МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1978

УДК 534.222.2

ТЕЧЕНИЕ ГАЗА ЗА ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНОЙ ЧЕПМЕНА – ЖУГЕ В ОКРЕСТНОСТИ ЛИНИИ РАЗРЫВА КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТИ ВОЛНЫ

А. М. СВАЛОВ

(Москва)

В работе рассматриваются вопросы построения решения уравнений газовой динамики вблизи линии разрыва кривизны на поверхности детонационной волны, распространяющейся в режиме Чепмена – Жуге. Описана структура решения в двух случаях – в течении, возникающем при инициировании детонации вдоль полуплоскости в покоящемся однородном горючем газе, и в течении, возникающем при инициировании детонации по лучу в тех же условиях.

Рассматриваемая задача автомодельна [1], поэтому будем искать решения с постоянной скоростью детонационной волны. Скорость волны однозначно определяется по параметрам покоящегося газа при выполнении условия Чепмена – Жуге, согласно которому детонационная волна движется относительно сгоревшего газа со скоростью звука.

Вообще говоря, поверхность детонационной волны, распространяющейся в режиме Чепмена – Жуге, представляет собой огибающую характеристических поверхностей уравнений, описывающих движение газа за волной. Задача Коши, поставленная для этих уравнений с начальными распределениями функций, заданными на поверхности волны, некорректна, и возникает вопрос об условиях существования решения и возможности построения его в окрестности волны. Вопросы существования и построения решений за произвольными криволинейными волнами изучались в [2], где было показано, что задача Коши разрешима лишь для расходящихся волн, причем решение существенно зависит от кривизны поверхности волны. При этом возникает вопрос о построении решения в окрестности линии разрыва кривизны, т. е. разрыва вторых производных функции, задающей поверхность детонационной волны. В предлагаемой работе исследуется структура решения в окрестности линии, разделяющей плоскую и цилиндрическую поверхности, а также линии, разделяющей цилиндрическую и сферическую поверхности.

Отметим, что, как показано в [3], за детонационной волной устанавливается автомодельное течение с момента выхода ее на режим Чепмена – Жуге независимо от конкретных условий инциирования, т. е. построенное ниже решение справедливо для описанных волн Чепмена – Жуге независимо от условий их образования.

1. В течении за детонационной волной, образовавшейся при инициировании детонации вдоль полуплоскости, можно выделить три области: область, занятую волной Римана, область автомодельного одномерного цилиндрического течения и область, в которой происходит взаимодействие указанных двух течений. В предположении непрерывности течения все области разделяются между собой характеристиками уравнений

$$
\begin{gathered}
(u-\eta_1)u_{\eta_1}+(v-\eta_2)u_{\eta_2}+\frac{2}{\gamma-1}aa_{\eta_1}=0\\
(u-\eta_1)v_{\eta_1}+(v-\eta_2)v_{\eta_2}+\frac{2}{\gamma-1}aa_{\eta_2}=0 \qquad (1.1)\\
\frac{2}{\gamma-1}[(u-\eta_1)a_{\eta_1}+(v-\eta_2)a_{\eta_2}]+a(u_{\eta_1}+v_{\eta_2})=0
\end{gathered}
$$

Здесь a, u и v — безразмерные скорость звука и проекции скорости газа на оси $\eta_1=x_1/Dt$, $\eta_2=x_2/Dt$, D — скорость волны Чепмена — Жуге, γ — показатель адиабаты продуктов детонации; ось x_2 ортогональна плоскости инициирования, ось x_1 ортогональна оси x_2 и границе полуплоскости.

Условие Чепмена — Жуге связывает значение скорости звука a и нормальной скорости газа w на волне соотношением

(1.2) $$a_0+w_0=1$$

При этом условии производные функции a и w по нормали к поверхности цилиндрической волны обращаются в бесконечность, а соответствующие производные на поверхности плоской волны конечны, и в области взаимодействия цилиндрической волны разрежения и волны Римана возникает течение со сложной структурой, для описания которой целесообразно перейти в плоскость годографа u, v.

