

## ВЛИЯНИЕ ДАЛЬНОДЕЙСТВИЯ НА ВОЗБУЖДЕНИЕ ЗВУКА В ПРОВОДЯЩЕМ ГАЗЕ

И. М. РУТКЕВИЧ

(Москва)

Описание неустановившихся магнитогазодинамических процессов в плазме с конечной электропроводностью основывается на системе уравнений, включающей в себя уравнение индукции для магнитного поля. Эта система имеет параболические характеристики  $t = \text{const}$ , обусловленные (в пренебрежении вязкостью и теплопроводностью газа) ненулевой магнитной вязкостью [1]. При изучении нестационарных движений газа при малых магнитных числах Рейнольдса часто используется приближение потенциального электрического поля [2-7]. В этом приближении уравнение индукции не содержит производной по времени и эллиплично по координатам. Аналогичным свойством обладает уравнение для электрического потенциала, применяемое обычно для замыкания газодинамических уравнений и порождающее в нестационарном случае характеристики  $t = \text{const}$ . В рамках указанной модели возможно мгновенное распространение возмущений (дальнодействие).

Благодаря дальнодействию на динамику возбуждения звука влияют границы и внешние электрические цепи, свойства которых определяют величину индуцированного электрического поля. Учет дальнодействия представляется существенным в связи с исследованиями акустических колебаний [7, 8] и неустойчивостей в низкотемпературной плазме [2-4], а также условий образования нестационарных ударных волн в присутствии магнитного поля [9-12].

В данной статье исследуется влияние дальнодействия на поведение одномерных звуковых волн, возбуждаемых в плазме, ограниченной изоляционными стенками  $y = \pm h$ ,  $z = \pm b$  в постоянном внешнем магнитном поле  $Be_z$ . В исходном состоянии газ покоится и электрический ток отсутствует. Возмущенный продольный ток  $j_x'$  замыкается через внешнюю омическую нагрузку. Возникающее электрическое поле выражается через усредненную по  $y$  скорость газа, что приводит к нелокальной форме уравнений акустики.

Показано, что зависящее от  $y$  и  $t$  возмущение плотности среды определяется решением начально-краевой задачи для телеграфного уравнения при специальных граничных условиях интегрального типа. Задача сведена к интегральному уравнению, на основе которого рассмотрен случай начальных условий, локализованных в произвольно узком слое  $|y/h| < \lambda < 1$ . Исследован характер генерации газодинамических возмущений вне классической области влияния носителя начальных данных.

Рассмотрен спектр собственных колебаний ограниченной плазмы с учетом внешнего сопротивления. Исследование спектра сводится к несамосопряженной задаче на собственные значения. Изучаются качественные свойства звуковых мод, обусловленные нелокальным характером объемных электромагнитных сил.

1. Обсудим механизм дальнодействия и его модельное описание. При локальном иницировании газодинамического возмущения в проводящей среде может возникнуть локальное возмущение электрического поля, вызванное, например, эффектом электромагнитной индукции. Возмущение поля, распространяясь по среде со скоростью света, через время  $t_1 \sim \epsilon_0/\sigma$  приобретает квазистационарный характер, а через время  $t_2 \sim \mu_0 \sigma l^2 \gg t_1$  становится практически потенциальным ( $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  — электрическая и магнитная постоянные,  $\sigma$  — электропроводность,  $l$  — характерный размер системы). Характерное газодинамическое время  $t_3 \sim l/a$ , где  $a$  — скорость звука, удовлетворяет условию  $t_3 \gg t_2$ , если

$$(1.1) \quad \text{Re}_m^{(a)} = \mu_0 \sigma a l \ll 1$$

Параметр  $Re_m^{(a)}$  — магнитное число Рейнольдса, определенное по скорости звука. В дальнейшем (1.1) предполагается выполненным. Тогда можно считать, что потенциальное электрическое поле мгновенно возникает во всем объеме, занятом проводящим газом. В результате при локальном возбуждении звука появится глобальное возмущение плотности тока и, следовательно, глобальные возмущения электромагнитной силы и джоулевой диссипации. Поэтому перед звуковым фронтом могут возникнуть возмущения скорости и термодинамических параметров плазмы.

