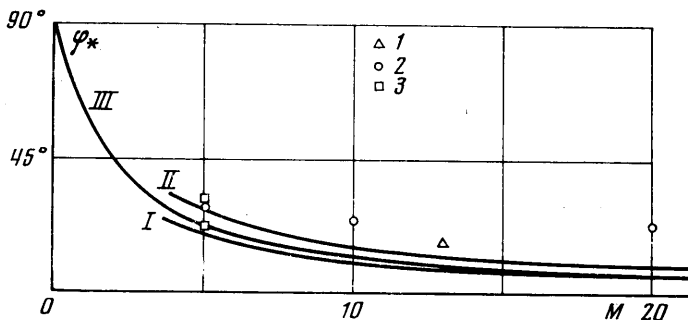


Из фигур, приведенных в работах [2, 3], можно найти значение наибольшего уплотнения¹, равное 2,2, достигнутое в работе [3] ($Re=50,7$, $M=20$, $T_r=T_0=1+1/2(\kappa-1)M^2$; $\kappa=5/3$).

Нарушения же установленного свободномолекулярного предела разрежения $\rho=0,5$ в обозреваемых материалах не наблюдалось.

Одним из важных феноменологических результатов работ [2, 3] было обнаружение линий максимальной плотности, очень близких к прямым, которые ассоциируются со следом, оставленным скачком уплотнения.

На фиг. 5 проводится сравнение координат (углов наклона) линий максимальной плотности φ_* , вычисленных по найденной асимптотической формуле ($S \gg 1$)



Фиг. 5

для «холодной» ($T_r=1$, кривая I) и теплоизолированной ($T_r=S^2/2$, кривая II) поверхностей пластины. Кривая III получена численно без ограничений на S для $T_r=1$. Здесь же нанесены углы наклона «сжатых слоев», взятые из работ [2] — точки 1 ($M=12,9$, $T_r=T_0$, $Kn=48$); [3] — 2 ($M=5, 10, 20$, $T_r=T_0$, $Re=50,7$); (сноска на стр. 175) 3 ($M=5,05$, $T_r=1$, $Kn=0,04$ — нижняя точка; $T_r=T_0$, $Kn=0,0625$ — верхняя точка). Видно, что для умеренно гиперзвуковых чисел ($M=5$) формулы свободномолекулярной модели хорошо диагностируют положение линий максимальной плотности в переходном режиме.

В заключение автор благодарит О. Г. Фридендера за консультации и А. И. Ерофеева за предоставленные материалы.

Поступила 10 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
2. Вогениц, Бродуэлл, Бэрд. Моделирование течения в окрестности передней кромки по методу Монте-Карло. Ракетная техника и космонавтика, 1970, т. 8, № 3.
3. Ерофеев А. И., Перепухов В. А. Расчет обтекания пластины, расположенной вдоль потока разреженного газа. Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 3.
4. Orloff C. R. Wall temperature and speed ratio effects on free molecule flat plate flows. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 2.
5. Trepaud P., Brun E. A study of wakes behind cylinders in free-molecule flow. Rarefied. Gas Dynamics, vol. 2. Now York — London, Acad. Press., 1967.

УДК 533.6.011.8

ТЕПЛОПЕРЕНОС В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХ СТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Ю. И. МАКЕЕВ, П. Е. СУЕТИН, В. Г. ЧЕРНЯК

(Свердловск)

Линейной задаче о теплопереносе в разреженном газе между параллельными плоскостями посвящено немало работ, например [1-4]. Простая геометрия и очевидная физическая постановка делают эту задачу удобной для апробирования приближенных методов решения кинетического уравнения Больцмана.

¹ Вопрос о максимальном уплотнении течения при конечных числах Re (или $Kn=M/Re$) весьма важен хотя бы для такой технической задачи, как сепарация газов.

В данной работе полупространственным моментным методом получены решения этой задачи для четырех моделей столкновительного члена уравнения Больцмана: двух молекулярных (твердые сферы и максвелловские молекулы) и двух статистических моделей (БГК и S -модель [5]). Сравнение полученных решений между собой, а также с результатами других авторов позволяет сделать заключение относительно соответствия статистических моделей полному уравнению Больцмана и о сходимости полупространственного моментного метода.

Пусть состояние газа, заключенного между бесконечными параллельными плоскостями, которые имеют координаты $x = \pm d/2$ и температуры $T_1 = T_0 - \Delta T/2$, $T_2 = T_0 + \Delta T/2$, $T_0 = T(x=0)$, $\Delta T = T_2 - T_1$, описывается функцией распределения вида

$$(1) \quad f = f_0(1+h)$$

где f_0 — равновесная максвелловская функция.