Уравнения (1.1) допускают первый интеграл, аналогичный интегралу Бернулли

(1.3) $$\frac{u^2+v^2}{2}-u\eta_1-v\eta_2+\frac{a^2}{\gamma-1}+\varphi=0, \qquad \varphi_{\eta_1}=u, \qquad \varphi_{\eta_2}=v$$

Преобразованием Лежандра введем новую функцию $\varphi_1(u, v)$

$$\varphi_1=\frac{u^2+v^2}{2}-u\eta_1-v\eta_2+\varphi$$

Тогда вместо (1.3) получим

$$a^2/(\gamma-1)+\varphi_1=0$$

Введя функцию $S=a^2/(\gamma-1)$, получим следующие соотношения, являющиеся следствием первых двух уравнений системы (1.1) и одновременно формулами перехода от переменных u, v к переменным η_1, η_2

(1.4) $$S_u=\eta_1-u, \quad S_v=\eta_2-v$$

Уравнение неразрывности в новых переменных примет вид

(1.5) $$[(\gamma-1)S-S_v^2](S_{uu}+1)+2S_uS_vS_{uv}+[(\gamma-1)S-S_u^2](S_{vv}+1)=0$$

В области годографа детонационной волне соответствует окружность

(1.6) $$u^2+v^2=w_0^2$$

Волна Римана вырождается в отрезок оси v, заключенный внутри окружности (1.6). Заметим, что окружность (1.6) уже не является огибающей характеристик уравнения (1.5), так как эти характеристики описываются уравнением

$$\tau\pm2a/(\gamma-1)=\text{const}$$

где τ — длина дуги характеристики, отсчитываемая от какой-либо точки.

В этом случае решение, соответствующее цилиндрической волне разрежения, можно разложить в ряд в окрестности (1.6) [4] и найти распределение функции S и ее внешней производной на характеристике, отделяющей область возмущенного течения от одномерного цилиндрического.

Если ввести полярные координаты r, α в точке пересечения окружности (1.6) и оси v (α отсчитывается по часовой стрелке), а также переменную $\psi=\alpha/\sqrt{r}$, то уравнение характеристики цилиндрической волны будет следующим:

(1.7) $$\psi=\psi_0-\psi_{10}r+\ldots, \qquad \psi_0=2(\gamma+1)^{1/2}/3a_0^{1/2}, \qquad \psi_{10}>0$$

а распределение функции S и ее производной S_ψ на характеристике (1.7) будет иметь вид

$$(1.8)\qquad S=\frac{a_0^2}{\gamma-1}-a_0r+\frac{4\gamma-5}{18}r^2+\ldots,\qquad S_\psi=\frac{2}{3}a_0^{1/2}(\gamma+1)^{1/2}r^2+\ldots$$

Характеристике волны Римана будет соответствовать отрезок оси $v(\psi=0)$ с распределением функций

$$(1.9)\qquad S=\frac{a_0^2}{\gamma-1}-a_0r+\frac{\gamma-1}{4}r^2+\ldots,\qquad S_\psi=-\left(\frac{a_0}{2}\right)^{1/2}(\gamma+1)^{1/2}r^2+\ldots$$

Будем искать решение уравнения (1.5) в виде

$$(1.10)\qquad S=S_0(\psi)+S_1(\psi)r+S_2(\psi)r^2+\ldots$$

причем на $\psi=0$ и $\psi=\psi_0$ функции S и S_ψ принимают значения соответственно формулам (1.8) и (1.9).

Подставляя ряд (1.10) в уравнение (1.5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях r, будем последовательно получать обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций S_0, S_1, S_2 и т. д.

