

МЕТОД РАСЧЕТА СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ЭНЕРГИИ  
ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Г. С. ГЛУШКО, В. Д. ТРАСКОВСКИЙ

(Москва)

В работе предложен численный метод расчета развития вниз по потоку (или по времени) распределения по модулю вектора волнового числа спектральной плотности энергии однородной изотропной турбулентности во всем диапазоне волновых чисел. Исследовано влияние величины шага по модулю вектора волнового числа на точность расчета. Приведены результаты расчета процесса вырождения однородной изотропной турбулентности и некоторых интегральных характеристик спектра. Результаты расчета сравниваются с результатами экспериментов.

В ряде практических задач возникает необходимость хотя бы приближенно знать распределение по волновым числам (или частотам) плотности энергии турбулентности или пульсаций пассивной примеси. К таким задачам относится, например, задача об определении величины искажений, возникающих при прохождении электромагнитных и звуковых волн через зоны, занятые турбулентным течением. Кроме того, в теориях турбулентных течений, использующих для характеристики турбулентности один или два параметра, связанных с энергией  $e$  или масштабом  $L$  турбулентности, получаются дифференциальные уравнения, в которых некоторые коэф-

фициенты зависят от интегралов вида  $\int_0^{\infty} E^{\alpha} k^{\beta} dk$ , где  $E$  — спектральная плотность

(например, энергии турбулентности),  $k$  — модуль вектора волнового числа,  $\alpha$  и  $\beta$  — константы [1-3]. Определить такие коэффициенты экспериментальным путем очень трудно, а часто вообще невозможно при современных средствах измерения. Поэтому приближенные расчеты спектральных распределений энергии турбулентности, напряжения трения и т. д. в различных течениях позволяют провести оценки этих коэффициентов и выявить их зависимости от определяющих параметров (например, от числа Рейнольдса турбулентности  $r = \sqrt{e}L/\nu$ , где  $\nu$  — кинематическая вязкость). В особенности важно знать эволюцию спектральных распределений в тех случаях, когда по тем или иным причинам спектральные распределения резко отличаются от автомодельных (например, в спектре имеются дискретные составляющие).

В литературе известны попытки численных расчетов спектральных распределений энергии турбулентности [4, 5]. В настоящей работе излагается численный метод расчета спектрального распределения энергии турбулентности, отличающийся от предложенного в [4, 5], и приводятся результаты расчетов, которые сравниваются с результатами экспериментов.

1. В случае почти однородной<sup>1</sup> изотропной турбулентности известно [6, 7] уравнение для спектральной по модулю вектора волнового числа плотности энергии пульсаций

$$(1.1) \quad u \frac{dE}{dx} = F - 2\nu k^2 E, \quad [0 \leq k < \infty)$$

$$E = \frac{k^2}{2\pi^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} Q(\xi, x) \frac{\sin(\mathbf{k} \cdot \xi)}{(\mathbf{k} \cdot \xi)} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

<sup>1</sup> Почти однородной турбулентностью здесь названа такая, характеристики которой слабо меняются вдоль направления течения и не меняются вдоль других направлений.

Здесь  $Q(\xi, x) = \langle \mathbf{u}'(x + \xi/2) \cdot \mathbf{u}'(x - \xi/2) \rangle / 2$ ,  $\mathbf{u}'$  — вектор пульсации скорости. Функция  $F$  является результатом соответствующего преобразования от корреляционного тензора третьего ранга и характеризует передачу энергии от крупномасштабных элементов турбулентного движения к мелкомасштабным. О виде функции  $F$  имеются различные предположения интуитивного характера. В данной работе использована формула Гейзенберга

$$(1.2) \quad F = 2\alpha \left[ \frac{E^{1/2}}{k^{3/2}} \int_0^k k^2 E dk - k^2 E \int_k^\infty \frac{E^{1/2}}{k^{3/2}} dk \right]$$

где  $\alpha$  — константа Гейзенберга.

