

3. Теленин Г. Ф. Исследование обтекания колеблющегося конуса сверхзвуковым потоком. М., Оборонгиз, 1959.
4. Липницкий Ю. М. Теоретическое исследование сверхзвукового нестационарного обтекания затупления тел. Докл. АН СССР, 1968, т. 178, № 1.
5. Ferri A. Supersonic flow around circular cones at angles of attack. NASA, 1954, Rept. No. 1045.
6. Стоун А. Движение конуса со сверхзвуковой скоростью под малым углом атаки. В сб. «Газовая динамика». М., Изд.-во иностр. лит., 1950.

УДК 533.6.011.8

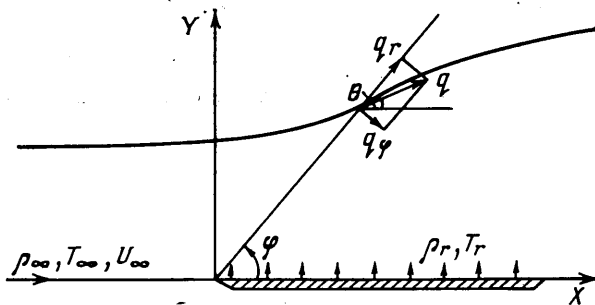
АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЕЙ СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНОГО ТЕЧЕНИЯ В РАЙОНАХ ПЕРЕДНЕЙ И ЗАДНЕЙ КРОМКИ ПЛАСТИНЫ

С. В. МУСАНОВ

(Москва)

В работе проведено аналитическое исследование полей плотности и потока массы в районах передней и задней кромок пластины, установленной параллельно свободномолекулярному потоку, при традиционных постановочных предположениях. Указаны предельные возмущения, возможные в исследуемом течении. Показано, что эффекты, обнаруженные ранее в переходном режиме (развитие пограничного слоя, формирование скачка уплотнения и разреженного следа), имеют свои аналоги и в бесстолкновительном режиме.

Обтекание пластины в потоке, параллельном ее поверхности, является наиболее последовательно исследуемой задачей в теории разреженных газов. В переходном от вязкого к свободномолекулярному режиму для гиперзвуковых скоростей исследуемое течение хорошо освещено в монографии [1]. Последние результаты и библиогра-



Фиг. 1

фия содержатся в работах по численному статистическому моделированию [2, 3] и по численному решению модельного уравнения¹. К сожалению, в этих работах отсутствует анализ полей для свободномолекулярного режима, без которого анализ динамики по степени разрежения не замкнут.

В [4] даны поля плотности для свободномолекулярного обтекания при двух значениях скоростных отношений и двух значений температурных факторов, полученные численно. Однако в этой работе отсутствуют какие-либо аналитические упрощения, связанные с плоскопараллельностью течения, его симметрией, антисимметрией, специальными скоростными режимами и пр.

Рассмотрим плоское свободномолекулярное течение около полубесконечной пластины (фиг. 1). Согласно традиционным предположениям кинетической теории полагаем, что с границ течения приходят молекулы, имеющие максвелловские функции распределения скоростей. Массовая скорость невозмущенного потока параллельна поверхности пластины, массовая скорость в функции распределения отраженного потока равна нулю (диффузное отражение).

¹ Шахов Е. М. Метод исследования течений разреженного газа. Докт. дис. ВЦ, АН СССР, 1973.

Ограничимся исследованием полей плотности ρ и плотности потока массы q . Эти величины, как и другие «полные» моменты, аддитивны, т. е. вычисляются путем алгебраического сложения полей различных свободномолекулярных источников. Поля потока массы (следовательно, и линии тока) при условии непротекания и диффузности отражения не зависят от температуры отраженных молекул T_r . Массовая скорость, определяемая как отношение $u=q/\rho$, уже не обладает свойством аддитивности для входящих и уходящих молекул. Постулирование этого свойства в работе [5] ошибочно.

