МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1978

УДК 533.69.01.533.662.013

О ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ ОКОЛО НЕСУЩЕГО КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ

Ю. Б. ЛИФШИЦ, О. С. РЫЖОВ

(Москва)

Рассматриваются несимметричные течения газа около несущего профиля со скоростями на бесконечности, близкими к звуковой. В области, находящейся на некотором расстоянии от профиля, строится асимптотическое решение задачи обтекания. Подробно анализируется зависимость членов асимптотических последовательностей от параметров, характеризующих продольный и поперечный размеры тела. Установлен закон изменения подъемной силы от разности $1-M_\infty$, которая предполагается малой. Подробно обсуждается связь теоретических результатов с данными экспериментов.

1. Пусть ось x декартовых координат x, y направлена вдоль вектора скорости набегающего потока, обтекаемое тело имеет продольный размер x_0, относительную толщину τ и расположено в начале координат. Скачки уплотнения, возникающие при трансзвуковых скоростях, начиная с некоторого расстояния от тела, имеют небольшую интенсивность. Поэтому существует область, в которой течение газа можно описать при помощи потенциала Φ возмущений относительно равномерного звукового потока вдоль оси x. Положим

$$\Phi=\varphi(x, y)+\varepsilon\varphi'(x, y) \tag{1.1}$$

Здесь независимые переменные x и y считаются безразмерными, потенциал Φ отнесен к произведению $\tau^{2/3}x_0a_*$, символом a_* обозначена критическая скорость звука.

Первое слагаемое в (1.1) представляет собой потенциал скорости около заданного тела для звукового на бесконечности потока. Второе слагаемое ответственно за изменение условий на бесконечности относительно тех, которые реализуются при звуковой скорости. В нем малый параметр ε стремится к нулю, когда это изменение становится исчезающе малым.

На больших расстояниях от тела функцию φ можно представить в виде ряда [1–4]

$$\varphi=\sum_{i\geqslant 0} y^{(2-i)/5}f_i(\xi), \qquad \xi=(\varkappa+1)^{-1/3}xy^{-4/5} \tag{1.2}$$

где $\varkappa$ — показатель адиабаты Пуассона. В той же области φ' имеет разложение [5, 6]

$$\varphi'=\sum_{i\geqslant 0} y^{(m+2-i)/5}\chi_{m,i}(\xi) \tag{1.3}$$

в котором присутствует неизвестный показатель степени m.

Будем считать, что профиль находится в безграничном равномерном потоке с $M_\infty\neq 1$. Тогда ε — функция четырех параметров: $M_\infty-1$, τ, x_0 и m, определяющих решение всей задачи, и в том числе форму поправочного члена (1.3). При $M_\infty \to 1$ течение переходит в звуковое на бесконечности, а $\varepsilon \to 0$. Выяснение вида зависимости ε от указанных параметров — необходимая часть решения (1.1). В [6] эта зависимость установлена при некоторых предположениях на основании принципа сращивания асимптотических разложений. В [7–9] она была получена из введенного Карманом преобразования подобия для трансзвуковых течений. Исходя также из преобразования подобия, дадим вывод этой зависимости, свободный от каких-либо дополнительных предположений.

Пусть потенциал Φ взят из трансзвуковой теории малых возмущений, тогда он удовлетворяет нелинейному уравнению Кармана [10]

$$(1.4)\qquad -(\varkappa+1)\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0$$

Этому же уравнению удовлетворяет главный член φ из суммы (1.1). Поправочная функция φ' является решением линейного однородного уравнения. Последнее вытекает из уравнения (1.4), если подставить в него сумму (1.1) и удержать в полученном соотношении слагаемые только первого порядка по ε. Поскольку функция φ представляет собой решение задачи обтекания фиксированного тела звуковым потоком, а поправка $\varepsilon\varphi'$ учитывает отличие числа M_∞ от единицы, линеаризованное граничное условие на поверхности $y=Y_\pm(x)$ несимметричного профиля имеет вид

$$(1.5)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y}\to\frac{\partial\varphi}{\partial y}\to\frac{dY_\pm}{dx},\qquad \varepsilon\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\to 0,\qquad y\to\pm 0$$

По тем же причинам граничное условие в бесконечно удаленных точках можно записать как

$$(1.6)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x}\to\varepsilon\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\to\frac{2}{\varkappa+1}\frac{M_\infty-1}{\tau^{2/3}}=K,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}\to 0,\qquad x^2+y^2\to\infty$$

Отсюда ясно, что φ не зависит от τ, x_0 и K, если используются безразмерные переменные. Из однородности условия непротекания (1.5) для поправки $\varepsilon\varphi'$ заключаем, что $\varepsilon=\varepsilon(K)$.

Применим теперь к декартовым координатам и потенциалу скорости преобразование подобия

$$(1.7)\qquad x\to x/x_0,\ y\to\tau^{1/3}y/x_0,\ \Phi\to\Phi/(\tau^{2/3}x_0)$$

в силу которого

$$\xi\to\xi(\tau^4x_0^3)^{-1/15}$$

Это преобразование фактически означает возвращение к исходным размерным переменным. По отношению к нему уравнение Кармана для потенциала Φ и его главного члена φ остается инвариантным. Преобразование (1.7) меняет, однако, запись условия непротекания и условия на бесконечности. Первое из упомянутых условий нужно принимать во внимание при вычислении функции φ, оно не влияет на величину $\varepsilon\varphi'$. Что касается условия (1.6), то в нем пропадает зависимость от τ.