2. Для численных расчетов распределения спектральной плотности энергии весь диапазон волновых чисел разбивается на ряд конечных интервалов  $(k_{i-1} - k_i)$ , где  $k_i = k_{i-1}(1 + \kappa)$ ,  $\kappa > 0$ . Уравнение (1.1) после подстановки в него (1.2) интегрируется по  $k$  внутри каждого интервала. При интегрировании членов вида  $E^\beta k^\sigma$  предполагалось, что  $E^\beta$  постоянно внутри интервала. Тогда

$$(2.1) \quad \int_{k_i}^{k_{i+1}} E^\beta k^\sigma dk = A_{\beta, \sigma} e_i^\beta k_i^{\sigma+1-\beta}$$

где

$$e_i = E_i k_i \kappa = \int_{k_i}^{k_{i+1}} E dk, \quad \text{а} \quad A_{\beta, \sigma} = ((1 + \kappa)^{\sigma+1} - 1) (\sigma + 1)^{-1} \kappa^{-\beta}$$

при  $\sigma \neq -1$  и  $A_{\beta, \sigma} = \ln(1 + \kappa) \kappa^{-\beta}$  при  $\sigma = -1$ .

При интегрировании членов вида  $k^\sigma \left( E^\beta \int_a^b E^\gamma k^\delta dk \right)$  предполагалось, что выражение, стоящее в скобках, постоянно внутри интервала, а также что

$$\int_a^b E^\gamma k^\delta dk = A_{\gamma, \delta} \sum_{k_j=a}^b e_j k_j^{\delta+1-\gamma}$$

При численном интегрировании, конечно, невозможно охватить весь диапазон волновых чисел  $k$  от 0 до  $\infty$ . Так как плотность энергии турбулентности стремится к нулю при приближении к обоим предельным значениям  $k$ , то в численных расчетах рассматривался диапазон волновых чисел от некоторого малого волнового числа  $k^\circ$  до некоторого большого

волнового числа  $k_N$ . Значение  $k^\circ$  выбиралось так, чтобы  $\int_0^{k^\circ} E dk$  был на не-

сколько порядков меньше полной энергии турбулентности  $e = \int_0^\infty E dk$ . Зна-

чение  $k_N$  выбиралось таким, чтобы захватывалась область диссипации, т. е.  $k_N > k_d$ , где  $k_d = 1/\eta$  — волновое число, определяемое масштабом Колмогорова  $\eta = (\nu^3/\omega)^{1/4}$  ( $\omega$  — диссипация энергии турбулентности). Оценки показывают, что это условие выполняется достаточно хорошо, если принять  $k^\circ = 0.01/L$  и  $k_N = 2k_d$  (здесь  $L$  — поперечный интегральный масштаб турбулентности).

С использованием приведенных выше рассуждений вместо уравнений (1.1) и (1.2) получается система дифференциальных уравнений

$$(2.2) \quad u \frac{de_i}{dx} = a \frac{\sqrt{e_i}}{k_i} \sum_{j=1}^i k_j^2 e_j - \left( 2bv + a \sum_{j=1}^N \frac{\sqrt{e_j}}{k_j} \right) k_i^2 e_i$$

$$(i=1, 2, \dots, N)$$

$$a = 4\alpha A_{1,2} (1 - (1+\kappa)^{-1/2}) \kappa^{-1/2}, \quad b = A_{1,2} = 1 + \kappa + \kappa^2 / 3$$

Плотность энергии турбулентности в точке  $k=k_i$  вычисляется по формуле  $E_i = e_i / (k_i \kappa)$ , полная энергия — по формуле  $e = \sum_{i=1}^N e_i$ , поперечный интегральный масштаб — по формуле  $L = (3\pi \ln(1+\kappa) / 8\kappa e) \sum_{i=1}^N e_i / k_i$ .

При расчетах полагалось, что турбулентность в начальной точке близка к изотропной, и для начального распределения по модулю вектора волнового числа плотности кинетической энергии использовалось соотношение из работ [6, 7]

$$(2.3) \quad E = 0.258eL(2.66Lk)^4 / [1 + (2.66Lk)^2]^{17/4}$$

В инерционной области (малые волновые числа) это соотношение дает  $E \sim k^4$ , а в равновесной области  $E \sim k^{-5/3}$ . Соотношение (2.3) использовалось до волнового числа  $k = \xi k_d$ . Величина  $\xi$  подбиралась так, чтобы при заданных начальных значениях  $e$  и  $L$  величина диссипации энергии турбулентности

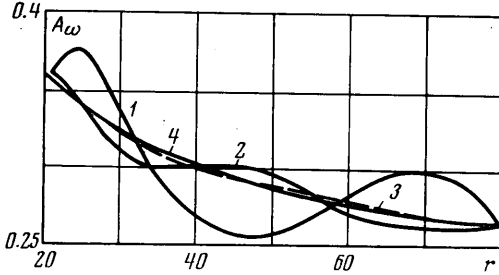
$\omega = 2\nu \int_0^\infty Ek^2 dk$  в начальной точке соответствовала экспериментальному закону  $\omega = \nu f(r)e / L$ , где  $f(r)$  — эмпирическая функция от числа Рейнольдса турбулентности.