В качестве масштабов берется плотность невозмущенного потока ρ_∞ и его наиболее вероятная тепловая скорость $\sqrt{2RT_\infty}$. Задание граничных функций распределения порождает газодинамические граничные условия. На дуге $\varphi=\pi$ течение остается невозмущенным. Вне зависимости от видов функции распределения скоростей

$$\rho=1, \quad q_x=S, \quad q_y=0 \quad (S=u_\infty/\sqrt{2RT_\infty})$$

На поверхности пластины ($\varphi=0$) для диффузного отражения газодинамические функции хорошо известны

$$\rho = {}^{1/2}(\rho_r+1), \quad q_x = {}^{1/2}S, \quad q_y = {}^{1/2}\sqrt{\pi}(\rho_r T_r^{1/2}-1)$$

Условие непротекания $q_y=0$ однозначно связывает плотность и температуру отраженных молекул $\rho_r T_r^{1/2}=1$. Таким образом, поле плотности зависит от двух безразмерных параметров (S и ρ_r), а поле плотности потока массы только от одного (S), который идентичен числу Маха: $M=\sqrt{2/\kappa}S$.

Условие теплоизолированности пластины требует конкретизации числа внутренних степеней молекул газа $j=(5-3\kappa)/(\kappa-1)$

$$q^e = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\rho_r T_r^{3/2} \left(1 + \frac{j}{4} \right) - \left(1 - \frac{j}{4} + \frac{S^2}{2} \right) \right] = 0$$

Условие теплоизолированности и непротекания однозначно определяет температуру отраженных молекул

$$T_r = 1 + 2S^2/(4+j)$$

Любое свободномолекулярное течение около изолированной угловой точки обладает свойством лучевой однородности, т. е. газодинамические величины постоянны вдоль лучей, исходящих из нее. Для конкретных, упомянутых ранее, граничных функций распределения на произвольном луче, определяемом координатой φ , газодинамические поля около кромок пластины могут быть описаны при помощи квадратур

$$\rho = \frac{\rho_r}{2} \left(1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) + \frac{1}{2} \int_0^\varphi L_1 d\varphi$$

$$q_x = \frac{S}{2} - \frac{\sin \varphi}{4\sqrt{\pi}} + \int_0^\varphi L_2 \cos \varphi d\varphi$$

$$q_y = \frac{\cos \varphi - 1}{4\sqrt{\pi}} + \int_0^\varphi L_2 \sin \varphi d\varphi$$

где

$$L_k(S, \varphi) = \frac{1}{\pi} I_k(S \cos \varphi) \exp(-S^2 \sin^2 \varphi)$$

$$I_2 = xI_1 + \frac{I_0}{2}, \quad I_1 = xI_0 + \frac{1}{2} \exp(-x^2), \quad I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 + \operatorname{erf}(x))$$

Составляющая потока массы, перпендикулярная пластине q_y , может быть вычислена аналитически в любой точке поля течения, так как

$$\int_0^\varphi L_2 \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{I_0(S)}{\pi} - \cos \varphi L_0 \right)$$

Кроме того, в силу свойств функций L_h, I_h ,

$$\int_0^{\pi/2} L_1 d\varphi = \frac{I_0}{2\sqrt{\pi}}, \quad \int_0^{\pi/2} L_2 \cos \varphi d\varphi = \frac{I_1}{2\sqrt{\pi}}, \quad \int_0^{\pi/2} L_2 \sin \varphi d\varphi = \frac{I_0}{2\pi}$$

вычисляются значения ρ, q_x на луче $\varphi = \pi/2$.

Нетрудно видеть, что функции I_0, I_1 обладают свойствами дополнителности

$$I_0(x) + I_0(-x) = \sqrt{\pi}, \quad I_1(x) - I_1(-x) = \sqrt{\pi}x$$

которые связывают значения искомым функций на лучах $\varphi = 0, \pi/2, \pi$.

Несмотря на то что не удастся избавиться от квадратур без ограничений на S и φ , приведенные выражения доступны дальнейшему аналитическому исследованию в общем виде.

