r - f_1) + \nu \left(1 - \frac{1}{Z}\right) (f_1{}^t - f_1)
$$

$$
f_0{}^r = f_M(T)\,[1 - \omega_0 q_i{}^t a_i(T)], \qquad f_0{}^t = f_M(T_t)\,[1 - q_i{}^t a_i(T_t)]
$$

$$
f_1{}^r = kTf_M(T)\,[1 - \omega_0 q_i{}^t a_i(T) + \omega_1 (1-\delta)\, q_i{}^r mc_i/(pkT)]
$$

$$
f_1{}^t = kT_r f_M(T_t)\,[1 - q_i{}^t a_i(T_t) + (1-\delta)\, q_i{}^r mc_i/(p_t kT_r)]
$$

$$f_M(T)=n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mc^2}{2kT}\right),\qquad a_i(T)=\frac{2}{15}\frac{mc_i}{n(kT)^2}\left(\frac{5}{2}-\frac{mc^2}{2kT}\right)$$

$$\nu=p_t/\mu_t,\qquad c_i=\xi_i-U_i$$

Здесь $f_0(t,\ x_j,\ \xi_j)$ – функция распределения частиц газа по скоростям, зависящая от времени t, координат x_j, компонент скорости ξ_j; $f_1(t,\ x_j,\ \xi_j)$ — функция распределения вращательной энергии по скоростному пространству.

Макропараметры выражаются через функции f_0 и f_1

$$n=\int f_0\,d\xi,\qquad nU_i=\int \xi_i f_0\,d\xi,\qquad \frac{3}{2}kT_t=\frac{1}{n}\int\frac{mc^2}{2}f_0\,d\xi$$

$$q_i^t=\int c_i\frac{mc^2}{2}f_0\,d\xi,\qquad kT_r=\frac{1}{n}\int f_1\,d\xi,\qquad q_i^r=\int c_i f_1\,d\xi$$

$$^5/_2kT={}^3/_2kT_t+kT_r,\qquad p_t=nkT_t,\qquad p=nkT$$

Здесь n – плотность частиц, U_i – компоненты макроскопической скорости, T_t – поступательная температура, T_r – вращательная температура, q_i^t – компоненты потока тепла, связанного с поступательными степенями свободы, q_i^r – компоненты потока тепла, обусловленного переносом вращательной энергии частиц, Z^{-1} – доля неупругих столкновений. Выражение для Z приведено в [3].

Если обезразмерить уравнения (1.1), то в левых частях появится множителем число Кнудсена K, которое при $K\ll1$ является малым параметром. Будем искать решение системы уравнений методом возмущения по малому параметру. При реализации этого метода для размерной системы (1.1) удобно ввести формальный малый параметр ε, который указывает порядок члена, перед которым он стоит. В окончательных результатах полагается $\varepsilon=1$.

Запишем систему (1.1), вводя ε

$$\frac{\varepsilon}{\nu}\left(\frac{Df_k}{Dt}+c_j\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right)=\frac{1}{Z}(f_k^r-f_k^t)+(f_k^t-f_k)\qquad (k=0,1)\tag{1.2}$$

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+U_j\frac{\partial}{\partial x_j}$$

Решение системы (1.2) ищем в виде возмущения около решения, соответствующего нулевому приближению по параметру ε

$$f_0=f_0^{(0)}(1+\varepsilon h),\qquad f_1=f_1^{(0)}(1+\varepsilon g)\tag{1.3}$$

Подставляя (1.3) в (1.2) и собирая члены при ε^0, получим уравнения, определяющие нулевое приближение

$$f_k^{(0)}=f_k^t+\frac{1}{Z}(f_k^r-f_k^t)\qquad (k=0,1)\tag{1.4}$$

Умножая уравнение (1.4) при $k=0$ на $c_imc^2/2$, а при $k=1$ на c_i и интегрируя по пространству скоростей, получим

$$0=-\left[\frac{2}{3}+\frac{1-\omega_0}{3Z}\right]q_i^{t(0)},\qquad 0=-\left[\delta+\frac{(1-\delta)(1-\omega_1)}{Z}\right]q_i^{r(0)}$$

Здесь $q_i^{t(0)}$ и $q_i^{r(0)}$ – потоки тепла, вычисленные по функциям нулевого приближения.