Легко показать, что единственно возможными функциями S_0, S_1, одновременно удовлетворяющими (1.8) и (1.9), являются постоянные

$$S_0=a_0^2/(\gamma-1),\ S_1=-a_0$$

Для определения S_2 получаем следующее уравнение с граничными условиями:

$$(1.11)\qquad (a_0^2\psi^2/4-\gamma+1+4S_2)S_2''=a_0(\psi S_2'/4+2S_2-\gamma)+S_2'^2$$

$$(1.12)\qquad S_2|_{\psi=0}=(\gamma-1)/4,\ S_2'|_{\psi=0}=-(a_0/2)^{1/2}(\gamma+1)^{1/2}$$

$$S_2|_{\psi=\psi_0}=(4\gamma-5)/18,\qquad S_2'|_{\psi=\psi_0}=2a_0^{1/2}(\gamma+1)^{1/2}/3$$

Нетрудно видеть, что значения S_2 и S_2' в точках $\psi=0$ и $\psi=\psi_0$ обращают в нуль коэффициент при S_2'' и правую часть уравнения (1.11), т. е. точки $\psi=0$ и $\psi=\psi_0$ являются особыми точками уравнения (1.11). Качественного исследования этого уравнения из-за громоздких выкладок здесь не приводится, укажем лишь, что после введения новых переменных по формулам

$$\psi_1=\sqrt{\frac{a_0}{\gamma+1}}\psi\qquad y_1=\frac{S_2-\gamma/2}{\gamma+1},\qquad y=-\frac{\psi_1^2}{16}-\frac{1}{4}-y_1$$

и представления решения в виде

$$p^2={}^1/_2+cy^{1/2}-{}^5/_2y-f(y)$$

где $p=y'$, c — произвольная постоянная, получим систему двух уравнений относительно функций $p(y)$ и $f(y)$, в которой особенности на границах будут устранены.

Асимптотическое разложение решения уравнения (1.11) в окрестности точек $\psi=0$ и $\psi=\psi_0$ имеет вид

$$(1.13)\qquad \psi=0,\qquad S_2=\frac{\gamma-1}{4}-\sqrt{\frac{a_0(\gamma+1)}{2}}\psi+c_1[a_0^3(\gamma+1)]^{1/4}\psi^{3/2}+\ldots$$

$$\psi=\psi_0,\qquad S_2=\frac{4\gamma-5}{18}-\frac{2}{3}(\gamma+1)\left(\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{a_0}{\gamma+1}}\psi\right)+$$
$$+c_2(\gamma+1)\left(\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{a_0}{\gamma+1}}\psi\right)^{3/2}+\ldots$$

где c_1, $c_2>0$.

По формулам обратного перехода (1.4) найдем, что

$$\eta_1=-r^{1/2}(S_2'+\psi S_2)+h_1(\psi)r^{3/2}+\ldots$$
$$\eta_2=1+\left(\frac{\psi^2}{2}S_1-2S_2+\frac{3}{2}\psi S_2'-1\right)r+h_2(\psi)r^2+\ldots \tag{1.14}$$

В выражения h_1 и h_2 входит функция S_3, которая не исследована, но качественные выводы можно сделать, ограничиваясь функциями S_0, S_1, S_2.

Якобиан преобразования J от переменных η_1, η_2 к переменным ψ, r имеет вид

$$J=(\gamma+1)r^{1/2}[(y''+{}^9/_8)(-{}^9/_{16}\psi_1+2y-{}^1/_2-{}^3/_2\psi_1y')-$$
$$-{}^1/_2(y'+{}^9/_8\psi_1)(-{}^9/_8\psi_1+y'/2-{}^3/_2\psi_1y'')]+\ldots$$

Не приводя доказательства того, что $J>0$ всюду, укажем асимптотику J в точках $\psi=0$ $(\psi_1=0)$ и $\psi=\psi_0$ $(\psi_1={}^2/_3)$

$$\lim_{\psi_1\to 0}J=(\gamma+1)\left(-\frac{1}{2}y''\right)r^{1/2}=+\infty$$
$$\lim_{\psi_1\to {}^2/_3}J=\frac{9}{16}(\gamma+1)c_2^2r^{1/2}>0 \tag{1.15}$$

По формулам обратного перехода имеем

$$S_{\eta_1}=S_\psi\eta_{2r}/J-S_r\eta_{2\psi}/J,\quad S_{\eta_2}=-S_\psi\eta_{1r}/J+S_r\eta_{1\psi}/J$$

