

равнивается, при этом степень турбулентности в среднем достигает довольно больших значений (40–60%), что объясняется существенным вкладом в эти пульсации крупномасштабных вихрей, зарождающихся в районе возвратных течений. Эти вихри являются довольно устойчивыми и их полное разрушение не заканчивается в диффузоре.

Представленные на фиг. 2 графики изменения поперечной скорости в нескольких сечениях диффузора указывают на существенную перестройку потока в нем после возникновения отрыва, на существование интенсивных поперечных перетеканий, которые вызывают также деформацию поля скоростей в направлении, нормальном к плоскости раскрытия диффузора. Это указывает на то, что после отрыва нарушается плоский характер течения и оно становится трехмерным с ярко выраженной асимметрией. Об этом свидетельствуют данные анализа уравнения неразрывности и профили скорости в направлении оси  $z$ , которые имеют асимметричный вид. Эта асимметрия также, по-видимому, является следствием влияния крупномасштабных вихрей, величина которых соизмерима с геометрическими размерами диффузорного канала.

Определенный интерес представляет распределение в диффузорном канале поперечных пульсаций скорости  $\sqrt{\langle v'^2 \rangle}$ , которые на фиг. 3 представлены в виде безразмерных величин, отнесенных к локальным значениям продольных пульсаций —  $\sqrt{\langle u'^2 \rangle}$ . Соотношение между этими величинами  $\lambda$  дает представление о степени изотропности турбулентных пульсаций в диффузоре и показывает, что структура этих пульсаций резко отлична от структуры турбулентного движения в плоских каналах постоянного сечения [4]. В каналах постоянного сечения, а также в пограничном слое на плоской пластине величина  $\lambda$  обычно всегда меньше единицы и колеблется в пределах  $0.5 \div 0.75$ , в диффузорных каналах, особенно в начальных сечениях диффузора,  $\lambda$  может быть существенно больше единицы, это указывает на возможность существования особого механизма порождения и диссипации турбулентных пульсаций в диффузорах, при котором влияние поперечных составляющих скорости и их пульсаций соизмеримо с влиянием продольных скоростей и их пульсаций. Все основные особенности этого механизма тесно увязаны с наличием крупномасштабных пульсаций скорости и их влиянием на распределение осредненных скоростей в диффузоре, что согласуется с современными представлениями [5] о роли этих пульсаций в процессе переноса энергии от осредненного движения к мелкомасштабному изотропному движению при течении в каналах.

Представленные здесь данные показывают, что структура турбулентного движения при наличии отрыва является достаточно сложной и не может быть объяснена с позиций теории пограничного слоя или теории локально-изотропной турбулентности.

Поступила 19 IV 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Идельчик И. Е.* Аэродинамика потока и потери напора в диффузорах, В сб. «Промышленная аэродинамика». Сб. № 3, М., 1947.
2. *Повз И. Л.* Аэродинамический эксперимент в машиностроении. Л., «Машиностроение», 1974.
3. *Refslund K.* Seeding of Air with Glycerol Droplets for LDA Measurements. Techn. Univ. Denmark. A.F.M. 76–01, 1976, p. 3.
4. *Конт-Белло Ж.* Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М., «Мир», 1967.
5. *Laufer J.* New trends in experimental turbulence research. Ann. Rev. Fluid Mech., 1975, vol. 7.

УДК 533.6.011.533.697

#### ОБ ИСТЕЧЕНИИ ГАЗА ИЗ ЕМКОСТИ В ВАКУУМ

В. В. МИХАЙЛОВ, Л. Я. ХАСКИН

(Москва)

Рассматривается нестационарная задача об истечении идеального термодинамически совершенного газа из некоторой емкости в пространство с достаточно малым давлением.

Показано, что при достаточно большом времени истечения движение газа автомодельно, причем скорость газа (рассматриваемая как вектор), отнесенная к скорости звука, не зависит от времени. Получены решения для случая одномерных нестационарных течений в каналах.

К настоящему времени найдены и хорошо изучены автомодельные движения газа, характерными особенностями которых являются или постоянство массы движущегося газа (разлет в вакуум), или бесконечная величина этой массы (фокусирование и разлет от точки), или стремление этой массы к бесконечности с течением времени (сильный взрыв, движение поршня) [1, 2].

Рассмотрим задачу истечения газа из сосуда конечного объема в пустоту. Геометрию сосуда, размеры которого определяются характерной длиной  $L$ , будем считать фиксированной. Предполагая газ термодинамически совершенным (показатель адиабаты  $\kappa = \text{const}$ ), невязким и нетеплопроводным, применим теорию размерности для выявления особенностей течения при времени  $t \rightarrow \infty$  в области (внутри и вне сосуда) с характерным размером  $L$ .