Если справедливо неравенство $\Delta T/T_0 \ll 1$, то величина $h(x, v)$ рассматривается как функция возмущения, удовлетворяющая линеаризованному уравнению Больцмана

$$(2) \quad c_x \frac{\partial h}{\partial x_1} = L(h), \quad c_i = \left(\frac{m}{2kT_0} \right)^{1/2} v_i, \quad x_1 = \frac{x}{d}$$

Здесь $L(h)$ — линеаризованный оператор столкновений.

Учитывая разрывной характер функции распределения в пространстве скоростей, можно записать

$$(3) \quad h = [(1 + \text{sign } c_x) h^+ + (1 - \text{sign } c_x) h^-] / 2$$

Тогда граничные условия для уравнения (2) принимают следующий вид:

$$(4) \quad h^\pm \left(\mp \frac{1}{2}, c_x, c_y, c_z \right) = \mp \varepsilon \frac{\Delta T}{2T_0} (c^2 - B) + (1 - \varepsilon) h^\mp \left(\mp \frac{1}{2}, -c_x, c_y, c_z \right)$$

Здесь ε — доля диффузно рассеянных от граничной поверхности молекул; B — постоянная, определяемая из условия непротекания

$$(5) \quad \int f_0 c_x h \, dv = 0, \quad x_1 = \mp \frac{1}{2}$$

Для решения задачи (2) — (5) можно воспользоваться полупространственным моментным методом. Для этого необходимо аппроксимировать функцию распределения. Пусть в третьем приближении

$$(6) \quad h_3 = 1/2 [(a_1^+ + a_1^-) + (a_2^+ + a_2^-) (c^2 - 3/2) + (a_3^+ + a_3^-) c_x (c^2 - 5/2)] + 1/2 \text{sign } c_x [(a_1^+ - a_1^-) + (a_2^+ - a_2^-) (c^2 - 3/2) + (a_3^+ - a_3^-) c_x (c^2 - 5/2)]$$

Здесь $a_i^\pm(x_1)$ — неизвестные коэффициенты разложения; нижний индекс указывает на порядок приближения.

Физическое обоснование выбранной аппроксимации для функции возмущения дано в работе [1].

Подстановкой выражения (6) в уравнение (2) определяется невязка R , которая должна быть ортогональна к каждой из базовых функций с весом f_0

$$(7) \quad R(x_1, c) = c_x \partial h_3 / \partial x_1 - L(h_3)$$

$$(8) \quad \int f_0 R (1 \pm \text{sign } c_x) \, dv = 0, \quad \int R f_0 \left(c^2 - \frac{3}{2} \right) (1 \pm \text{sign } c_x) \, dv = 0$$

$$\int R f_0 c_x \left(c^2 - \frac{5}{2} \right) (1 \pm \text{sign } c_x) \, dv = 0$$

Из условий (8) следует система шести дифференциальных уравнений, которая легко разрешается относительно коэффициентов разложения $a_i^{\pm}(x_1)$. При этом произвольные постоянные определяются из граничных условий (4) и выражения (5).
 Определяемыми величинами в задаче являются числовая плотность молекул, температура и плотность теплового потока, которые соответственно равны

$$n \approx n_0 + \int f_0 h_3 dv$$

$$(9) \quad T \approx T_0 + \frac{2}{3} \frac{1}{n_0} \int f_0 \left(c^2 - \frac{3}{2} \right) h_3 dv, \quad q \approx \frac{m}{2} \left(\frac{2kT_0}{m} \right)^{3/2} \int f_0 c_x c^2 h_3 dv$$

где m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана.

Ниже обсуждается только результат вычислений плотности теплового потока. В общем случае величина q зависит от закона межмолекулярного взаимодействия, от коэффициента диффузности ϵ и от числа Кнудсена Kn , которое определяется отношением средней длины свободного пробега молекул к расстоянию между плоскостями d .

