

- Дискретная составляющая в спектре шума сверхзвуковых струй. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
4. Грешиллов Е. М., Евтушенко А. В. О спектре пульсаций давления при отрывном обтекании прямого уступа. Акуст. ж., 1969, т. 15, вып. 2.
5. Fricke F. R. Separated flow noise. Proc. 7-th Intern. Congr. Acoust. Budapest, 1971, vol. 4.

УДК 533.6.011.5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНТРОПИИ И ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ НА ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА, КОЛЕБЛЮЩЕГОСЯ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Ю. М. ЛИПНИЦКИЙ

(Москва)

При теоретическом исследовании нестационарного обтекания тел различной формы широкое распространение получила линейная теория тел конечной толщины [1-4]. В ее основе лежат предположения о малости возмущений угла атаки и скорости перемещения точек поверхности тела по сравнению со скоростью набегающего потока. Это позволяет задачу о распространении нестационарных возмущений решать с помощью линеаризации по амплитуде колебаний α_0 . При этом основное поле, соответствующее стационарному обтеканию тела под некоторым средним углом атаки β_0 , определяется решением нелинейной системы дифференциальных уравнений газовой динамики.

Пусть для тела, совершающего плоские угловые колебания с частотой ω относительно некоторого центра по закону $\alpha = \beta_0 + \alpha_0 \cos \omega t$, выполняются условия $\alpha_0 \ll 1$, $\alpha_0 \omega L / V_\infty \ll 1$, где V_∞ — скорость набегающего потока, L — характерный линейный размер.

Указанные неравенства позволяют представить газодинамические функции в виде

$$(1) \quad f(\mathbf{r}, t) = f_0(\mathbf{r}) + \alpha(t) f_1(\mathbf{r}) + \dot{\alpha}(t) f_2(\mathbf{r}), \quad f = V, p, \rho$$

Параметры с индексом 0 описывают основное поле, возникающее при стационарном обтекании тела, параметры с индексами 1 и 2 описывают поля нестационарных возмущений, находящихся в фазе с углом атаки и угловой скоростью соответственно.

Подставляя разложение (1) в систему уравнений газовой динамики, записанную для абсолютного движения в подвижной жестко связанной с телом системе координат, получим систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных для определения стационарного поля течения, а также две линейные системы, описывающие распространение возмущений в фазе с α и $\dot{\alpha}$.

Для стационарного обтекания тела

$$(2) \quad \text{grad} \frac{v_0}{2} - v_0 \times \text{rot} v_0 = - \frac{1}{\rho_0} \text{grad} p_0$$

$$\text{div}(\rho_0 v_0) = 0, \quad v_0 \text{ grad} s_0 = 0, \quad s_0 = p_0 / \rho_0^\gamma, \quad \gamma = c_p / c_v$$

Для возмущений в фазе с α при $\bar{\omega} = \omega L / V_\infty \ll 1$ ($\bar{\omega}^2 = 0$)

$$\text{grad}(v_0 v_1) - v_0 \times \text{rot} v_1 - v_1 \times \text{rot} v_0 = \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \text{grad} p_0 - \frac{1}{\rho_0} \text{grad} p_1$$

$$(3) \quad \text{div}(\rho_0 v_1 + \rho_1 v_0) = 0$$

$$v_0 \text{ grad} s_1 + v_1 \text{ grad} s_0 = 0, \quad s_1 = s_0 \left(\frac{p_1}{p_0} - \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0} \right)$$

Для возмущений в фазе с $\dot{\alpha}$

$$v_1 + \text{grad}[v_0(v_2 - v_{e2})] - v_0 \times \text{rot} v_2 - (v_2 - v_{e2}) \times \text{rot} v_0 = \frac{\rho_2}{\rho_0^2} \text{grad} p_0 - \frac{1}{\rho_0} \text{grad} p_2$$

$$(4) \quad \rho_1 + \text{div}(\rho_2 v_0 + \rho_0 v_2) - v_{e2} \text{ grad} \rho_0 = 0$$

$$s_1 + v_0 \text{ grad} s_2 + (v_2 - v_{e2}) \text{ grad} s_0 = 0, \quad s_2 = s_0 \left(\frac{p_2}{p_0} - \gamma \frac{\rho_2}{\rho_0} \right)$$

Здесь v_e — вектор переносной скорости, $v_{e2} = v_e / \dot{\alpha}$. В качестве граничных условий для систем (2)–(4) на поверхности ударной волны используются законы сохранения

потоков массы, энергии и импульса, записанные соответственно для функции с индексами 0, 1 и 2. На теле ставится условие непротекания $v_0 \cdot n = v_1 \cdot n = (v_2 - v_{e2}) \cdot n$, где n — нормаль к поверхности тела.