Нестационарные уравнения магнитной газодинамики, описывающие движения равновесной низкотемпературной плазмы при малых магнитных числах Рейнольдса и выполнении (1.1) в общепринятых обозначениях имеют вид

$$(1.2) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}, \quad \mathbf{j} + \mathbf{j} \times \beta = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

Величины  $p$ ,  $T$ ,  $\sigma$  и  $\beta$  считаются известными функциями термодинамических параметров  $\rho$  и  $S$ . Предполагается, что пространственный масштаб неоднородностей достаточно велик, чтобы можно было пренебречь вязкостью, теплопроводностью и излучением. Распределение магнитной индукции  $\mathbf{B}$  в (1.2) считается известным.

Малые возмущения, наложенные на стационарное течение, можно охарактеризовать газодинамическим вектором состояния  $\mathbf{f}' = (\rho', \mathbf{V}', S')$  и возмущением электрического потенциала  $\varphi'$ . Общая структура линеаризованных уравнений (1.2) имеет следующий вид:

$$(1.3) \quad \frac{\partial \mathbf{f}'}{\partial t} + A_i \frac{\partial \mathbf{f}'}{\partial x_i} + M \mathbf{f}' + \mathbf{g}_i \frac{\partial \varphi'}{\partial x_i} = 0$$

$$P_{ij} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x_i \partial x_j} + q_i \frac{\partial \varphi'}{\partial x_i} + r_{ij} \frac{\partial f'_i}{\partial x_j} + s_i f'_i = 0$$

Здесь  $A_i$  и  $M$  — матрицы; по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Коэффициенты системы уравнений (1.3) зависят от параметров невозмущенного состояния. При выполнении условия  $(\partial p / \partial \rho)_s > 0$ , необходимого для устойчивости локального термодинамического равновесия реального газа [13], все собственные значения матрицы  $A_i n_i$  (характеристические скорости в направлении единичного вектора  $\mathbf{n}$ ) вещественны и конечны. Последнее уравнение в (1.3) не содержит производной по времени и эллиплично по переменным  $x_i$ . Поэтому для нестационарных задач его характеристики суть плоскости  $t = \text{const}$ .

Если не все векторы  $\mathbf{g}_i$  равны нулю, то область влияния произвольной точки пространства  $(\mathbf{x}, t)$  на вектор  $\mathbf{f}'$  простирается во внешнюю часть газодинамического характеристического конуса с вершиной в этой точке. Отметим, что при локальном иницировании газодинамического возмущения вектор  $\mathbf{E}' = -\nabla \varphi'$  мгновенно может оказаться глобально распределенным даже при  $r_{ij} = 0$ ,  $s_i = 0$  за счет условий, налагаемых внешней электрической цепью.

2. Для одномерных волн, зависящих от направления  $\mathbf{n}$ , из условия потенциальности возмущения поля  $\mathbf{E}'$  следует, что его составляющая  $E'_\perp$ ,

перпендикулярная вектору  $\mathbf{n}$ , пространственно-однородна и зависит только от времени. При исследовании неустойчивостей и колебаний в низкотемпературной плазме [2-4, 7] обычно принималось, что  $E_{\perp}'=0$ . При  $E_{\perp}' \neq 0$  может проявляться эффект дальнего действия. Так как зависимость  $E_{\perp}'(t)$  определяется граничными и внешними условиями, ниже изучаются возмущения в ограниченной системе.

Пусть в канале прямоугольного сечения с изоляционными стенками  $y=\pm h$ ,  $z=\pm b$  находится покоящийся проводящий газ в однородном внешнем магнитном поле  $\mathbf{V}=\mathbf{V}e_z$ . Длина канала в направлении  $x$  равна  $2L$ , и к его концевым сечениям подключено фиксированное внешнее сопротивление  $R$ .