Зависимость от закона межмолекулярного взаимодействия входит в выражение для q через полупространственные скобочные интегралы столкновений [6]. Эти ин-

Таблица 1

Работа	Модель			
	твердые сферы	максвелловские молекулы	БГК	S-модель
Данная	2.13	2.29	2.22	2.22
[3]	—	—	2.18	—
[4]	—	2.25	—	—
[8]	2.09	2.18	2.18	—

Таблица 2

Kn	Модель			
	твердые сферы	максвелловские молекулы	БГК	S-модель
0.1	0.2603	0.2874	0.2597	0.2597
0.3	0.4903	0.5064	0.4843	0.4828
0.5	0.5963	0.5987	0.5916	0.5859
0.8	0.6822	0.6705	0.6834	0.6722
1	0.7189	0.7011	0.7235	0.7103
3	0.8633	0.8292	0.8757	0.8607
5	0.9088	0.8771	0.9195	0.9075
8	0.9391	0.9130	0.9473	0.9384
10	0.9501	0.9271	0.9572	0.9497
30	0.9823	0.9721	0.9851	0.9821
50	0.9892	0.9827	0.9909	0.9891
80	0.9932	0.9890	0.9943	0.9931
100	0.9945	0.9912	0.9954	0.9945

тегралы легко вычисляются для статистических моделей оператора $L(h)$ (БГК и S-модель), а для твердых сфер и максвелловских молекул они табулированы в работах [4, 7].

Зависимость плотности теплового потока от Kn в общем случае очень сложная. Однако выражение для q значительно упрощается в предельном случае свободного молекулярного режима ($Kn \rightarrow \infty$) и в режиме температурного скачка ($Kn \ll 1$).

$$(10) \quad q_0 \equiv q(\text{Kn} \rightarrow \infty) = - \frac{mn_0}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT_0}{m} \right)^{3/2} \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \frac{\Delta T}{T_0}$$

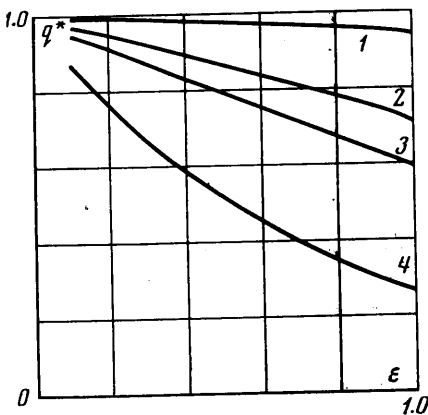
$$(11) \quad q(\text{Kn} \ll 1) = - \frac{\lambda \Delta T}{d(1+2a \text{Kn})}$$

Здесь λ — коэффициент теплопроводности, a — коэффициент температурного скачка.

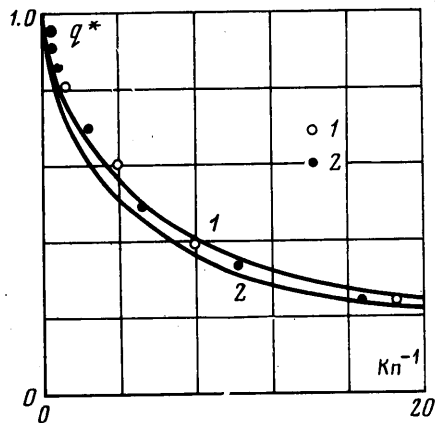
Значения коэффициента a , полученные для четырех столкновительных моделей, приведены в табл. 1 для случая $\varepsilon=1$ и сравниваются с результатами других авторов. Максимальное расхождение имеет место между значениями a для твердых сфер и максвелловских молекул и составляет всего $\sim 7\%$. Это свидетельствует о слабой зависимости величины температурного скачка от закона межмолекулярных сил.

В табл. 2 приведены значения безразмерной величины $q^*=q/q_0$ при промежуточных числах Kn для $\varepsilon=1$.

Сравнение результатов данной работы для модели БГК с численным решением этой же модели [3] свидетельствует о хорошей сходимости полупространственного моментного метода для данной задачи (расхождение не превышает 1% при любых числах Kn). Из табл. 2 видно, что значения q^* , полученные для различных столкно-



Фиг. 1



Фиг. 2

вительных моделей, удовлетворительно согласуются между собой (максимальное расхождение наблюдается при $\text{Kn}=0.1$ и составляет $\sim 10\%$).

Кроме того, результаты данной работы хорошо согласуются с результатами [4], в которой задача о теплопереносе между параллельными плоскостями решена методом Монте-Карло для молекулярной модели максвелловских сфер. Все это позволяет сделать вывод об удовлетворительной аппроксимации полного оператора столкновений статистическими моделями.

На фиг. 1 показана зависимость величины q^* от коэффициента «диффузности» ε для $\text{Kn}=10, 1, 0.5, 0.1$ (кривые 1–4 соответственно).