Рассмотрим уравнения для возмущений энтропийной функции в фазе с углом атаки α и угловой скоростью $\dot{\alpha}$ (последние уравнения в системах (3) и (4)). Поскольку на поверхности тела $n \parallel \text{grad } s_0$, то в силу условия непротекания получим $v_1 \text{ grad } s_0 = (v_2 - v_{e2}) \text{ grad } s_0 = 0$. Отсюда следует $v_0 \text{ grad } s_1 = 0$, $v_0 \text{ grad } s_2 = -c_1$, т. е. вдоль поверхности тела $s_1 = c_1$. Для тел, обладающих симметрией, при $\beta_0 = 0$ (а для тел со сферическим затушением в широком диапазоне углов β_0) константа c_1 равна нулю. Для симметричных затушенных тел, совершающих плоские угловые колебания относительно некоторого центра, расположенного на оси симметрии, при $\beta_0 = 0$ справедливо соотношение $p_2/p_0 = \gamma \rho_2/\rho_0$. Для тел со сферическим затушением при $\beta_0 \neq 0$ или в случае смещения центра колебания с оси тела при $\beta_0 = 0$ возмущение s_2 вдоль поверхности тела постоянно, но не равно нулю ($s_2 = c_2$). В общем случае для затушенных тел величина s_2 на поверхности тела изменяется вдоль линий тока

$$s_2 = -c_1 \int_0^L \frac{dl}{|v_0|} + c_2$$

где c_2 — возмущение энтропийной функции в фазе с $\dot{\alpha}$ в критической точке.

Для получения аналогов существующего в стационарном случае интеграла Бернулли рассмотрим уравнение движения газа в подвижной системе координат, умножив его скалярно на $(v - v_e)$

$$(5) \quad (v - v_e) \frac{\partial v}{\partial t} + (v - v_e) \text{ grad} \left(\frac{v^2}{2} - v v_e \right) = - \frac{v - v_e}{\rho} \text{ grad } p$$

Кроме того, для адиабатического процесса имеет место равенство

$$(6) \quad \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{\partial h}{\partial t} + (v - v_e) \text{ grad } h = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{v - v_e}{\rho} \text{ grad } p$$

Подставив (1) и (6) в (5) и собрав члены при функциях с индексами 0, 1, и 2, получим для стационарного решения, для возмущений в фазе с α и для возмущений в фазе с $\dot{\alpha}$ соответственно

$$(7) \quad v_0 \text{ grad} \left(h_0 + \frac{v_0^2}{2} \right) = 0, \quad h_0 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0}$$

$$(8) \quad v_0 \text{ grad} (h_1 + v_0 v_1) + v_1 \text{ grad} \left(h_0 + \frac{v_0^2}{2} \right) = 0, \quad h_1 = h_0 (p_1/p_0 - \rho_1/\rho_0)$$

$$(9) \quad v_0 v_1 + h_1 - p_1/\rho_0 + v_0 \text{ grad} [h_2 + v_0 (v_2 - v_{e2})] + (v_2 - v_{e2}) \text{ grad} \left(h_0 + \frac{v_0^2}{2} \right) = 0, \\ h_2 = h_0 (p_2/p_0 - \rho_2/\rho_0)$$

Из соотношения (8) следует, что для однородного набегающего потока ($h_0 + v_0^2/2 = \text{const}$) вариация интеграла Бернулли по углу α во всем поле равна нулю $h_1 + v_0 v_1 = 0$. Для нестационарных возмущений по $\dot{\alpha}$ в этом случае вдоль линий тока основного потока имеет место следующее соотношение

$$h_2 + v_0 (v_2 - v_{e2}) = \int_0^L \frac{p_1}{\rho_0 |v_0|} dl + c_3$$

Рассмотрим применение полученных результатов для острого кругового конуса, у которого при $\beta_0 \neq 0$ точка растекания лежит в наветренной плоскости, что упрощает дальнейшее изложение. На поверхности тела между точками растекания и стекания (точка Ферри [5]) линий тока энтропийная функция основного потока $s_0 = p_0/\rho_0^\gamma$ постоянна и определяется по параметрам газа за ударной волной в наветренной плоскости симметрии ($\psi = 0$). Аналогично обстоит дело с возмущениями энтропийной функции в фазе с α , причем $c_1 \neq 0$, так как при $\psi = 0$ на ударной волне происходит