3. Точность расчета интегральных характеристик турбулентности (например,  $e$  и  $L$ ) в равномерном среднем потоке зависит от точности расчета диссипации энергии турбулентности. Поэтому при исследовании вопроса о точности расчетов спектральных распределений изучалось влияние шагов по  $x$  и по волновому числу  $k$  на величину коэффициента диссипации энергии турбулентности  $A_\omega = \omega L / e^{3/2}$ , зависящего от числа Рейнольдса турбулентности  $r = \sqrt{e}L / \nu$ . Влияние шага по  $x$  в довольно широком диапазоне оказалось совершенно незначительным и поэтому здесь не обсуждается. Влияние шага по волновому числу (задаваемого величиной  $\varepsilon = \Delta \lg k$ ) на зависимость  $A_\omega$  от числа Рейнольдса турбулентности в диапазоне  $r = 20 \div 80$  показана на фиг. 1.

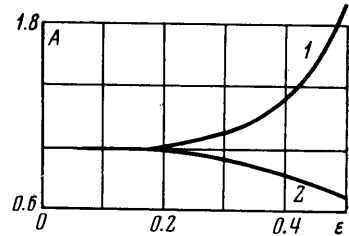
Для всех значений  $\varepsilon$  ( $0.05 \leq \varepsilon \leq 0.5$ ) начальные условия задавались таким образом, чтобы величина коэффициента диссипации энергии турбулентности  $A_\omega$  в начальной точке ( $r=80$ ) была одинаковой и соответствовала экспериментальным данным. На фиг. 1 видно, что для больших значений шага по волновому числу  $\varepsilon=0.5$  и  $0.3$  (соответственно кривые 1 и 2 на фиг. 1) кривые  $A_\omega(r)$  имеют осциллирующий характер и значения  $A_\omega(r)$  в отдельных точках сильно отличаются от значений  $A_\omega(r)$  при малых значениях  $\varepsilon=0.2$  и  $0.1$  (соответственно кривые 3 и 4). При  $\varepsilon \leq 0.15$  зависимость  $A_\omega(r)$  имеет монотонный характер.

На фиг. 2 приведены зависимости  $A = \max_r (A_\omega(r, \epsilon) / A_\omega(r, 0.1))$  (кривая 1) и  $A = \min_r (A_\omega(r, \epsilon) / A_\omega(r, 0.1))$  (кривая 2) от шага по волновому числу  $\epsilon$  в диапазоне чисел Рейнольдса турбулентности  $r = 0.3 \div 4 \cdot 10^4$ . Видно, что при  $\epsilon < 0.15$  шаг по волновому числу практически не влияет на точность расчета спектральных распределений. Все последующие расчеты проведены с  $\epsilon = 0.1$ .

4. На фиг. 3 приведены распределения безразмерной плотности энергии турбулентности  $E_1 = \lg(E / SU^2)$  по безразмерному волновому числу  $k_1 = \lg(kS)$  (здесь  $U$  и  $S$  — характерные скорости и длина), полученные в расчете загущения турбулентности за решеткой. Кривая 1 на фиг. 3 соот-



Фиг. 1



Фиг. 2

ветствует начальному распределению при  $x=0$ . Кривые 2–5 соответствуют расстояниям от начального сечения  $x / L_0 = 294, 1240, 9230, 49500$  ( $L_0$  — начальный масштаб турбулентности). В каждом сечении по спектральным распределениям плотности энергии турбулентности определялись энергия и масштаб турбулентности и число Рейнольдса турбулентности  $r$ . Кривые 1–5 на фиг. 3 соответствуют значениям  $r = 127.2, 68.8, 41.4, 18.6$  и  $10.4$ . Прямые 6–8 на фиг. 3 соответствуют закономерностям  $E \sim k^4, k^{-5/3}$  и  $k^{-7}$ .

Видно, что крупные вихри (малые волновые числа,  $k_1 < 2$  для  $r = 68.8$ ) почти неизменны и плотность энергии турбулентности в этой области волновых чисел  $E \sim k^4$ . В равновесной области ( $2.0 < k_1 < 3.1$  для  $r = 68.8$ ) плотность энергии турбулентности  $E \sim k^{-5/3}$ , а в области диссипации ( $k_1 > 3.1$  для  $r = 68.8$ ) плотность энергии  $E \sim k^{-7}$ . С уменьшением числа Рейнольдса турбулентности протяженность равновесной области уменьшается и при  $r = 10.4$  эта область практически отсутствует. Полученные характерные особенности спектров плотности энергии турбулентности и характер их эволюции с уменьшением числа Рейнольдса турбулентности качественно согласуются с результатами известных теоретических и экспериментальных исследований.

