

## РАСЧЕТ ФОРМЫ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОТОКЕ

О. В. ВОИНОВ

(Москва)

Решается задача стационарного движения газового пузыря в идеальной жидкости с учетом капиллярных сил. Приближенно определяется коэффициент сопротивления пузыря, движущегося в жидкости малой вязкости.

К настоящему времени задача безотрывного потенциального обтекания пузыря исследована только на плоской модели [1-3]. Для пространственного случая имеются лишь результаты, полученные путем различных аппроксимаций формы пузыря эллипсоидом [9-15], при этом степень пригодности их неизвестна.

Отметим, что существует промежуточная область значений размеров пузыря, в которой форма пузыря в основном определяется балансом капиллярных сил и давления в жидкости. В этой области сила тяжести и вязкие силы играют второстепенную роль в определении формы свободной границы.

Известно, что если число Шмидта  $\mu^4 g / \rho \sigma^3 \ll 1$ , то в промежуточной области размеров пузыря (обозначения общепринятые)

$$(9\nu^2/g)^{1/2} < R < (\sigma/\rho g)^{1/2}$$

для расчетов формы пузыря применимо приближение идеальной жидкости.

**1. Постановка задачи и метод решения.** Газовый пузырь движется с постоянной скоростью  $u$  в идеальной жидкости, покоящейся на бесконечности. Предполагается, что вихри отсутствуют. Потенциал  $\Phi$  удовлетворяет уравнению Лапласа и условиям на поверхности пузыря  $S$  и в бесконечности

$$(1.1) \quad \Delta \Phi = 0$$

$$(1.2) \quad \partial \Phi / \partial n|_S = \mathbf{u} \mathbf{n}; \quad \Phi \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности  $S$ ,  $r$  — расстояние от  $S$ .

Пусть  $\mathbf{v}$  — скорость жидкости в системе, движущейся с пузырем, тогда динамическое граничное условие на поверхности пузыря с учетом капиллярных сил записывается в виде

$$(1.3) \quad p_g - H\sigma = p_\infty - 1/2 \rho v^2 + 1/2 \rho u^2$$

Здесь  $p_g$  — давление газа в пузыре,  $p_\infty$  — давление в жидкости на бесконечности,  $H$  — средняя кривизна поверхности,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\rho$  — плотность жидкости.

Пусть при виртуальном перемещении  $\delta n$  точки поверхности пузыря  $S$  вдоль внешней нормали  $\mathbf{n}$  объем  $V$  внутри  $S$  остается постоянным

$$(1.4) \quad \delta V = \int_S \delta n \, dS = 0$$

Вариация коэффициента присоединенной массы  $M = m/\rho V$  ( $m$  — присоединенная масса) может быть записана при помощи известной формулы [16] для вариации кинетической энергии жидкости

$$(1.5) \quad \delta(VM) = \int_S \left( \frac{v^2}{u^2} - 1 \right) \delta n \, dS$$

Введем функционал, зависящий при заданном значении параметра  $\beta$  только от формы поверхности  $S$ ,

$$(1.6) \quad L = SV^{-2/3} + \beta M^{-1}$$

Коэффициент присоединенной массы  $M$  в (1.6), как известно, вычисляется по значениям потенциала  $\Phi$  на поверхности

$$(1.7) \quad M = - \frac{1}{V} \int_S \frac{\Phi}{u} n_x \, dS$$

Здесь  $n_x$  — проекция нормали на направление движения пузыря.