Асимптотика течения при  $t \rightarrow \infty$  должна зависеть лишь от таких размерных определяющих постоянных, которые не меняются со временем, поскольку начальный момент для отсчета  $t$  можно переносить на любой конечный отрезок времени  $\Delta t$ .

Таким образом, единственными размерными определяющими постоянными могут быть лишь характерный линейный размер  $L$  и некоторое характерное значение энтропии газа. Следовательно, при  $t \rightarrow \infty$  течение должно быть автомодельным, поскольку из определяющих размерных констант нельзя составить комбинации с размерностью времени [2].

Пусть  $V$  — вектор скорости;  $\rho$ ,  $p$ ,  $t$ ,  $a$  — соответственно плотность, давление, время и скорость звука;  $\kappa$  — показатель адиабаты;  $\sigma = (p/\rho^\kappa)^{1/\kappa}$  — энтропийная функция;  $L$ ,  $\sigma_0$  — характерные значения линейных размеров и энтропийной функции. Будем считать, что линейные размеры отнесены к  $L$ ;  $M = V/a$  — число  $M$ , рассматриваемое как вектор;  $s = \sigma/\sigma_0$ ;  $A = at/L$ .

В принятых обозначениях уравнения Эйлера для указанной выше автомодельной задачи можно записать в виде

$$(1) \quad (M \cdot \nabla) M A + \alpha \operatorname{grad} A = M + \alpha A \operatorname{grad} s / (\kappa s) \\ \operatorname{div} (M A) + \alpha [(M \cdot \operatorname{grad} A) - 1] = 0, \quad (M \cdot \operatorname{grad} s) = 0, \quad \alpha = 2/(\kappa - 1)$$

Если значение  $\sigma_0$  известно, величины  $p$  и  $\rho$  могут быть определены из соотношений

$$p = (\kappa^{-1/2} L A t^{-1})^{\kappa \alpha} (\sigma_0 s)^{-\alpha}, \quad \rho = [p (\sigma_0 s)^{-2}]^{1/\kappa}$$

Краевыми условиями для системы (1) являются условия непротекания через стенки емкости и условие  $A=0$  на границах свободной струи ( $MA$  конечно).

Применим систему (1) для расчета одномерных и квазиодномерных изэнтропических течений газа в каналах, имеющих конечный объем. При этом для справедливости квазиодномерной постановки считаем каналы достаточно узкими и гладкими. При рассмотрении строго одномерных течений предполагаем, что канал цилиндрический или имеет форму, обеспечивающую цилиндрическую или сферическую симметрию течения. В дальнейшем для краткости соответствующие каналы будем называть цилиндрическими, двугранными и коническими.

Обозначим через  $F$  площадь поперечного сечения канала (для двугранного и конического каналов под  $F$  будем понимать площадь цилиндрического или сферического сечения). Тогда после замены во втором уравнении системы (1) дивергенции  $MA$  на  $F^{-1} d(MAF)/dx$ , приняв  $S = \text{const}$ , получим

$$(2) \quad \frac{d}{dx} (MA) + \alpha M \frac{dA}{dx} - \alpha + MA \Phi = 0 \\ \frac{d}{dx} (MA) + \frac{\alpha}{M} \frac{dA}{dx} = 1, \quad \Phi(x) = \frac{d \ln F}{dx}$$

Выбрав в качестве независимой переменной число  $M$ , приведем систему (2) к виду

$$(3) \quad \frac{dA}{dM} = \frac{MA(\alpha - 1 - MA\Phi)}{\alpha B}, \quad \frac{dx}{dM} = \frac{A(M^2 - 1)}{B} \\ B = \frac{M^2}{\alpha} - \alpha + \left( \frac{M^2}{\alpha} + 1 \right) MA\Phi$$

Как следует из системы уравнений (1), интересным свойством изучаемых автомодельных движений газа является постоянство по времени составляющих безразмерной скорости (числа  $M$ ). Благодаря этому в случае одномерных течений система уравнений (3) позволяет определить необходимое условие перехода от дозвукового к сверхзвуковому режиму течения (аналогичное условию в сопле Лавала).

Рассмотрим систему уравнений (3) в точке  $x=x_*$ , где  $M=1$ . Чтобы при переходе к  $M>1$  производная  $dx/dM$  не меняла знака (что равносильно переходу к сверхзвуковому режиму), необходимо обращение в нуль знаменателей правых частей системы (3) при  $x=x_*$ ,  $M=1$ .