Рассмотрим одномерные возмущения исходного состояния, зависящие от переменных  $y$  и  $t$ . (При  $L \gg \max(h, b)$  такие возмущения можно рассматривать во всем объеме, за исключением относительно коротких концевых зон.) Из одномерности задачи и условий на непроводящих стенках  $y=\pm h$  следует, что  $j_y' \equiv 0$ . Линеаризованные уравнения неразрывности и движения в проекции на ось  $y$  имеют вид

$$(2.1) \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial V_y'}{\partial y} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial V_y'}{\partial t} + a_0^2 \frac{\partial \rho'}{\partial y} + \sigma_0 B (B V_y' + E_x') = 0$$

Здесь нулевой индекс приписан невозмущенным параметрам. Во втором уравнении (2.1) использовано условие адиабатичности возмущений, так как из третьего уравнения (1.2) и условия  $j_0=0$  следует, что возмущение энтропии  $S'$  имеет второй порядок малости. Компоненту поля  $E_x'(t)$  можно выразить через распределение скорости, используя закон Ома для внешней цепи

$$(2.2) \quad E_x' = -\frac{KB}{2h} \int_{-h}^h V_y'(y, t) dy, \quad K = \frac{R}{R+R_i}, \quad R_i = \frac{L}{2\sigma h b}$$

Здесь величина  $K \in [0, 1]$  — коэффициент нагрузки,  $R_i$  — полное сопротивление плазмы по продольному току.

Выбирая в качестве единиц длины, времени, скорости и плотности величины  $h$ ,  $h/a_0$ ,  $a_0$  и  $\rho_0$  соответственно, после подстановки  $E_x'$  из (2.2) в (2.1) приходим к замкнутой системе интегриродифференциального типа

$$(2.3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial y} + N(V - K \langle V \rangle) = 0$$

$$\langle V \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 V(y, t) dy, \quad N = \frac{\sigma_0 B^2 h}{\rho_0 a_0}$$

Здесь и ниже через  $t$ ,  $y$  и  $\rho$ ,  $V$  обозначены безразмерные независимые переменные и возмущения соответственно; угловые скобки — символ осреднения по координате  $y$ . Величина  $N$  — параметр МГД взаимодействия, определенный по размеру  $h$  и скорости звука  $a_0$ .

Для системы (2.3) задаются начальные условия и граничные условия непротекания на стенках

$$(2.4) \quad \rho(y, 0) = \rho_*(y), \quad V(y, 0) = V_*(y), \quad V(1, t) = V(-1, t) = 0$$

Из (2.3), (2.4) следует, что функция  $V$  является решением начально-краевой задачи

$$(2.5) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + N \frac{\partial}{\partial t} \right) V = NK \left\langle \frac{\partial V}{\partial t} \right\rangle$$

$$(V)_{t=0} = V_*(y), \quad (\partial V / \partial t)_{t=0} = -d\rho_*/dy - N(V_* - K \langle V_* \rangle)$$

$$V(1, t) = V(-1, t) = 0$$

Как и в обычной акустике, смешанная задача для нелокального уравнения (2.5) будет корректно поставленной. Доказательство этого утверждения можно провести методом «интеграла энергии», аналогичным применяемому в теории дифференциальных уравнений гиперболического типа [14].

Пусть  $f = (\rho, V)$  — решение задачи (2.3), (2.4). Представим функции  $\rho$  и  $V$  в виде суммы симметричной ( $s$ ) и антисимметричной ( $a$ ) по  $y$  частей. В силу линейности задачи векторы  $f_1(\rho_s, V_a)$  и  $f_2(\rho_a, V_s)$  будут ее решениями, удовлетворяющими начальным условиям

$$(f_1)_{t=0} = (\rho_{*s}, V_{*a}), \quad (f_2)_{t=0} = (\rho_{*a}, V_{*s})$$

Для антисимметричных возмущений скорости  $\langle V \rangle = 0$ , и эффекты дальнего действия не проявляются. Поэтому в дальнейшем рассматриваются только решения типа  $f_2$  и индексы  $a, s$  для краткости опускаются.