Например, легко видеть, что все искомые функции ведут себя немонотонно и условия для нахождения экстремальных лучей имеют форму

$$L_1 - \frac{\rho r}{2\pi} = 0, \quad \cos \varphi \left(L_2 - \frac{1}{4}\sqrt{\pi} \right) = 0, \quad \sin \varphi \left(L_2 - \frac{1}{4}\sqrt{\pi} \right) = 0$$

Так как функции I_h и L_h монотонны в интервале для $\varphi(0, \pi)$, то для плотности существует только один экстремум при условии

$$I_1(-S) \leq \frac{\rho r}{2} \leq I_1(S)$$

Для функции q_x экстремальным является луч $\varphi = \pi/2$. Для q_y — граничные лучи $\varphi = 0$ и π . Обе эти характеристики (следовательно, и сам поток массы) всегда имеют дополнительный экстремум для любого S , так как $I_2(-S)/\pi \leq 1/4\sqrt{\pi} \leq I_2(S)/\pi$.

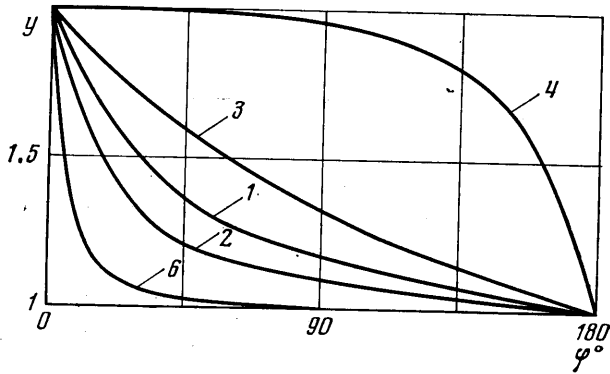
Указанный экстремум для компонент потока массы является экстремумом их отношения $q_y/q_x = \tan \theta$. Угол θ определяет в этом случае максимальное отклонение направления массовой скорости в поле течения от первоначально заданного.

Отметим эффект удвоения поперечной координаты линий тока в поле полубесконечной пластины, расположенной параллельно свободномолекулярному потоку. Для его реализации достаточно лишь симметричности функции распределения отраженных молекул относительно нормали к поверхности. Функция распределения скоростей набегающих частиц может быть произвольной. Так как при симметричном распределении отраженные частицы не дают вклада в поток массы вдоль поверхности, то плотность потока массы газа на самой поверхности составляет половину соответствующей величины невозмущенного течения. Из интегрального закона сохранения следует, что линия тока, имеющая координату y_∞ далеко перед передней кромкой ($\varphi = \pi$), будет иметь координату $2y_\infty$ далеко за ней ($\varphi = 0$). Интегральный закон сохранения потоков массы (и энергии) для данного течения имеет чрезвычайно простой вид: $r q_\varphi = -S$, где $q_\varphi = -q_x \sin \varphi + q_y \cos \varphi$, r — радиус-вектор выбранной линии тока. Несмотря на то что микровозмущения в установившемся свободномолекулярном потоке распространяются неограниченно, вытесняющее влияние полубесконечной пластины конечно, что качественно отличается от традиционного пограничного слоя, для которого вытесняющий эффект нарастает вдоль пластины по параболическому закону. Следствием эффекта удвоения является немонотонное поведение угла отклонения массовой скорости θ . Координаты линий тока и значения углов θ , определяющих направление касательных к ним, представлены на фиг. 2 и 3.