С учетом (1.15) найдем, что на характеристике волны Римана

$$S_{\eta_1}=o(r^{1/2}),\qquad S_{\eta_2}=\frac{2}{\gamma+1}a_0+o(r^{1/2})$$

а на характеристике цилиндрической волны разрежения

$$S_{\eta_1}=\lim_{\psi_1\to {}^2/_3}\frac{8}{9}\frac{a_0\psi_0}{(\gamma+1)^2c_2^2}S_2''r^{1/2}=A_1+o(r^{1/2}),\qquad A_1>0$$
$$S_{\eta_2}=\lim_{\psi_1\to {}^2/_3}\frac{16}{9}\frac{a_0}{(\gamma+1)c_2^2}S_2''=A_2r^{-1/2}+\ldots,\qquad A_2>0$$

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что течение разряжения за цилиндрической волной детонации Чепмена — Жуге, взаимодействуя с волной Римана, образует сложную по структуре течения область, которая является волной сжатия, имеющей вблизи характеристики цилиндрического течения большие положительные градиенты, что говорит о возможном существовании слабой ударной волны, влияния которой из разложения до членов порядка r^2 не обнаруживается. Характеристики волны сжатия представляют собой пучок кривых, имеющих общую касательную с волной в точке разрыва кривизны волны.

2. Течение за детонационной волной, образующейся при инициировании детонации по лучу в пространстве, исследуется аналогично. Поверхность волны в этом случае представляет собой поверхность, состоящую из поверхности круглого цилиндра и поверхности полусферы, соединяющихся между собой по окружности, которая и является линией разрыва кривизны поверхности.

Уравнения, описывающие течение за волной, будут следующими:

$$(u-\eta_1)u_{\eta_1}+(v-\eta_2)u_{\eta_2}+\frac{2}{\gamma-1}aa_{\eta_1}=0$$

$$(2.1)\qquad (u-\eta_1)v_{\eta_1}+(v-\eta_2)v_{\eta_2}+\frac{2}{\gamma-1}aa_{\eta_2}=0$$

$$\frac{2}{\gamma-1}[(u-\eta_1)a_{\eta_1}+(v-\eta_2)a_{\eta_2}]+a\left(u_{\eta_1}+v_{\eta_1}+\frac{v}{\eta_2}\right)=0$$

$$\eta_1=x_1/Dt,\quad \eta_2=\sqrt{x_2^2+x_3^2}/Dt$$

Здесь ось x_1 направлена по лучу, по которому проводится инициирование детонации, оси x_2, x_3 лежат в ортогональной этому лучу плоскости; остальные обозначения аналогичны обозначениям п. 1.

Преобразованиями, аналогичными описанным в п. 1, сведем систему уравнений (2.1) к системе уравнений в плоскости годографа скорости

$$S_u=\eta_1-u,\quad S_v=\eta_2-v$$

$$(2.2)\qquad [(\gamma-1)S-S_u^2](S_{vv}+1)+2S_uS_vS_{uv}+[(\gamma-1)S-S_v^2]\times$$

$$\times(S_{uu}+1)+(\gamma-1)S\frac{v}{S_v+v}[(S_{uu}+1)(S_{vv}+1)-S_{uv}^2]=0$$

Характеристика одномерной сферической волны разрежения определяется соотношением

$$\psi=\psi_0-\psi_{10}r+\ldots,\qquad \psi_0=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\gamma+1}{a_0}},\qquad \psi_{10}>0$$

Распределение значений функций S, S_ψ на этой характеристике имеет вид

$$S=\frac{a_0^2}{\gamma-1}-a_0r+\frac{\gamma-8}{18}r^2+\left[\frac{5}{36}\frac{\gamma+1}{a_0w_0}-\frac{(\gamma+1)^2}{1944a_0}\right]r^3+\ldots$$

$$S_\psi=\frac{1}{3}\sqrt{a_0(\gamma+1)}r^2+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\gamma+1}{a_0}}\frac{54-(\gamma+1)w_0}{54w_0}r^3+\ldots$$

На отрезке оси v, ограниченном окружностью, соответствующей детонационной волне, и представляющем собой характеристику цилиндрической волны разрежения, распределения таковы:

$$S=\frac{a_0^2}{\gamma-1}-a_0r-\frac{1}{2}r^2+\frac{\gamma+1}{6a_0w_0}r^3+\ldots,\qquad S_\psi=-\frac{2}{3w_0}\sqrt{\frac{\gamma+1}{a_0}}r^3+\ldots$$