Сформулируем начально-краевую задачу для антисимметричного возмущения плотности. Из (2.3) следует однородное телеграфное уравнение относительно  $\rho$

$$(2.6) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + N \frac{\partial}{\partial t} \right) \rho = 0$$

Для этого уравнения задаются нечетные по  $y$  начальные распределения

$$(2.7) \quad (\rho)_{t=0} = \rho_*(y), \quad (\partial \rho / \partial t)_{t=0} = \rho_{**}(y) = -dV_*/dy$$

Хотя уравнение (2.6) проще, чем первое уравнение (2.5), граничные условия для него будут более сложными. Так как при  $y = \pm 1$  должно быть  $V = \partial V / \partial t = 0$ , из второго уравнения (2.3) следует, что

$$(2.8) \quad (\partial \rho / \partial y)_{y=\pm 1} = NK \langle V \rangle$$

Осредняя второе уравнение (2.3) по  $y$  и учитывая, что  $\langle \partial \rho / \partial y \rangle = -\rho(1, t)$ , приходим к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения относительно  $\langle V \rangle$

$$\frac{d \langle V \rangle}{dt} + N(1-K) \langle V \rangle = -\rho(1, t) = \rho(-1, t), \quad \langle V \rangle_{t=0} = \langle V_* \rangle$$

Подставляя решение этой задачи, выраженное через  $\rho(1, t)$ , в правую часть (2.8), найдем искомые граничные условия

$$(2.9) \quad \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_{y=\pm 1} \pm NK \int_0^t e^{N(1-K)(\tau-t)} \rho(\pm 1, \tau) d\tau = NK C e^{-N(1-K)t}$$

$$C = \langle V_* \rangle = \int_0^1 y \rho_{**}(y) dy$$

Граничные условия (2.9) для гиперболического уравнения (2.6) являются неклассическими, так как содержат функционал  $C$  от начального распределения  $\partial\rho/\partial t$ . Если  $C \neq 0$ , то в канале мгновенно (при  $t=+0$ ) возникает электрическое поле  $E_x'$ .

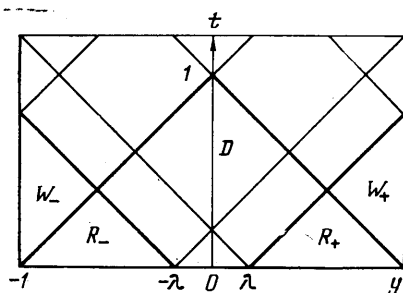
3. Величина  $C$  не зависит от распределения  $\rho$  при  $t=0$ . Поэтому эффекты дальнего действия можно описать решениями, отвечающими начальным условиям (2.7) при  $\rho_*=0, \rho_{**} \neq 0$ . Решение телеграфного уравнения при таких начальных условиях можно искать в виде интегрального представления [14]

$$(3.1) \quad \rho = \frac{1}{2} e^{-Nt/2} \int_{-t}^t I_0 \left( \frac{N}{2} \sqrt{t^2 - \xi^2} \right) F(y + \xi) d\xi$$

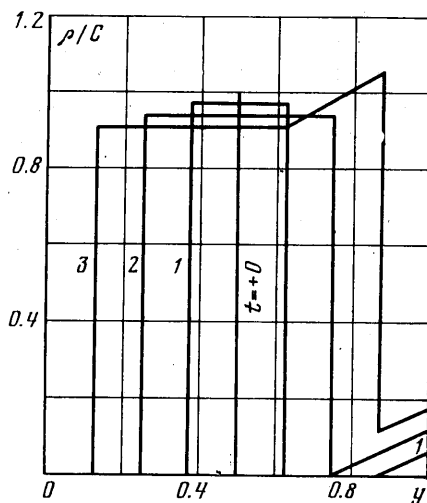
Здесь  $I_0$  — модифицированная функция Бесселя,  $F(\eta)$  — нечетная функция, которая должна быть найдена в процессе решения. Значения  $F$  при  $|\eta| < 1$  определяются начальными данными

$$(3.2) \quad \begin{aligned} F(\eta) &= \rho_{**}(\eta) \\ (|\eta| < 1) \end{aligned}$$