Последнее требование приводит к соотношению

$$(4) \quad \Phi(x_*)A(x_*)=\alpha-1$$

Соотношение (4) является необходимым условием для получения внутри канала сверхзвукового течения. При  $3>\kappa>1$  из (4) следует, что канал в сечении  $x=x_*$  должен быть расширяющимся ( $\Phi(x_*)>0$ ).

Рассмотрим теперь решение системы уравнений (3) в некоторой малой области  $\Delta x \sim \delta \ll 1$ . В этой области канал может иметь, в частности, относительно резкое изменение площади поперечного сечения (не выводящее задачу за рамки применимости квазиодномерного приближения). Тогда с относительной погрешностью порядка  $\delta$  решение в области  $\Delta x$  может быть найдено с помощью следующих уравнений, к которым преобразуется система (3) при  $\xi=\Delta x/\delta \sim 1$ :

$$(5) \quad \frac{dA}{dM} = -\frac{MA}{M^2+\alpha}, \quad \frac{d \ln F}{dM} = \frac{\alpha(M^2-1)}{M(M^2+\alpha)}$$

Интегрирование уравнений (5) приводит к соотношениям, совпадающим с соответствующими интегралами стационарного движения: уравнением Бернулли – Сен-Венана и условием сохранения расхода

$$(6) \quad \frac{A}{A_1} = \frac{a}{a_1} = \left( \frac{1+M_1^2/\alpha}{1+M^2/\alpha} \right)^{1/2}, \quad \frac{F}{F_1} = \frac{q(M_1)}{q(M)} = \frac{M_1}{M} \left( \frac{1+M^2/\alpha}{1+M_1^2/\alpha} \right)^{1/2\alpha+1}$$

При этом условие (4) принимает вид  $dF/d\xi=0$ . Таким образом, в рассматриваемых областях с относительной погрешностью порядка  $\delta$  течение можно считать квазистационарным. Можно показать также, что аналогичный вывод справедлив и в общем трехмерном случае (уравнения (1)).

Остановимся на случае истечения из цилиндрического канала ( $\Phi(x)\equiv 0$ ). Тогда первое уравнение системы (3) имеет интеграл

$$(7) \quad A=C(1-M^2/\alpha^2)^{1/2(\alpha-1)}$$

Отсчитывая  $x$  от закрытого конца канала, где  $M=0$ , из второго уравнения получим

$$(8) \quad \frac{x}{C} = M \left( 1 - \frac{M^2}{\alpha^2} \right)^{1/2(\alpha-1)} - \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^M \left( 1 - \frac{M^2}{\alpha^2} \right)^{1/2(\alpha-3)} dM$$

Согласно сказанному выше при  $3>\kappa>1$  и  $\Phi(x)\equiv 0$  соотношение (8) имеет физический смысл лишь для  $0 \leq M \leq 1$ .

Поскольку в число размерных параметров, определяющих решение задачи, не входит давление среды, в которую происходит истечение, это давление не должно сказываться на течении внутри канала. Поэтому необходимо принять, что на открытом конце канала число  $M=1$ , а истечение, строго говоря, должно происходить в вакуум. Отсюда же следует, что при конечном давлении в окружающей среде начная с некоторого времени автомодельность течения должна нарушиться.

Покажем, что  $M=1$  соответствует максимально возможному расходу газа, вытекающему из цилиндрического канала.

Используя полученное решение, имеем  $\rho u K(t) = G(M) = \text{const } M(1-M^2/\alpha^2)^{1/2(\alpha-1)}$ .

Функция  $G(M)$  монотонно растет при увеличении  $M$ , достигая максимума при  $M=1$ .

Входящий в соотношение (8) интеграл берется в элементарных функциях при значениях  $\alpha=n$ ,  $\kappa=(n+2)/n$ , где  $n$  – целое число. Указанные значения  $\kappa$  охватывают практически реализуемые случаи  $\kappa=5/3, 7/5, 9/7$ .

Выпишем некоторые решения, проведя нормировку  $x$  и  $A$  таким образом, чтобы при  $M=1$ ,  $x=1$