Если уравнение (1.1) проинтегрировать по  $k$  во всем диапазоне волновых чисел, то получится уравнение для полной энергии турбулентности

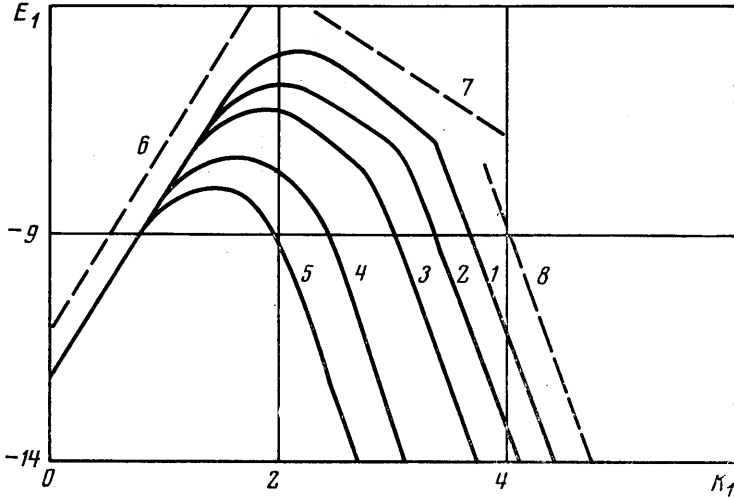
$$(4.1) \quad u \frac{de}{dx} = -\omega, \quad \omega = 2\nu \int_0^\infty E k^2 dk, \quad \int_0^\infty F dk = 0$$

В различных теориях турбулентности [1–3] величина диссипации полной энергии турбулентности  $\omega$  обычно выражается эмпирической формулой вида  $\omega = A_\omega e^{3/2} / L$ , где  $A_\omega$  — эмпирический коэффициент, зависящий от числа Рейнольдса турбулентности  $r = \sqrt{e} L / \nu$ ,  $L$  — какой-либо из интегральных масштабов турбулентности (например, поперечный интегральный

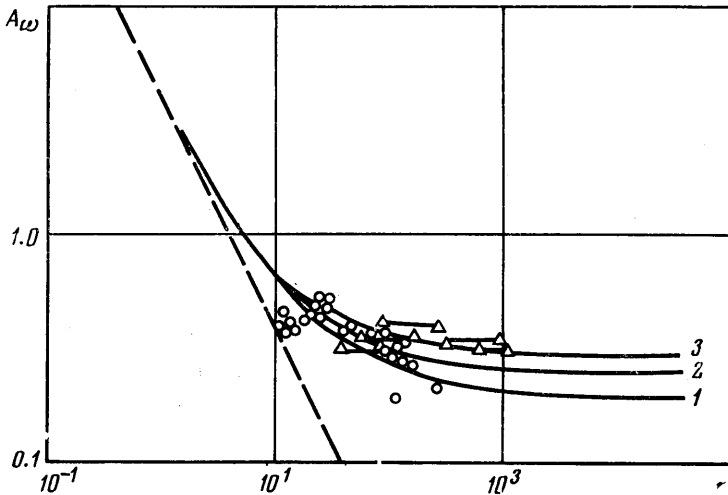
масштаб). По полученным в результате интегрирования уравнений (2.2) спектрам плотности энергии турбулентности можно определить коэффициент  $A_0$  по формуле

$$(4.2) \quad A_0 = (3\pi/4)\nu \int_0^\infty Ek^2 dk \int_0^\infty Ek^{-1} dk \left( \int_0^\infty E dk \right)^{-1/2}$$

На фиг. 4 приведено сравнение результатов расчета коэффициента  $A_0$  с результатами экспериментов по определению  $A_0$ , приведенными в рабо-