На плоскости  $(y, t)$  началь-



Фиг. 1



Фиг. 2

ные условия полностью определяют решение в характеристическом треугольнике  $D = \{|y| < 1, 0 < t < 1 - |y|\}$  (фиг. 1). Вне области  $D$  решение определяется значениями  $F$  при  $|\eta| > 1$ , для нахождения которых используем граничные условия. После подстановки (3.1) в (2.9) приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$(3.3) \quad F(\eta) = N \int_{2m-1}^{\eta} G(\eta, \xi) F(\xi) d\xi + H(\eta), \quad \eta \in \Delta_m = (2m-1, 2m+1)$$

$$G(\eta, \xi) = \frac{N}{4\theta} I_1(\theta) (1-\xi) - K \int_{|\xi-1|+1}^{\eta} e^{N(1/2-K)(\eta'-\eta)} I_0(\theta') d\eta'$$

$$H(\eta) = -F(\eta-2) + N \int_{2-\eta}^{2m-1} G(\eta, \xi) F(\xi) d\xi + 2NK C e^{N(K-1/2)(\eta-1)}$$

$$\theta(\eta, \xi) = \frac{N}{2} \sqrt{(\eta-\xi)(\eta+\xi-2)}, \quad \theta' = \theta(\eta', \xi)$$

Здесь  $m \geq 1$  — целое число.

Для отрицательных  $m \leq -1$  значения функции  $F(\eta)$  определяются из условия ее нечетности. При  $\eta \in \Delta_m$  свободный член  $H(\eta)$  задается значениями  $F$  на интервалах  $\Delta_j$  при  $j \leq m-1$ . Исходным является интервал  $\Delta_0 = (-1, 1)$ , на котором  $F$  определяется равенством (3.2). На каждом интервале  $\Delta_m$  уравнение (3.3) можно записать в операторном виде

$$(3.4) \quad F - NPF = H$$

Через  $P$  обозначен оператор Вольтерра с ядром  $G$ . Решение уравнения (3.4) представимо в обычной форме

$$(3.5) \quad F = H + NQH, \quad Q = \sum_{k=1}^{\infty} N^{k-1} P^k$$

Поскольку ядро  $G$  непрерывно, ряд (3.5) сходится к единственному решению  $F$  при любых  $N$ . Подстановка  $F$  из (3.5) в (3.1) определяет решение  $\rho$  начально-краевой задачи.

При построении решения для значений  $t$ , меньших времени прохождения звуковой волны от стенки до стенки, достаточно найти  $F$  на интервале  $\Delta_1$ , примыкающем к интервалу начальных данных  $\Delta_0$ . Из (3.3) и (3.2) следует, что при  $\eta \in \Delta_1$

$$(3.6) \quad H(\eta) = -\rho_{**}(\eta-2) + N \int_{2-\eta}^1 G(\eta, \zeta) \rho_{**}(\zeta) d\zeta + 2NKC e^{N(-1/2+K)(\eta-1)}$$

Пусть распределение  $\rho_{**}(y)$  отлично от нуля только на интервале  $|y| < \lambda < 1$ . В этом случае  $\rho_{**}(\eta-2) = 0$  при  $\eta \in (1, 2-\lambda)$  и, следовательно,  $\rho_{**}(\zeta) = 0$  при  $\zeta \in (2-\eta, 1) \subset (\lambda, 1)$ . Поэтому из (3.6) следует формула:

$$(3.7) \quad H(\eta) = 2NKC \exp[N(K-1/2)(\eta-1)], \quad \eta \in (1, 2-\lambda)$$