Минимум функционала (1.6) соответствует решению задачи (1.1)–(1.3). Действительно, вариация  $L$  с учетом (1.4) равна

$$(1.8) \quad \delta L = \int_S \left( \frac{H - \bar{H}}{V^{2/3}} - \beta \frac{v_1^2 - \bar{v}_1^2}{M^2 V} \right) \delta n \, dS$$

Здесь  $v_1 = v/u$  – скорость жидкости в случае, когда скорость набегающего потока равна единице. Величины  $\bar{H}$  и  $\bar{v}_1^2$  – средние значения по поверхности пузыря

$$(1.9) \quad \bar{H} = \frac{1}{S} \int_S H \, dS, \quad \bar{v}_1^2 = \frac{1}{S} \int_S v_1^2 \, dS$$

Экстремуму  $L$ , как видно из (1.8), соответствует следующее уравнение на  $S$ :

$$(1.10) \quad V^{1/3} H - \beta M^{-2} v_1^2 = \text{const}$$

Если принять следующую связь числа Вебера  $W$  с параметром  $\beta$

$$(1.11) \quad W = 2\rho l u^2 / \sigma = (48/\pi)^{1/3} \beta / M^2$$

то граничное условие (1.10) совпадает с (1.3) ( $l$  – радиус сферы объема  $V$ ).

При деформациях поверхности  $S$ , связанных с ее уплощением, когда максимальное расстояние  $b$  точек  $S$  от оси симметрии неограниченно возрастает, величина  $L \rightarrow \infty$ . Аналогично  $L \rightarrow \infty$ , если поверхность  $S$  вытягивается вдоль оси симметрии, т. е.  $b \rightarrow 0$ . Это указывает на существование  $\min L$ , определяемого (1.6).

Близкий по виду к (1.6) функционал, однако не безразмерный, использовался в [7] для исследования устойчивости движения пузыря в плоском случае.

Аналитическое решение задачи обтекания поверхности вращения имеется только для случая эллипсоида. На семействе сплюснутых эллипсоидов вращения  $\min L$  определяется по формулам (1.5) и (1.11). Этому соответствует

$$(1.12) \quad W = 6 (ds/d\chi) (dM/d\chi)^{-1}, \\ s = S / (2\pi l^2)$$

Здесь  $\chi$  – отношение большой и малой полуосей пузыря.

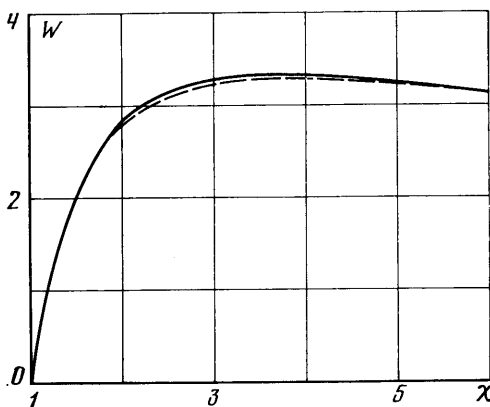
Зависимость  $W(\chi)$ , заданная (1.12), совпадает с аналогичной зависимостью, найденной в [14] другим способом. Эта зависимость заметно отличается от зависимости  $W(\chi)$ , полученной в [9–12], где граничное условие (1.3) удовлетворялось только в двух точках на контуре пузыря.

Более точно неизвестная форма поверхности пузыря  $S$  определялась численным методом. Контур границы задавался при помощи большого числа опорных точек (от 17 до 33 в зависимости от значения  $\beta$ ) путем кубической интерполяции. Задача определения границы решалась при помощи последовательных приближений. Для различных значений  $\beta$  за нулевое приближение  $S_0$  выбиралась поверхность эллипсоида в соответствии с (1.11) и (1.12). При  $\beta=0$  эллипсоид превращается в сферу, при  $\beta \rightarrow \infty$  степень деформации  $\chi \rightarrow \infty$ . Для фиксированной поверхности  $S_i$  ( $i=0, 1, 2, \dots$ ) для решения задачи (1.1), (1.2) применялся метод [17], в котором значения потенциала  $\Phi$  на поверхности  $S$  определяются из интегрального уравнения, справедливого в точках образующей поверхности  $S$ .