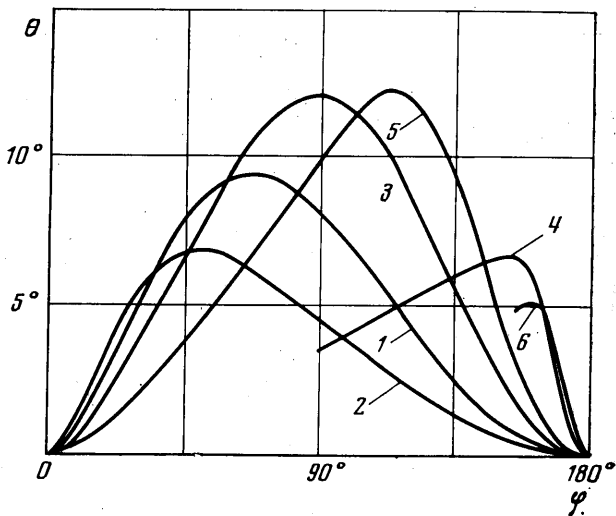
На фигурах кривые 1 и 2 соответствуют числам $M=1, 2$. Кривые 3 соответствуют медленному движению ($M \ll 1$). Кривые 4 соответствуют $M=5$ на задней кромке пластины. Кривые 6 — $M=7$ на фиг. 2 для передней, а на фиг. 3 для задней кромки. Кривая 5 — $M=1$ на задней кромке.

Расчеты для задней кромки проводятся по тем же выписанным выше выражениям путем замены S на $-S$. Характерная особенность данной задачи — инвариантность функций L_h и I_h к преобразованию $S_1 = -S, \varphi_1 = \pi - \varphi$. Это означает, что вышесказанное относительно существования экстремальных лучей не только сохраняет силу, но и параллельность соответствующих лучей, выходящих из передней и задней кромок одновременно. При этом интегральные члены, пересчитанные для передней кромки, могут быть использованы для вычисления полей на задней кромке. Например

$$\rho = \frac{\rho r}{2} \frac{\varphi_1}{\pi} + 1 - \int_0^{\varphi_1} L_1 d\varphi, \quad q_x = -S_1 - \frac{\sin \varphi_1}{4\sqrt{\pi}} + \int_0^{\varphi_1} L_2 \cos \varphi d\varphi$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Отсюда видно, что там, где на передней кромке было максимальное уплотнение, для задней кромки на параллельном луче ($\varphi_1 = \varphi$) будет максимальное разрежение. Если в области передней кромки происходит торможение от $u_\infty = S$ до $u_\infty = S/(1 + \rho_r)$, то сзади наблюдается разгон в тех же пределах.

Исследование течения около пластины конечной длины может быть проведено с помощью выписанных выражений путем алгебраического вычитания полей двух передних (или задних) кромок, сдвинутых на заданную величину L . Таким образом, расчет передней и задней кромок одновременно дает информацию о предельных значениях возмущений, вносимых пластиной любой длины с температурой T_r в поток со скоростным отношением S .

Для конкретных значений S и ограниченных областей течения по φ интегральные члены могут быть вычислены аналитически.

Рассмотрим медленное движение ($S \ll 1$). В этом случае с точностью до S^2 функции I_k линеаризируются

$$I_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} + x, \quad I_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{\pi}, \quad I_2 = \frac{1}{4}\sqrt{\pi} + x$$

а экспонента в функциях L_k отличается от единицы на величины уже порядка x^2 . Газодинамические поля в этом случае описываются функциями

$$\rho = \frac{\rho_r}{2} \left(1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) + \frac{1}{2} + \frac{S \sin \varphi}{\sqrt{\pi}}$$

$$q_x = \frac{S}{2} \left(1 + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{2\pi} \right), \quad q_y = \frac{S \sin \varphi}{2\pi}$$

Линии тока в этом режиме от S не зависят. Максимальный угол отклонения скорости достигается при $\varphi = \pi/2$ и равен $\theta_{\max} = \arctg(2/3\pi)$. Поля потоков массы для передней и задней кромок симметричны. С увеличением же S экстремум θ_{\max} сносится на меньшие φ и сама его величина монотонно уменьшается (фиг. 3). Два сопряженных локальных экстремума для q в районе $\varphi = \pi/2$ вызывают колебание лишь в третьем знаке и воспринимаются как область перегиба.