Отсюда и из (3.5) заключаем, что на интервале  $(1, 2-\lambda)$  функция  $F(\eta)$  зависит от начального распределения  $\rho_{**}$  только через интегральный параметр  $C$ . Таким же свойством обладает решение  $\rho(y, t)$  в пристеночных областях  $W_{\pm}$ , указанных на фиг. 1. При  $N \ll 1$  из (3.1) и (3.7) найдем

$$(3.8) \quad \rho(y, t) = NKC(y \pm t \mp 1) + O(N^2KC), \quad (y, t) \in W_{\pm}$$

Верхние знаки в (3.8) относятся к области  $W_+$ , нижние — к  $W_-$ . Возмущение плотности в этих областях отлично от нуля, хотя они расположены вне классической области влияния начальных данных, локализованных на интервале  $(-\lambda, \lambda)$ . Такое поведение решения гиперболического уравнения (2.6) обусловлено присутствием в граничных условиях (2.9) функционала  $C$ . Из (3.1) и (3.2) следует, что в областях  $R_{\pm} \subset D$ , указанных на фиг. 1, будет  $\rho = 0$ . В этих областях происходит «несжимаемое» движение газа — скорость  $V$  пространственно-однородна в  $R_{\pm}$ .

На фиг. 2 показаны профили возмущения плотности, нормированного на параметр  $C$ , при  $y > 0$  и  $t = 0.125, 0.25, 0.375$  (кривые 1–3 соответственно). Этим кривым соответствуют значения параметров  $N = 0.5, \lambda = 0.5$  и начальные условия

$$\rho_* = 0, \quad \rho_{**} = 2C[\delta(y-\lambda) - \delta(y+\lambda)]$$

Распределению  $\rho_{**}$  отвечает прямоугольный начальный импульс скорости  $V_*$  с амплитудой  $C$  и шириной  $2\lambda$ , который при  $t = +0$  порождает импульс сжатия, локализованный в точке  $y = \lambda$ , и такой же импульс раз-

режения в точке  $y = -\lambda$ . Согласно условию (2.8) мгновенное включение электромагнитной силы должно компенсироваться градиентом давления на стенке. Поэтому при  $t = +0$  на стенке  $y = 1$  генерируется волна сжатия. Эта волна движется со скоростью звука по направлению к центру, и при  $t = \frac{1}{2}(1 - \lambda)$  встречается с классическим импульсом сжатия, распространяющимся от центра к стенке.

4. Для значений  $t \gg 1$  анализ возмущений с помощью изложенного выше метода требует учета многократных отражений волн от стенок и нахождения решения в большом числе областей на плоскости  $(y, t)$ . С другой стороны, можно рассмотреть задачу о собственных колебаниях плазмы, включенной на нагрузку. Для больших  $t$  определяющим будет вклад моды с наименьшим затуханием.

Спектральная задача представляет самостоятельный интерес в связи с изучением свойств собственных мод, обусловленных нелокальным характером электромагнитной силы. Нахождение спектра необходимо также при построении решений разложениями в ряды по собственным функциям.

Будем искать решения системы (2.3) в виде

$$(4.1) \quad V = \text{Re} \{ \psi(y) e^{\mu t} \}, \quad \rho = -\text{Re} \{ \mu^{-1} \psi'(y) e^{\mu t} \}$$

Здесь  $\psi(y)$  — четная функция; штрих означает дифференцирование по  $y$ . (Для нечетных мод  $\langle \psi \rangle = 0$  и допустимые значения  $\mu$  будут такими же, как в случае  $K = 0$ .)

Относительно  $\psi$  и  $\mu$  возникает обобщенная спектральная задача

$$(4.2) \quad \psi'' - (\mu^2 + N\mu)\psi = -NK\mu\langle\psi\rangle, \quad \psi'(0) = \psi(1) = 0$$

Из-за присутствия интегрального члена  $\langle\psi\rangle$  задача (4.2) оказывается несамосопряженной. Ее решения можно искать в виде

$$(4.3) \quad \psi = A(\cos \nu y - \cos \nu)$$

Функция  $\cos \nu y$  должна удовлетворять уравнению (4.2) с нулевой правой частью. Из этого условия найдем две ветви функции  $\mu(\nu)$

$$(4.4) \quad \mu(\nu) = \mu^\pm = -N/2 \pm \sqrt{N^2/4 - \nu^2}$$

Подстановка (4.3) в неоднородное уравнение (4.2) с учетом (4.4) приводит к трансцендентному уравнению относительно  $\nu$

$$(4.5) \quad \nu \text{ctg } \nu = \frac{NK}{N(K^{-1/2}) \mp \sqrt{N^2/4 - \nu^2}}$$