Так как выражения в квадратных скобках больше нуля, то $q_i^{t(0)}=q_i^{r(0)}\equiv0$, т. е. потоки тепла q_i^t и q_i^r определяются следующим приближением и имеют порядок ε. Поэтому функции распределения нулевого приближения принимают вид

$$f_0^{(0)}=f_M(T_t)+Z^{-1}[f_M(T)-f_M(T_t)]\tag{1.5}$$

$$f_1^{(0)}=kT_rf_M(T_t)+Z^{-1}[kTf_M(T)-kT_rf_M(T_t)] \tag{1.6}$$

Уравнения сохранения, полученные из (1.2), имеют вид

$$\frac{Dn}{Dt}=-n\frac{\partial U_j}{\partial x_j},\quad \frac{DU_i}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon}{\nu}\left[\frac{D}{Dt}\left(\frac{3}{2}kT_t\right)+\frac{1}{n}\frac{\partial q_j^t}{\partial x_j}+\frac{1}{n}P_{ij}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right]=\frac{1}{Z}\left(\frac{3}{2}kT-\frac{3}{2}kT_t\right)\\ \frac{\varepsilon}{\nu}\left[\frac{D}{Dt}(kT_r)+\frac{1}{n}\frac{\partial q_j^r}{\partial x_j}\right]=\frac{1}{Z}(kT-kT_r)\end{gathered} \tag{1.8}$$

$$P_{ij}=p_t\delta_{ij}+p_{ij},\qquad p_t=nkT_t,\qquad P_{ij}=\int mc_ic_jf_0\,d\xi$$

Аналогично тому, как это сделано в [2], можно показать при помощи уравнений сохранения, что члены, деленные на Z, в (1.5), (1.6) имеют величину порядка $O(\varepsilon)$. Функции распределения нулевого приближения принимают вид $f_0^{(0)}=f_M(T_t)$, $f_1^{(0)}=kT_rf_M(T_t)$.

Уравнения, определяющие функции h и g, строятся в соответствии с теорией, развитой в [4]. Поэтому приведем окончательные выражения для h и g

$$f_M(T_t)h=f_0^t-f_M(T_t)+Z^{-1}(f_0^r-f_0^t)-F \tag{1.9}$$

$$kT_rf_M(T_t)g=(f_1^t-kT_rf_M(T_t))+Z^{-1}(f_1^r-f_1^t)-kT_rF-f_M(T_t)\frac{kT-kT_r}{Z}-\frac{c_j}{\nu}\frac{\partial kT_r}{\partial x_j}f_M(T_t) \tag{1.10}$$

$$F=\frac{1}{\nu}f_M(T_t)\left[\frac{m}{kT_t}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\left(c_ic_j-\frac{c^2}{3}\delta_{ij}\right)+\frac{c_j}{T_t}\frac{\partial T_t}{\partial x_j}\left(\frac{mc^2}{2kT_t}-\frac{5}{2}\right)\right]+\frac{1}{Z}f_M(T_t)\frac{T-T_t}{T_t}\left(\frac{mc^2}{2kT_t}-\frac{3}{2}\right)$$

Эти выражения позволяют вычислить неравновесные напряжения p_{ij} и потоки тепла вращательной и поступательной энергий.

Для p_{ij} имеем

$$p_{ij}=\int mc_ic_jf_M(T_t)h\,d\xi=-\mu(T_t)\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial U_k}{\partial x_k}\right) \tag{1.11}$$

Умножая (1.9) на $c_imc^2/2$, (1.10) на c_i и интегрируя по пространству скоростей, получим

$$q_i^t=-\frac{15}{4}\frac{k}{m}\mu(T_t)(1+0.5(1-\omega_0)Z^{-1})^{-1}\frac{\partial T_t}{\partial x_i} \tag{1.12}$$

$$q_i^r=-\frac{k}{m}\mu(T_t)(\delta+(1-\delta)(1-\omega_1)Z^{-1})^{-1}\frac{\partial T_r}{\partial x_i} \tag{1.13}$$

Соотношения (1.11) – (1.13) замыкают систему двухтемпературных уравнений сохранения (1.7), (1.8).