Фиг. 3



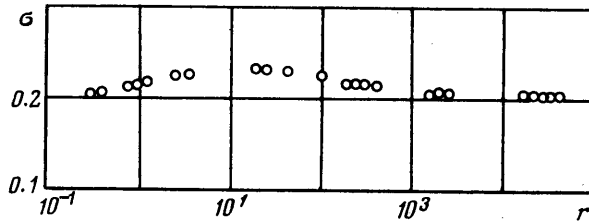
Фиг. 4

те [3]. Расчеты проводились при различных значениях  $r$  при  $x=0$ . На этой же фигуре нанесена пунктиром теоретическая [6,7] кривая для малых чисел Рейнольдса  $A_0=3.93/r$ . Кривые 1-3 на фиг. 4 соответствуют трем значениям константы Гейзенберга, равным соответственно 0.36, 0.46 и 0.55. По данным различных работ (например, [6,7]) ее значение лежит в диапа-

зоне  $0.28 \div 0.7$ . Видно, что результаты расчета удовлетворительно согласуются с результатами экспериментов и с теоретической кривой при малых числах Рейнольдса турбулентности. Большой разброс экспериментальных точек не позволяет сделать обоснованного выбора величины константы Гейзенберга.

5. При затухании турбулентности за решеткой изменяется не только величина ее полной энергии, но и интегральный масштаб

$L = (3\pi/8e) \int_0^{\infty} Ek^{-1} dk$ . Из приведенных на фиг. 3 спектров энергии турбулентности можно видеть, что эволюция масштаба обусловлена тем, что



Фиг. 5

энергия в мелкомасштабной части спектра вырождается значительно быстрее, чем в крупномасштабной части.

Из уравнений (1.1) и (4.1) можно получить дифференциальное уравнение для эволюции масштаба турбулентности, если умноженное на  $3\pi/8k$  уравнение (1.1) проинтегрировать по  $k$  во всем диапазоне волновых чисел, вычест из полученного уравнения умноженное на  $L$  уравнение (4.1) и разделить полученный результат на полную энергию турбулентности

$$(5.1) \quad u \frac{dL}{dx} = \int_0^{\infty} (F - 2\nu Ek^2) \left( \frac{3\pi}{8k} - L \right) dk \left( \int_0^{\infty} E dk \right)^{-1}$$

В полуэмпирических теориях турбулентности, использующих уравнение для интегрального масштаба турбулентности [2, 3], правая часть уравнения (5.1) представляется в виде  $\sigma A_0 \sqrt{e}$ , где  $\sigma = \text{const}$ . Из правой части уравнения (5.1) и формул для  $e$  и  $L$  можно получить выражение для

$$(5.2) \quad \sigma = 1 - \left( \int_0^{\infty} Ek dk - \frac{1}{2\nu} \int_0^{\infty} Fk^{-1} dk \right) \int_0^{\infty} E dk \left[ \int_0^{\infty} Ek^2 dk \int_0^{\infty} Ek^{-1} dk \right]^{-1}$$

С использованием соотношений (5.2) и (1.2) по полученным в результате интегрирования уравнений (2.2) спектрам энергии турбулентности были рассчитаны значения  $\sigma$  при различных числах Рейнольдса турбулентности  $r$ . Зависимость  $\sigma(r)$ , полученная в результате этих расчетов, приведена на фиг. 5. Оказалось, что величина  $\sigma$  слабо зависит от числа Рейнольдса турбулентности, что согласуется с результатами приведенного в [3] анализа экспериментальных данных различных авторов. Значение  $\sigma$  совпадает с теоретическим при малых числах Рейнольдса, когда влиянием инерционных членов в уравнении (1.1) можно пренебречь ( $F=0$ ). При

таком поведении  $\sigma(r)$  величина числа Рейнольдса турбулентности всегда, в том числе и при очень больших значениях  $r$ , уменьшается по мере затухания турбулентности. Оказалось, что  $r \sim x^{-0.4}$ .

Поступила 15 III 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР. Сер. физ., 1942, т. 6, № 1, 2.
2. Глушко Г. С. Дифференциальное уравнение для масштаба турбулентности и расчет турбулентного пограничного слоя на плоской пластине. В сб. «Турбулентные течения». М., «Наука», 1970.
3. Rotta J. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. Z. Phys., 1951, Bd 129, H. 5; Bd 131, H. 1.
4. Деснянский В. Н., Новиков Е. А. Моделирование каскадных процессов в турбулентных течениях. ПММ, 1974, т. 38, вып. 3.
5. Деснянский В. Н., Новиков Е. А. Эволюция спектров турбулентности к режиму подобия. Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1974, т. 10, № 2.
6. Hinze J. O. Turbulence. An introduction to its mechanism and theory. New York a. a., McGraw-Hill, 1959. (Рус. перев.: Турбулентность. Ее механизм и теория. М., Физматгиз, 1963.)
7. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 2. М., «Наука», 1967.