В (4.4) и (4.5) перед радикалом одновременно берутся верхние или нижние знаки. Уравнение (4.5) имеет счетное множество корней  $\nu_n$  (вообще говоря, комплексных). В случае  $NK = 0$  корни вещественные и сдвоенные:  $\nu_n^+ = \nu_n^- = (n - 1/2)\pi$ . При  $NK \neq 0$  серии  $\nu_n^+$ ,  $\nu_n^-$  расщепляются. При  $N \ll \pi$  из (4.4), (4.5) найдем

$$(4.6) \quad \nu_n^\pm = \frac{\pi}{2}(2n-1) \mp \frac{4NKi}{\pi^2(2n-1)^2} + O(N^2)$$

$$\mu_n^\pm = \pm \frac{\pi}{2}(2n-1)i - \frac{N}{2} + \frac{4NK}{\pi^2(2n-1)^2} + O(N^2)$$

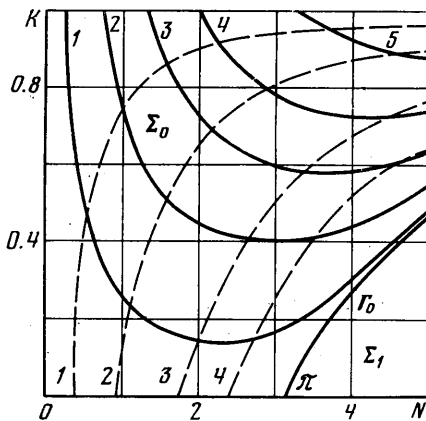
Отсюда видно, что величина  $\text{Re } \mu$  максимальна при  $n = 1$ , т. е. наиболее длинноволновая (первая) мода имеет наибольшее время жизни. Такое поведение обусловлено усилением влияния глобальной компоненты объемной силы  $\sim NK\langle V \rangle$  с возрастанием масштаба неоднородностей. При  $K \ll 1$

из (4.4), (4.5) следуют формулы:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \nu_n^\pm &= \frac{\pi}{2} (2n-1) + \frac{4N^2K}{\pi^3(2n-1)^3} (1 \mp \sqrt{1-\alpha_n}) + O(K^2) \\ \mu_n^\pm &= -\frac{N\gamma_n}{2} \pm \frac{N(\gamma_n-\alpha_n)}{2\sqrt{1-\alpha_n}} + O(K^2) \\ \alpha_n &= \pi^2(2n-1)^2N^{-2}, \quad \gamma_n = 1 - 8K\pi^{-2}(2n-1)^{-2} \end{aligned}$$

Приближение (4.7) равномерно по  $N$  вне малых окрестностей точек  $\alpha_n=1$ . Внутри таких окрестностей возмущения собственных значений  $\mu_n^\pm$  имеют при малых  $K$  дробный порядок  $K^{1/2}$ .

На плоскости параметров  $(N, K)$  каждой точке полуполосы  $\Pi = \{N > 0, 0 < K \leq 1\}$  отвечают дискретные наборы  $\mu_n^\pm, \nu_n^\pm$ . Можно принять  $n \geq 1$ , что



Фиг. 3

соответствует модам с  $\text{Re } \nu > 0$ . (Замена  $\nu$  на  $-\nu$  не меняет вида соотношений (4.4), (4.5).) Область  $\Pi$  можно разбить на счетное множество областей  $\Sigma_j$  ( $0 \leq j < \infty$ ), характеризующихся следующими признаками. В области  $\Sigma_j$  величины  $\mu_n^\pm$  при  $j+1 \leq n < \infty$  образуют комплексно-сопряженные пары и имеется конечная совокупность вещественных пар  $\mu_n^\pm$  (при  $1 \leq n \leq j$ ). Аналогичным свойством в области  $\Sigma_j$  обладают величины  $\nu_n^\pm$ . Общими границами смежных областей  $\Sigma_j$  и  $\Sigma_{j+1}$  служат линии  $\Gamma_j$ , выходящие из точек  $N = (2j+1)\pi, K=0$ .