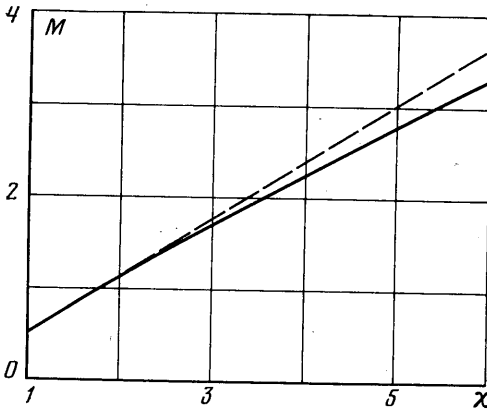
Коэффициент присоединенной массы  $M$  рассчитывался по формуле (1.7). Новая форма поверхности  $S_{i+1}$  определялась в соответствии с градиентным методом минимизации функционала  $L$  при помощи такого перемещения опорных точек поверхности  $S_i$ , нормальная компонента которого равна

$$(1.13) \quad \delta_i n = -h [V^{-2/3} (H - \bar{H}) - \beta M^{-2} V^{-1} (v_1^2 - \bar{v}_1^2)], \quad h > 0$$

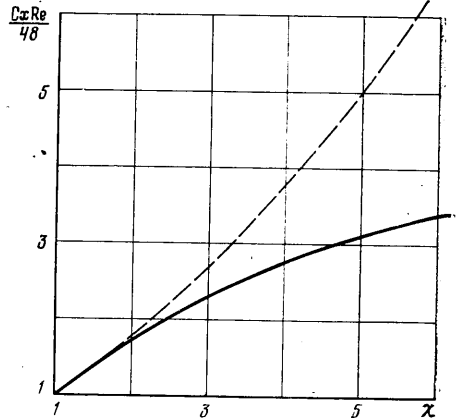
Величина  $h$  задавалась из условия достаточной малости изменения контура на каждом  $i$ -м шаге. Касательное перемещение или принималось равным нулю, или определялось условием сохранения начального распределения опорных точек вдоль



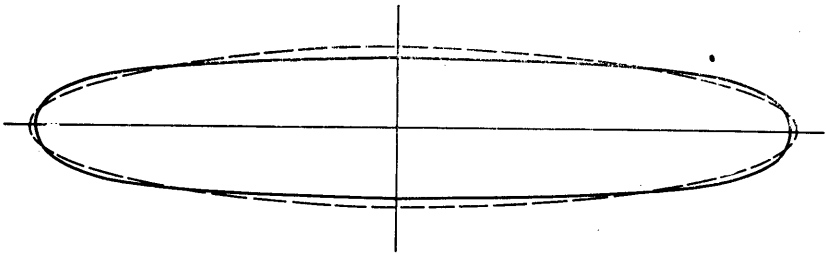
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 3

всей длины контура, аналогично [17]. Итерации прекращались, когда невязка в граничном условии (1.10), соответствующем (1.3), становилась порядка погрешности вычислений.

Расчетные зависимости числа Вебера  $W$  и коэффициента присоединенной массы  $M$  представлены на фиг. 1, 2.

Всюду на фигурах пунктиром показаны результаты, соответствующие модели эллипсоида по (1.11) и (1.12). Контур пузыря для частного значения  $\beta=13.75$ ,  $\chi \approx 5.7$  изображен на фиг. 3, соответствующий эллипсоид имеет отношение полуосей  $\chi=5$ . Как видно из фиг. 3, модель эллипсоида дает гораздо более сильное заострение с краев, нежели точное численное решение. Кроме того, в центральной области действительная поверхность пузыря более уплощена.

**2. Коэффициент сопротивления.** При больших числах Рейнольдса, как убедительно показывают работы [12, 18], поле скоростей вокруг сферического пузыря мало отличается от потенциального поля скоростей идеальной жидкости, причем коэффициент сопротивления близко соответствует скорости вязкой диссипации энергии на потенциальном поле скоростей [19]. Как известно, для твердого тела последнее неверно. В случае пузыря это справедливо благодаря тому, что на поверхности вместо условия равенства нулю касательной скорости ставится более слабое условие обращения в нуль касательного напряжения.