2. Система двухтемпературных уравнений сводится к системе однотемпературных уравнений Навье – Стокса при дополнительном условии ($KZ\ll1$).

Складывая уравнения (1.8), получим

$$\frac{5}{2}\frac{DkT}{Dt}+\frac{1}{n}\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+\frac{1}{n}p_t\frac{\partial U_i}{\partial x_i}+\frac{1}{n}p_{ij}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}=0 \tag{2.1}$$

$$q_i=q_i^r+q_i^t$$

Пренебрегая в первом уравнении (1.8) членами ε^2Z и заменяя в левой части T_t на T, получим уравнение с точностью до $(\varepsilon Z)^2$

$$kT-kT_t=\frac{\varepsilon Z}{\nu}\left(\frac{DkT}{Dt}+\frac{2}{3}kT\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right)$$

Исключая производную от температуры при помощи (2.1) и пренебрегая членами порядка $(\varepsilon Z)^2$ и $\varepsilon^2 Z$, получим

$$kT - kT_t = \frac{\varepsilon Z}{\nu}\frac{4}{15}kT\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \quad \text{или} \quad p - p_t = \frac{4}{15}\frac{\varepsilon Z}{\nu}p\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \tag{2.2}$$

Аналогично можно показать, что kT отличается от kT_r на величину порядка εZ. Используя соотношения (2.2) для исключения величин T_t и p_t в уравнениях сохранения, придем к однотемпературной системе уравнений Навье — Стокса

$$\frac{Dn}{Dt} + n\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \qquad \frac{DU_i}{Dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{DkT}{Dt} + \frac{2}{5}\frac{1}{n}\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{2}{5}\frac{1}{n}P_{ij}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = 0$$

$$P_{ij} = p\delta_{ij} - \mu(T)\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial U_k}{\partial x_k}\right) - \frac{4}{15}Z(T)\mu(T)\frac{\partial U_k}{\partial x_k}\delta_{ij}$$

$$q_j = -\frac{3}{2}\frac{k}{m}\mu(T)\left[\frac{5}{2+(1-\omega_0)Z^{-1}} + \frac{2/3}{\delta + (1-\delta)(1-\omega_1)Z^{-1}}\right]\frac{\partial T}{\partial x_j}$$

Отметим, что в уравнениях появляется объемный коэффициент вязкости $\zeta = {}^4/_{15}Z(T)\mu(T)$. Соотношение (2.2), записанное через коэффициент вязкости ζ, имеет вид

$$p_t = p - \zeta\frac{\partial U_k}{\partial x_k}$$

Отсюда видно, что член, обусловленный объемной вязкостью, ликвидирует рассогласование между истинным давлением в газе p_t и равновесным давлением p, рассчитанным по равновесной температуре, т. е. он дает поправку в давление на неравновесность процесса.

Поступила 17 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыков В. А.* Модельное кинетическое уравнение для газа с вращательными степенями свободы. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 6.
2. *Галкин В. С., Коган М. Н., Макашев Н. К.* Обобщенный метод Чепмена — Энскога. Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 5.
3. *Ларина И. Н., Рыков В. А.* Обтекание сферы двухатомным газом на основе кинетических уравнений. Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 1.
4. *Мацук В. А., Рыков В. А.* О методе Чепмена — Энскога для смеси газов. Докл. АН СССР, 1977, т. 233, № 1.

УДК 536.24.01:532.517.4

ТЕПЛОПЕРЕНОС В ГАЗЕ ПРИ НАЛИЧИИ АКУСТИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В. В. КАШКАРОВ

(Алма-Ата)

Методом теории возмущений получено уравнение для осредненной внутренней энергии газа в поле акустической турбулентности. Показано, что кроме характерного увеличения коэффициента теплопроводности акустическая турбулентность приводит к нагреву газа за счет эффектов сжимаемости и теплопроводности. При больших числах Маха и Пекле нагрев носит со временем экспоненциальный характер. Получено выражение, определяющее поглощение акустических колебаний в газе.

1. Постановка задачи. Решение задач турбулентного теплопереноса в несжимаемой среде при развитой гидродинамической турбулентности связано с определенными трудностями ввиду отсутствия малого параметра, поэтому исследование носит,