На фиг. 3 отмечены части прямоугольника  $0 < N < 5, 0 < K < 1$ , относящиеся к областям  $\Sigma_0, \Sigma_1$ , и участок

линии  $\Gamma_0$ . Переходу из  $\Sigma_0$  в  $\Sigma_1$  отвечает переход от колебательного к апериодическому режиму затухания первой моды при возрастании  $N$  или уменьшении  $K$ . Полагая в (4.5)  $\nu = \text{Re } \nu + i \text{Im } \nu$ , после отделения вещественной и мнимой частей уравнения можно найти зависимости  $N = N(\text{Re } \nu, \text{Im } \nu), K = K(\text{Re } \nu, \text{Im } \nu)$ . Построенные с их помощью кривые  $\text{Im } \nu = \text{const}$ , отвечающие первой моде, показаны на фиг. 3 сплошными линиями (кривым 1–5 соответствуют значения  $\text{Im } \nu = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1$ ). Пунктиром нанесены линии  $\omega = |\text{Im } \mu| = \text{const}$  для той же моды (кривым 1–4 соответствуют значения  $\omega = 1.56, 1.5, 1.3, 1$ ). С ростом  $K$  частота колебаний  $\omega$  возрастает, а затухание уменьшается.

Отметим, что при  $\text{Im } \nu \neq 0$  фаза собственных колебаний пространственно-неоднородна. Поэтому скорость газа никогда не обращается в нуль одновременно во всем сечении канала. Данная особенность — следствие глобального характера объемных сил.

Автор благодарит участников семинаров, руководимых Л. М. Биберманом и Г. А. Любимовым, за полезные обсуждения.

Поступила 11 VII 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бай Ши-и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. М., «Мир», 1964.
2. Mc Cune J. E. Wave growth and instability in partially-ionized gases. Intern. Sympos. Magnetohydrodynam. Electr. Power Generation. Paris, 1964, vol. 2, Paris, s. a.
3. Heywood J. B., Wright J. K. Wave growth in MHD generators. Philos. Trans. Roy. Soc., Ser. A, 1967, vol. 261, No. 1123.



4. Powers W. L., Dicks J. B. Transient wave growth in magnetogasdynamic generators. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 6.
5. Варажин А. Б. Торможение проводящих сгустков, движущихся по каналам в неоднородном магнитном поле. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
6. Генкин А. Л., Кудряшова Л. А., Сухов Г. С. Нестационарное течение плазмы в магнитогазодинамическом канале ударной трубы. Магнитная гидродинамика, 1969, № 3.
7. Mc Cune J. E. Linear theory of an MHD oscillator. Advanc. Energy Conversion, 1965, vol. 5, No. 3.
8. Fonda-Bonardi G., Thornton J. A. Experiments on pressure wave propagation in low density plasmas. Intern. Sympos. Magnetohydrodynam. Electr. Power Generation. Paris, 1964, vol. 2, Paris, s. a.
9. Hoffman A. L. A single-fluid model for shock formation in MHD shock tubes. J. Plasma Phys., 1967, vol. 1, No. 2.
10. Sorrell F. Y. Shock and current-sheet separation in magnetic shock tubes. Phys. Fluids, 1969, vol. 12, No. 6.
11. Исакова Н. П. Об образовании ударных волн при внезапном «включении» внешних воздействий. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 5.
12. Зайцев С. Г., Михайлов А. В., Фаворская И. К. Исследование свойств разрыва, возникающего в сверхзвуковом потоке плазмы, проходящем через поперечное магнитное поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 1.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М., «Наука», 1964.
14. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.