Дальнейшее аналитическое исследование связано с условием сверхзвукового набегающего потока, которое математически выражается в возможности асимптотически аппроксимировать функции I_h полиномами Эрмита мнимого аргумента H_k при $x \geq 2$. Погрешность замены $I_h = \sqrt{\pi} H_k$ оценивается выражением $\exp(-x^2) k! / (2x)^{k+1}$, которое одновременно является асимптотическим выражением для I_h при $x \approx -2$ в силу свойства дополнителности $I_h(x) + (-1)^k I_h(-x) = \sqrt{\pi} H_k(x)$, где $H_0=1$, $H_1=x$, $H_2=x^2+1/2$, $H_k = xH_{k-1} + 1/2(k-1)H_{k-2}$. Условие гиперзвукового течения математически выражает аппроксимацией $H_k(x) = x^k$, погрешность которой $\sim x^{-2}$.

Например, в области, где $S \cos \varphi \geq 2$, около поверхности передней кромки пластины исследуемые поля описываются выражениями

$$\rho = {}^{1/2}\rho_r(1 - \varphi/\pi) + I_0(S \sin \varphi) / \sqrt{\pi}$$

$$q_x = \frac{SI_0(S \sin \varphi)}{\sqrt{\pi}} + \frac{\sin \varphi}{2\sqrt{\pi}} \left(\exp(-S^2 \sin^2 \varphi) - \frac{1}{2} \right)$$

$$q_y = \frac{1}{4} \sqrt{\pi} - \frac{\cos \varphi}{2\sqrt{\pi}} \left(\exp(-S^2 \sin^2 \varphi) - \frac{1}{4} \right)$$

Используя ранее упомянутые свойства дополнителности и инвариантности функций I_h , L_h , нетрудно выписать аналогичные выражения для задней кромки. Для гиперзвукового течения ($S \gg 1$) приведенные выражения дают непрерывное описание сильноградиентных явлений (фиг. 4) уплотнения и торможения в слое типа ударного ($\varphi \ll 1$). В области задней кромки столь же сильноградиентным является разреженный след ($\varphi_1 \ll 1$). В обоих случаях экстремальные лучи для плотности φ и плотности потока массы φ_* находятся по элементарным формулам

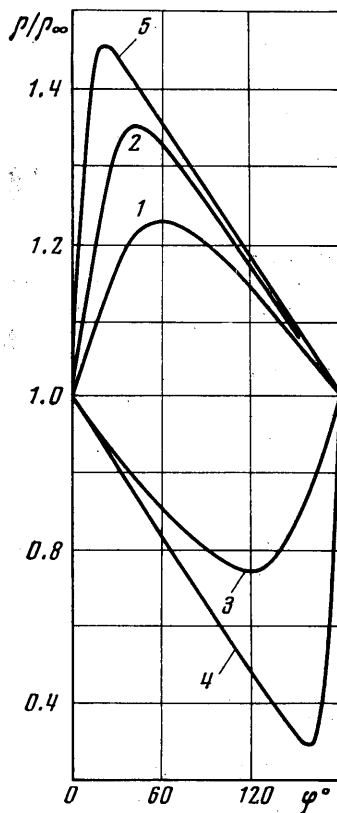
$$\varphi_*^2 = \frac{\ln(2\sqrt{\pi} ST_r)}{S^2} \quad \varphi_{**}^2 = \frac{2 \ln(2S)}{S^2}$$

Подстановка этих величин в соответствующие выражения показывает, что максимальное значение плотности в потоке не может превышать $1 + \rho_r/2$ и не может быть ниже $1/2$.

На фиг. 4 представлены значения плотности при $\rho_r=1$. Кривые 1, 2, 5 соответствуют числам $M=1, 2, 5$ на передней кромке, а кривые 3, 4 — числам $M=1, 5$ на задней. С ростом M все газодинамические немонотонности локализуются в узком сильнонеоднородном слое, примыкающем к пластине и в следе за ней.

Анализ изолиний плотности, приведенных в [4] для свободномолекулярного течения около пластины длины $S=3.54, 14.14$; $T_r=1.5$, показывает, что возмущения в двумерном поле находятся в рамках пределов, определяемых одномерными полями в окрестностях краевых точек. Однако расчет вблизи поверхности проводился в этой работе недостаточно точно, так как отсутствовали изолинии, замыкающиеся на краевые точки.