Диссипативная функция  $E$  при условии потенциальности поля скоростей равна

$$(2.1) \quad E = \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) d\Omega = 2\mu \int_S Q v^2 dS$$

Здесь  $\mu$  — динамическая вязкость;  $Q$  — кривизна контура поверхности  $S$ ;  $\Omega$  — пространство, занятое жидкостью; по повторяющимся индексам  $i, j=1, 2, 3$  проводится суммирование. Из (2.1) и определения коэффициента сопротивления можно найти:

$$(2.2) \quad c_x = \frac{48}{\text{Re}} \frac{1}{\chi^{2/3}} \frac{1}{6\pi l} \int_S Q v_1^2 dS, \quad \text{Re} = \frac{2lu}{\nu}$$

Здесь  $v_1$  — скорость жидкости на поверхности пузыря, обтекаемого потоком, скорость которого в бесконечности равна единице.

Зависимость  $c_{\text{Re}}$  от степени деформации пузыря  $\chi$ , полученная в результате численных расчетов, представлена на фиг. 4.

Следует подчеркнуть, что приведенные выше результаты справедливы только при безотрывном обтекании. В вязкой жидкости при больших  $\chi$  обтекание пузыря является отрывным и рассмотренная модель непригодна.

Автор благодарит В. В. Струминского за обсуждение результатов работы.

Поступила 27 IX 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.
2. Слезкин Н. А. Обтекание плоским потоком идеальной жидкости газонаполненной оболочки. Докл. АН СССР, 1935, т. 3, № 3.
3. Слезкин Н. А. Обтекание наполненной газом оболочки плоским потоком идеальной жидкости. Уч. зап. МГУ, Механика, 1951, т. 3, вып. 152.
4. Киселев О. М. К задаче о газовом пузыре в плоском потоке идеальной жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
5. Петрова С. И. Форма равновесия полости, ограниченной упругой пленкой, в одностороннем потоке жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1.
6. Петров А. Г. Динамика плоской полости в жидкости малой вязкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 5.
7. Лихоманов Н. И., Петров А. Г. Обтекание плоскопараллельным потоком газовой полости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 5.
8. McLeod E. B. The explicit solution of a free boundary problem involving surface tension. J. Ration. Mech. and Analys., 1955, vol. 4, No. 4.
9. Hartunian R. A., Sears W. R. On the instability of small gas bubbles moving uniformly in various liquids. J. Fluid Mech., 1957, vol. 3, pt 1.
10. Киселев О. М. Определение формы газового пузыря в осесимметричном потоке жидкости. ПМТФ, 1963, № 3.
11. Клячко Л. А. К теории дробления капли потоком газа. Инж. ж., 1963, т. 3, № 3.
12. Moore D. W. The velocity of rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, No. 4.
13. Гордин К. А., Истратов А. Г., Либрович В. Б. К кинетике деформации и дробления жидкой капли в газовом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 1.
14. Воинов О. В., Головин А. М., Петров А. Г. Движение эллипсоидального пузыря в жидкости малой вязкости. ПМТФ, 1970, № 3.
15. El Sawi M. Distorted gas bubbles at large Reynolds number. J. Fluid Mech., 1974, vol. 62, No. 1.
16. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М., «Мир», 1964.
17. Воинов О. В., Воинов В. В. Численный метод расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями. Докл. АН СССР, 1975, т. 221, № 3.
18. Brabston D. C., Keller H. B. Viscous flows past spherical gas bubbles. J. Fluid Mech., 1975, vol. 69, pt 1.
19. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.

УДК 532.529 : 772.99

#### ИЗМЕРЕНИЕ РАЗМЕРОВ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ НА СРЕЗЕ СОПЛА С ДВУХФАЗНЫМ РАБОЧИМ ТЕЛОМ ГОЛОГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

О. Н. ЕРТАНОВА, И. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ

(Москва)

Изучены возможности голографического исследования размеров жидкой пленки на срезе осесимметричного сопла с двухфазным рабочим телом. Приводятся схема и результаты измерения по голограммам размеров пленки, волн на ее поверхности и капель, образующихся при дроблении пленки, и в ядре двухфазного водовоздушного потока на выходе из сопла.