Представим S в виде

$$S=S_0(\psi)+S_1(\psi)r+S_2(\psi)r^2+S_3(\psi)r^3+\dots$$

После подстановки этого разложения в уравнение (2.2) будем получать уравнения для определения S_0, S_1 и т. д., причем, как и в п. 1, функции S_0, S_1 суть постоянные

$$S_0=a_0{}^2/(\gamma-1),\ S_1=-a_0$$

Для функции S_2 в этом случае можно выписать точное решение

$$S_2=-{}^1/_2+a_0\psi^2/2$$

Основное уравнение для этой задачи — уравнение, определяющее функцию S_3, которое из-за его громоздкости выписывать не будем, укажем лишь переменные, в которых оно исследовалось, и асимптотические формулы в этих переменных

$$\psi_1=\sqrt{\frac{a_0}{\gamma+1}}\psi,\qquad S_3=\frac{\gamma+1}{6a_0w_0}+\frac{\gamma+1}{a_0w_0}\left(y-\frac{\psi_1{}^2}{2}-\frac{\gamma+1}{24}w_0\psi_1{}^4\right),$$

$$y=-\frac{2}{3}\psi_1+c_1\psi_1{}^{13/7}+\dots,\qquad \psi_1=0\quad(\psi=0)$$

$$y=\frac{1}{36}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}-\psi_1\right)+\left(\frac{1}{3}-\psi_1\right)^2+c_2\left(\frac{1}{3}-\psi_1\right)^{20/7}+\dots,$$

$$\psi_1=\frac{1}{3}\quad(\psi=\psi_0)$$

Здесь c_1, $c_2>0$.

Значения якобиана преобразования J в точках $\psi_1=0$, $\psi_1={}^1/_3$ равны

$$J=\lim_{\psi_1\to 0}\left(\frac{\gamma+1}{a_0w_0}\right)^2\sqrt{\frac{a_0}{\gamma+1}}\,y''r^{5/2}=+\infty,\qquad \psi_1=0$$

$$J=\lim_{\psi_1\to 1/3}\frac{(\gamma+1)^2}{2a_0{}^2w_0{}^2}\sqrt{\frac{a_0}{\gamma+1}}\,r^{5/2}>0,\qquad \psi_1=\frac{1}{3}$$

Характер изменения функции S в области η_1, η_2 определим по формулам

$$S_{\eta_1}=o(r^{1/2}),\qquad S_{\eta_2}=\frac{a_0{}^2w_0}{\gamma+1}\frac{1}{r}+\dots>0,\qquad \psi_1=0$$

$$S_{\eta_1}=-\frac{w_0}{3}\sqrt{\frac{\gamma+1}{a_0}}\,r^{1/2}+\frac{E(\psi_1)}{\sqrt{r}}=Ar^{5/14}+\dots,$$

$$S_{\eta_2}=2\frac{a_0{}^2w_0}{\gamma+1}\frac{1}{r}+\dots,\qquad \psi_1=\frac{1}{3}$$

$$E(\psi_1)=\frac{3a_0^{3/2}w_0}{\sqrt{\gamma+1}}(\psi_1y''-y'),\qquad A>0$$

В точке $\psi_1={}^1/_3$ имеет место равенство $E(\psi_1={}^1/_3)=0$, при $0\leqslant\psi_1<{}^1/_3$ $E(\psi_1)>0$, отсюда можно сделать следующий вывод.

При взаимодействии сферической и цилиндрической волн разрежения образуется центрированная волна сжатия, имеющая вблизи точки разрыва кривизны большие градиенты, т. е. возможно образование слабой ударной волны.

Поступила 11 IV 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1957.
2. *Свалов А. М.* Об условиях существования криволинейной волны детонации Чепмена — Жуге. Вестн. МГУ, Матем., механ., 1976, № 6.
3. *Левин В. А., Черный Г. Г.* Асимптотические законы поведения детонационных волн. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
4. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.