Сравнение с полями и профилями плотности, полученными методом статистических испытаний и конечно-разностной аппроксимацией модельного кинетического уравнения для конечных чисел Кнудсена Kn , показывает, что столкновения молекул между собой приводят к увеличению плотности, существенно большему, чем найденный свободномолекулярный предел.



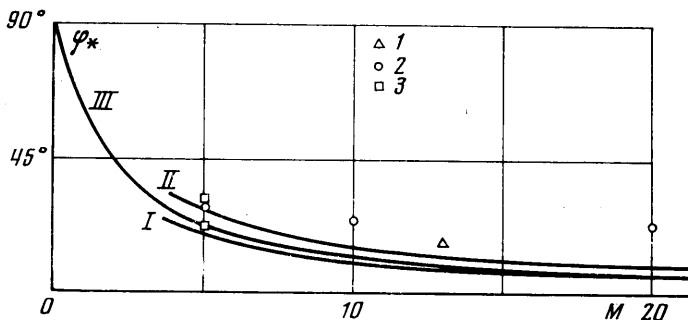
Фиг. 4

Из фигур, приведенных в работах [2, 3], можно найти значение наибольшего уплотнения¹, равное 2,2, достигнутое в работе [3] ($Re=50.7$, $M=20$, $T_r=T_0=1+1/2(\kappa-1)M^2$; $\kappa=5/3$).

Нарушения же установленного свободномолекулярного предела разрежения $\rho=0.5$ в обозреваемых материалах не наблюдалось.

Одним из важных феноменологических результатов работ [2, 3] было обнаружение линий максимальной плотности, очень близких к прямым, которые ассоциируются со следом, оставленным скачком уплотнения.

На фиг. 5 проводится сравнение координат (углов наклона) линий максимальной плотности φ_* , вычисленных по найденной асимптотической формуле ($S \gg 1$)



Фиг. 5

для «холодной» ($T_r=1$, кривая I) и теплоизолированной ($T_r=S^2/2$, кривая II) поверхностей пластины. Кривая III получена численно без ограничений на S для $T_r=1$. Здесь же нанесены углы наклона «сжатых слоев», взятые из работ [2] — точки 1 ($M=12.9$, $T_r=T_0$, $Kn=48$); [3] — 2 ($M=5, 10, 20$, $T_r=T_0$, $Re=50.7$); (сноска на стр. 175) 3 ($M=5.05$, $T_r=1$, $Kn=0.04$ — нижняя точка; $T_r=T_0$, $Kn=0.0625$ — верхняя точка). Видно, что для умеренно гиперзвуковых чисел ($M=5$) формулы свободномолекулярной модели хорошо диагностируют положение линий максимальной плотности в переходном режиме.

В заключение автор благодарит О. Г. Фридендера за консультации и А. И. Ерофеева за предоставленные материалы.

Поступила 10 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
2. Вогениц, Бродуэлл, Бэрд. Моделирование течения в окрестности передней кромки по методу Монте-Карло. Ракетная техника и космонавтика, 1970, т. 8, № 3.
3. Ерофеев А. И., Перепухов В. А. Расчет обтекания пластины, расположенной вдоль потока разреженного газа. Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 3.
4. Orloff C. R. Wall temperature and speed ratio effects on free molecule flat plate flows. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 2.
5. Trepaid P., Brun E. A study of wakes behind cylinders in free-molecule flow. Rarefied. Gas Dynamics, vol. 2. Now York — London, Acad. Press., 1967.

УДК 533.6.011.8

ТЕПЛОПЕРЕНОС В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХ СТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Ю. И. МАКЕЕВ, П. Е. СУЕТИН, В. Г. ЧЕРНЯК

(Свердловск)

Линейной задаче о теплопереносе в разреженном газе между параллельными плоскостями посвящено немало работ, например [1-4]. Простая геометрия и очевидная физическая постановка делают эту задачу удобной для апробирования приближенных методов решения кинетического уравнения Больцмана.

¹ Вопрос о максимальном уплотнении течения при конечных числах Re (или $Kn=M/Re$) весьма важен хотя бы для такой технической задачи, как сепарация газов.