конечное изменение энтропии при изменении угла атаки. Здесь уместно подчеркнуть отличие в поведении функции s_1 при линеаризации относительно нулевого угла атаки (решение Стоуна [6]) и относительно $\beta_0 \neq 0$. В первом случае s_1 на поверхности тела изменяется по косинусу меридионального угла ψ , а во втором — постоянна вплоть до точки стекания.

Нестационарные возмущения газодинамических функций в фазе с $\dot{\alpha}$ при колебаниях относительно носка тела линейно зависят от радиуса сферической системы координат с полюсом в носке $f_2(r, \theta, \psi) = rf_2^{(1)}(\theta, \psi)$, а зависимость $s_2^{(1)}(\psi)$ на поверхности тела ($\theta = \theta_k$) определяется дифференциальным уравнением

$$(10) \quad c_1 + u_0 s_2^{(1)} + \frac{w_0}{\sin \theta_k} \frac{\partial s_2^{(1)}}{\partial \psi} = 0$$

При $\theta = \theta_k$, $\psi = 0$ величину $s_2^{(1)}$ можно найти из решения третьего уравнения системы (4) в плоскости $\psi = 0$

$$(11) \quad c_1 + u_0 s_2^{(1)} + v_0 \frac{\partial s_2^{(1)}}{\partial \theta} = 0$$

Уравнение (11) на теле при $\theta = \theta_k$ имеет особенность, поскольку $v_0(\theta_k) = 0$ в силу условия непротекания. Однако эта особенность устранима. В окрестности $\theta = \theta_k$ выражение для $s_2^{(1)}$ в плоскости $\psi = 0$ имеет вид

$$(12) \quad s_2^{(1)}(\theta, \psi = 0) = -\frac{c_1}{u_0(\theta_k)} + \text{const}(\theta - \theta_k)^{a/2}$$

где $a = -\frac{\partial v_0}{\partial \theta}$ при $\psi = 0$, $\theta = \theta_k$; $a > 0$. В точке $\psi = 0$, $\theta = \theta_k$; $s_2^{(1)} = -c_1/u_0(\theta_k)$, а зависи-

мость $s_2^{(1)}$ от ψ определяется уравнением (10), имеющим особенность при $\psi = 0$ ($w_0(\psi = 0) = 0$). Эта особенность также устранима. В окрестности $\psi = 0$ выражение для $s_2^{(1)}$ с точностью до членов ψ^2 имеет вид

$$(13) \quad s_2^{(1)} = -\frac{c_1}{u_{01}} \left(1 - \frac{u_{02} \sin \theta_k}{2w_{01} + u_{01} \sin \theta_k} \psi^2 \right)$$

где u_{01} , u_{02} , w_{01} — коэффициенты разложения функций $u_0(\psi)$ и $w_0(\psi)$ в ряд по ψ

$$u_0(\psi) = u_{01} + u_{02}\psi^2 + \dots, \quad w_0 = w_{01}\psi + \dots$$

Проводя аналогичные рассуждения для уравнения (9), получим значения $H_2^{(1)} = h_2^{(1)} + v_0(v_2^{(1)} - v_{e2}^{(1)})$ на поверхности тела при $\psi = 0$ и зависимость $H_2^{(1)}$ от ψ при $\theta = \theta_k$. При этом для вычисления $H_2^{(1)}(\theta = \theta_k, \psi)$ достаточно повторить выкладки (10)–(13) с заменой c_1 на $-p_1/\rho_0$ и $s_2^{(1)}$ на $H_2^{(1)}$. Окончательно получим

$$H_2^{(1)}(\theta = \theta_k, \psi = 0) = \frac{p_1}{\rho_0 u_0} \Big|_{\substack{\theta = \theta_k \\ \psi = 0}} = \frac{p_{11}}{\rho_{01} u_{01}}$$

$$H_2^{(1)}(\theta = \theta_k, \psi) = \frac{p_{11}}{\rho_{01} u_{01}} \left(1 - \frac{u_{02} \sin \theta_k}{2w_{01} + u_{01} \sin \theta_k} \psi^2 \right)$$

Таким образом, на поверхности конуса возмущения энтропийной функции $s_2^{(1)}$ и полной энергии $H_2^{(1)}$ не являются постоянными и определяются непосредственно через функции с индексами 0 и 1 вне зависимости от их значений на ударной волне.