$$(9) \quad \begin{aligned} \kappa=3, \quad A=1, \quad x=M \\ \kappa=2, \quad A = \frac{12}{6\sqrt{3}-2\pi} \sqrt{1-\frac{M^2}{4}}, \quad x = \frac{12}{6\sqrt{3}-2\pi} \left( M \sqrt{1-\frac{M^2}{4}} - \arcsin \frac{M}{2} \right) \\ \kappa = \frac{5}{3}, \quad A = \frac{9}{2} \left( 1 - \frac{M^2}{9} \right), \quad x = \frac{3}{2} M \left( 1 - \frac{M^2}{9} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa = \frac{7}{5}, \quad A = 5 \frac{375}{248} \left(1 - \frac{M^2}{25}\right)^2, \quad x = \frac{375}{248} M \left(1 - \frac{26}{75} M^2 + \frac{1}{125} M^4\right) \\ \kappa = \frac{9}{7}, \quad A = 7 \frac{35(49)^2}{55568} \left(1 - \frac{M^2}{49}\right)^3 \\ x = \frac{35(49)^2}{55568} M \left(1 - \frac{17}{49} M^2 + \frac{99}{5(49)^2} M^4 - \frac{7}{(49)^3} M^6\right) \\ \kappa \rightarrow 1, \quad A \rightarrow \frac{3}{2} \alpha, \quad x \rightarrow \frac{3}{2} M \left(1 - \frac{M^2}{3}\right) \end{aligned}$$

Отметим, что для всех практически важных значений  $\kappa$  ( $\kappa \leq 5/3$ ) функцию  $x(M)$  с погрешностью, не превышающей 2%, можно считать универсальной, не зависящей от величины  $\kappa$ .

Благодаря этому приближенное решение для течения в цилиндрической трубе с указанной степенью точности может быть записано в виде

$$A \approx \frac{3}{2} \alpha \left(1 - \frac{M^2}{\alpha^2}\right)^{1/2(\alpha-1)}, \quad x \approx \frac{3}{2} M \left(1 - \frac{M^2}{3}\right)$$

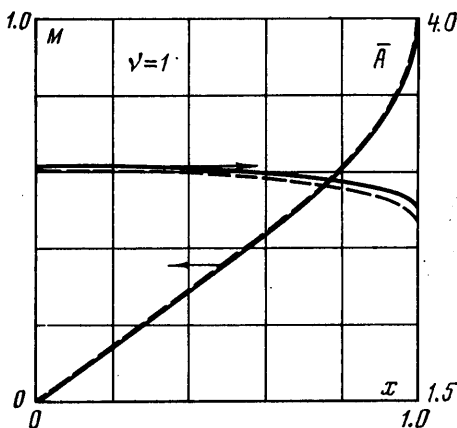
В отличие от движения в цилиндрическом канале два других точных одномерных течения, соответствующие двугранному и коническому каналам, зависят дополнительно от расстояния между закрытым концом канала и центром симметрии  $x_0$  и от направления движения газа (от центра или к центру симметрии).

Функция  $\Phi(x)$  для указанных точных решений может быть записана в виде  $\Phi(x) = (\nu-1)/x$ , где  $\nu=1, 2, 3$  соответственно в случае цилиндрического, двугранного и конического каналов.

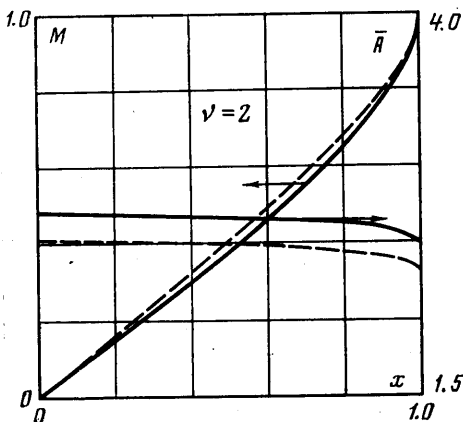
Результаты расчета по формулам (9) ( $\nu=1$ ) и результаты, полученные численным интегрированием системы (3) (для случаев  $\nu=2, 3$ ;  $x_0=0$ ), показаны на фиг. 1-3. Пунктирные кривые соответствуют  $\kappa=5/3$ , сплошные —  $\kappa=7/5$ . Параметр  $\bar{A}$  связан с  $A$  соотношением  $\bar{A}=A(\kappa-1)\nu$ .

Для выхода из особой точки  $x=0, M=0$  при интегрировании использовались следующие двучленные разложения:

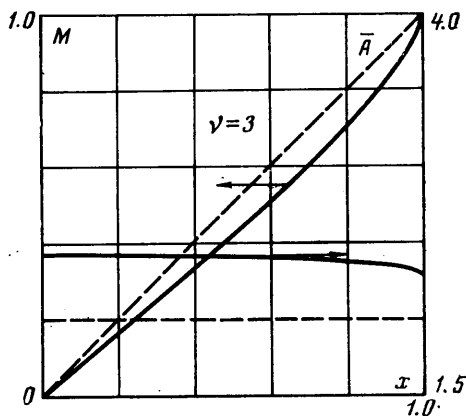
$$\begin{aligned} A &= A_0 [1 + (2\alpha)^{-1} (\nu\alpha^{-1} - 1) M^2 + \dots] \\ x &= A_0 \nu M \{ \alpha^{-1} + (2\alpha)^{-1} (\nu+2)^{-1} (\nu\alpha^{-1} - 1) \times \\ &\quad \times [ (2-\nu)\alpha^{-1} + 2 ] M^2 + \dots \} \end{aligned}$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Уравнения (2), (3) позволяют решить и обратную задачу – построение канала, обеспечивающего заданное распределение безразмерной скорости звука  $A$  или числа  $M$ .