При $\varepsilon \rightarrow 0$ следует очевидный результат: $q^* \rightarrow 1$, $q_0 \rightarrow 0$. Следовательно, $q \rightarrow 0$, т.е. между зеркально отражающимися плоскостями теплообмена не происходит.

На фиг. 2 приведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными [9] для N_2 (кривая 1, точки 1, $\varepsilon=0.76$) и Ar (кривая 2, точки 2, $\varepsilon=0.826$). При этом теоретическая кривая является результатом усреднения по четырем столкновительным моделям.

Максимальное расхождение между теорией и экспериментом наблюдается при $\text{Kn} > 1$ и составляет $\sim 12\%$ для N_2 и $\sim 8\%$ для Ar . Такое расхождение объясняется, по-видимому, тем, что численные значения коэффициентов диффузности ε , приведенные в [9] и использованные для сравнения в данной работе, были подобраны из условия наилучшего согласия экспериментальных данных с четырехмоментным решением [2]. При более строгом выборе значений ε можно ожидать лучшего согласия теоретических и экспериментальных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gross E. P., Ziering S. Heat flow between parallel plates. Phys. Fluids, 1959, vol. 2, No. 6.
2. Liu C. Y., Lees L. Kinetic theory description of plane compressible Couette flow. In: Rarefied Gas Dynamics. New York — London, Acad. Press., 1961.
3. Bassanini P., Cercignani C., Pagani C. D. Comparison of kinetic theory analyses of linearized heat transfer between parallel plates. Intern. J. Heat Mass Transfer, 1967, vol. 10, No. 4.
4. Горелов С. Л., Коган М. Н. Решение задачи о скачке температуры (течение в слое Кнудсена) и линейной задачи о передаче тепла между двумя параллельными пластинами в разреженном газе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
5. Шахов Е. М. О приближенных кинетических уравнениях в теории разреженных газов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1.
6. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
7. Ziering S. Shear and heat flow for maxwellian molecules. Phys. Fluids, 1960, vol. 3, No. 4.
8. Loyalka S. K., Ferziger H. Model dependence of the temperature slip coefficient. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, No. 8.
9. Teagan W. P., Springer G. S. Heat-transfer and density-distribution measurements between parallel plates in the transition regime. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, No. 8.

УДК 533.7

О МАКРОСКОПИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА С ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

В. А. РЫКОВ, В. Н. СКОБЕЛКИН

(Москва)

В [1] получена система модельных кинетических уравнений, описывающая движения двухатомного газа с вращательными степенями свободы. В настоящей работе на основе асимптотического анализа этих уравнений осуществлен предельный переход к режиму сплошной среды. В рассматриваемом случае кроме числа Кнудсена K существенным параметром является также характерное значение величины Z , обратная величина которой имеет смысл доли неупругих столкновений. Описание движения газа в режиме сплошной среды возможно при произвольной скорости обмена энергией между поступательными и внутренними степенями свободы [2]. В настоящей работе при единственном условии $K \ll 1$ получены двухтемпературные уравнения сплошной среды, справедливые при произвольном Z . Состояние жидкой частицы в общем случае характеризуется вращательной и поступательной температурами. При условиях малости не только величины $K \ll 1$, но и произведения $KZ \ll 1$ система двухтемпературных уравнений сводится к однетемпературным уравнениям Навье — Стокса, содержащим объемный коэффициент вязкости.

1. В основу исследования положена система кинетических уравнений [1]

$$(1.1) \quad \frac{\partial f_0}{\partial t} + \xi_j \frac{\partial f_0}{\partial x_j} = \frac{v}{Z} (f_0^r - f_0) + v \left(1 - \frac{1}{Z} \right) (f_0^t - f_0)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \xi_j \frac{\partial f_1}{\partial x_j} = \frac{v}{Z} (f_1^r - f_1) + v \left(1 - \frac{1}{Z} \right) (f_1^t - f_1)$$

$$f_0^r = f_M(T) [1 - \omega_0 q_i^t a_i(T)], \quad f_0^t = f_M(T_i) [1 - q_i^t a_i(T_i)]$$

$$f_1^r = kT f_M(T) [1 - \omega_0 q_i^t a_i(T) + \omega_1 (1 - \delta) q_i^r m c_i / (p k T)]$$

$$f_1^t = kT_r f_M(T_i) [1 - q_i^t a_i(T_i) + (1 - \delta) q_i^r m c_i / (p_i k T_r)]$$