Поступила 18 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Carrier G. F. The oscillating wedge in a supersonic stream. J. Aeronaut. Sci., 1949, vol. 16, No. 3.
2. Van Dyke M. D. On supersonic flow past an oscillating wedge. Quart. Appl. Math., 1953, vol. 11, No. 3.

3. Теленин Г. Ф. Исследование обтекания колеблющегося конуса сверхзвуковым потоком. М., Оборонгиз, 1959.
4. Липницкий Ю. М. Теоретическое исследование сверхзвукового нестационарного обтекания затупления тел. Докл. АН СССР, 1968, т. 178, № 1.
5. Ferri A. Supersonic flow around circular cones at angles of attack. NASA, 1954, Rept. No. 1045.
6. Стоун А. Движение конуса со сверхзвуковой скоростью под малым углом атаки. В сб. «Газовая динамика». М., Изд.-во иностр. лит., 1950.

УДК 533.6.011.8

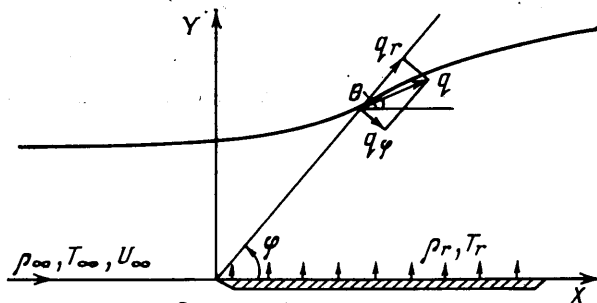
АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЕЙ СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНОГО ТЕЧЕНИЯ В РАЙОНАХ ПЕРЕДНЕЙ И ЗАДНЕЙ КРОМКИ ПЛАСТИНЫ

С. В. МУСАНОВ

(Москва)

В работе проведено аналитическое исследование полей плотности и потока массы в районах передней и задней кромок пластины, установленной параллельно свободномолекулярному потоку, при традиционных постановочных предположениях. Указаны предельные возмущения, возможные в исследуемом течении. Показано, что эффекты, обнаруженные ранее в переходном режиме (развитие пограничного слоя, формирование скачка уплотнения и разреженного следа), имеют свои аналоги и в бесстолкновительном режиме.

Обтекание пластины в потоке, параллельном ее поверхности, является наиболее последовательно исследуемой задачей в теории разреженных газов. В переходном от вязкого к свободномолекулярному режиму для гиперзвуковых скоростей исследуемое течение хорошо освещено в монографии [1]. Последние результаты и библиогра-



Фиг. 1

фия содержатся в работах по численному статистическому моделированию [2, 3] и по численному решению модельного уравнения¹. К сожалению, в этих работах отсутствует анализ полей для свободномолекулярного режима, без которого анализ динамики по степени разрежения не замкнут.

В [4] даны поля плотности для свободномолекулярного обтекания при двух значениях скоростных отношений и двух значений температурных факторов, полученные численно. Однако в этой работе отсутствуют какие-либо аналитические упрощения, связанные с плоскопараллельностью течения, его симметрией, антисимметрией, специальными скоростными режимами и пр.

Рассмотрим плоское свободномолекулярное течение около полубесконечной пластины (фиг. 1). Согласно традиционным предположениям кинетической теории полагаем, что с границ течения приходят молекулы, имеющие максвелловские функции распределения скоростей. Массовая скорость невозмущенного потока параллельна поверхности пластины, массовая скорость в функции распределения отраженного потока равна нулю (диффузное отражение).

¹ Шахов Е. М. Метод исследования течений разреженного газа. Докт. дис. ВЦ, АН СССР, 1973.