В частности, для течений с  $A=A_0=\text{const}$  будем иметь

$$(10) \quad A=A_0=1, \quad x=M, \quad F=\text{const } x^{\alpha-1} \quad (\nu=\alpha)$$

Интересно отметить, что при  $\alpha=5/3$  линейное распределение чисел  $M$  достигается в коническом канале ( $\nu=3$  – точное одномерное решение).

В качестве примера практического приложения полученных результатов рассмотрим задачу о падении давления с течением времени перед соплом трубы кратковременного действия. Пусть труба представляет собой цилиндрическую емкость, на одном из концов которой имеется резкое сужение – сопло. Предположим также, что выброс газа осуществляется в емкость с достаточно малым давлением. Обозначим через  $l$  длину цилиндрической части канала трубы, а через  $F_1$  и  $F_2$  – соответственно площадь поперечного сечения канала и площадь критического сечения сопла.

Найдем число  $M_1$  в цилиндрической части перед соплом трубы, используя соотношения (6) или соответствующие таблицы стационарных одномерных течений

$$q(M_1)F_1=q(1)F_2$$

Выделим некоторый момент времени, в который  $t=t_k$ ,  $p_1=p_k$ ,  $a_1=a_k$ . Тогда, вводя  $\Delta t=t-t_k$  и вычисля значения  $A_1$  и  $x_1=l/L$ , из соотношений (9) (по известному значению  $M_1$ ) будем иметь

$$(11) \quad t_k=lA_1(x_1a_k)^{-1}, \quad p_1/p_k=(t_k/t)^{\alpha\alpha}=[1-a_kx_1\Delta t(A_1l)^{-1}]^{-\alpha\alpha}$$

В предельном случае, когда площадь критического сечения сопла достаточно мала ( $F_2/F_1 \rightarrow 0$ ), соотношение (11) должно переходить в формулу для квазистационарного процесса падения давления в емкости. При  $F_2/F_1 \rightarrow 0$  из уравнений (3), (6) следует:

$$F_2/F_1 \approx M_1(1+\alpha^{-1})^{1/2\alpha+1}, \quad x_1/A_1 \approx M_1\alpha^{-1}$$

Окончательно из (11) получаем известную формулу для квазистационарного падения давления

$$(12) \quad p_1/p_k=[1+\alpha^{-1}(1+\alpha^{-1})^{-1/2\alpha-1}F_2a_k\Delta t(F_1l)^{-1}]^{-\alpha\alpha}$$

Здесь  $F_1l$  – объем канала.

Отметим, что соотношение (11), переходя при  $F_2/F_1 \rightarrow 0$  в формулу (12), является более общим, в том смысле, что оно не связано с условием квазистационарности процесса.

Поступила 27 XII 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., Гостехиздат, 1955.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1957.

УДК 533.6.011.5

### О ВЛИЯНИИ УСТУПА НА ПУЛЬСАЦИИ ДАВЛЕНИЯ НА ЦИЛИНДРЕ С КОНУСОМ ПРИ ЧИСЛАХ $M \leq 1.0$

В. М. КУПЦОВ, С. И. ОСТРОУХОВА

(Москва)

Известно, что при обтекании цилиндра с конической носовой частью при больших дозвуковых числах  $M$  на цилиндрической поверхности возникают местные зоны отрыва, внутри которых наблюдается повышенный уровень пульсаций давления [1, 2]. Во многих случаях по технологическим или конструктивным причинам в плоскости сопряжения конуса с цилиндром предусматриваются небольшие уступы.

В настоящей работе было проведено исследование влияния таких уступов на пульсации давления на начальном участке цилиндра при числах  $M=0.5 \div 0.9$ . Получены данные по суммарным и спектральным характеристикам пульсаций давления при различных относительных высотах уступа  $h_1/d=0.006 \div 0.024$ . Установлено, что за счет уступа суммарные уровни пульсаций давления могут возрасти в 2–3 раза. Наличие уступа приводит к существенному росту высокочастотных составляющих спектра.