Подвергнем преобразованию (1.7) слагаемые суммы (1.1). Для первого из них на основании формулы (1.2) находим

$$(1.8)\qquad \varphi=\sum_{i\geqslant 0}\tau^{-i/3}(\tau^4x_0^3)^{(3+i)/15}y^{(2-i)/5}f_i(\xi(\tau^4x_0^3)^{-1/15})$$

В полном соответствии с тем, что в размерных переменных в условие непротекания (1.5) входят постоянные τ и x_0, разложение (1.8) зависит от обеих названных постоянных. Однако в его главный член, определяющий асимптотические законы затухания возмущений в звуковом потоке, входит единственная комбинация $\tau^4 x_0^3$, а не каждая из постоянных по отдельности. Это обстоятельство связано со следующим групповым свойством: любое решение $g(\xi)$ обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка для функции f_0 порождает решение $C^{-3}g(C\xi)$ того же уравнения. Для преобразования (1.7) $C=(\tau^4 x_0^3)^{-1/15}$, поэтому в размерных переменных главный член φ_0 потенциала звукового на бесконечности потока приобретает вид

$$\varphi_0=(\tau^4 x_0^3)^{1/5} y^{2/5} f_0(\xi(\tau^4 x_0^3)^{-1/15}) \tag{1.9}$$

Если положить $\tau=x_0^{-3/4}$ (в этом случае $C=1$), то написанное выражение перестает зависеть от масштабных постоянных τ и x_0. Таким образом, все тела с относительной толщиной, изменяющейся по закону $\tau=x_0^{-3/4}$, возмущают в первом приближении одинаково набегающий из бесконечности звуковой поток.

Помимо комбинации $\tau^4 x_0^3$ в остальные члены в разложении (1.8) входит также относительная толщина τ. Зависимость от этого параметра весьма простая: величина $\tau^{-i/3}$ играет роль коэффициента при i-м члене.

Линейное однородное уравнение для второго слагаемого φ' из суммы (1.1) также инвариантно по отношению к преобразованию подобия (1.7). Коэффициенты этого уравнения выражаются через производные функции φ, в преобразованных переменных они зависят как от τ, так и от x_0. Это единственная причина, вследствие которой указанные параметры должны входить в поправочную функцию φ'. Действительно, условие непротекания (1.5) для нее однородно, а из граничного условия (1.6) относительная толщина τ при переходе к размерным переменным выпадает.

Чтобы вычислить i-й член поправочной функции φ', необходимо удержать ровно i членов в разложении (1.8) для φ. Уравнение для главного члена $\varphi'_{m,0}$ получается однородным

$$-(\varkappa+1)\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi'_{m,0}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}\frac{\partial\varphi'_{m,0}}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2\varphi'_{m,0}}{\partial y^2}=0 \tag{1.10}$$

причем производные $\partial\varphi_0/\partial x$ и $\partial^2\varphi_0/\partial x^2$ находятся дифференцированием выражения (1.9).

Ясно, что в результате преобразования главного члена по формулам (1.7) он должен зависеть от комбинации $\tau^4 x_0^3$, а не от каждого параметра по отдельности.

Уравнения для остальных членов $\varphi'_{m,i}$ неоднородны. Замена $\varphi'_{m,0}$ на $\varphi'_{m,i}$ в (1.10) позволяет сразу написать их левые части. Учитывая структуру ряда (1.8) для φ, легко показать, что правые части пропорциональны величинам $\tau^{-i/3}$. В силу линейности обсуждаемых уравнений заключаем, что каждый из членов $\varphi'_{m,i}$ должен содержать в качестве коэффициента $\tau^{-i/3}$.

С другой стороны, непосредственное преобразование (1.3) приводит к выражению

$$\varepsilon\varphi'=\sum_{i\geqslant 0}\tau^{-i/3}(\tau^4 x_0^3)^{(3+i-m)/15}\varepsilon\tau^{m/3}y^{(m+2-i)/5}\chi_{m,i}(\xi(\tau^4 x_0^3)^{-1/15})$$

Согласно сказанному выше главный член здесь обязан содержать лишь комбинацию $\tau^4 x_0^3$ рассматриваемых параметров. Помимо этой комбинации в остальные члены входят множители $\tau^{-i/3}$. Поэтому произведение $\varepsilon\tau^{m/3}$ не может зависеть по отдельности ни от τ, ни от x_0. Воспользовавшись тем, что $\varepsilon=\varepsilon(K)$, выводим искомое равенство

$$\varepsilon=K^{m/2} \tag{1.11}$$

Обобщая изложенные рассуждения, легко убедиться, что они остаются справедливыми и в том случае, когда потенциал Φ удовлетворяет точному уравнению безвихревых течений. Эти рассуждения опираются только на свойства разложения потенциала звукового потока на больших расстояниях от обтекаемого профиля. Но в достаточно удаленной области асимптотические разложения можно применять для построения поля скоростей у любого тела. Отсюда следует, что равенство (1.11) имеет место для произвольного (не обязательно тонкого) плоского контура.

2. В работах [6–9] решение (1.1)—(1.3) было использовано для определения картины обтекания симметричного профиля, на который действует только сила сопротивления. В них показано, что в формуле (1.3) показатель степени $m=6$ в области перед скачком уплотнения и $m=1$ позади него. Сам же скачок уплотнения имеет вид

$$x=(\varkappa+1)^{1/5}\xi_s y^{4/5}\left[1+\sum_{i\geq1}C_i y^{-i/5}+\varepsilon\sum_{i\geq0}D_{m,i}y^{(m-i)/5}\right] \tag{2.1}$$

Искомые функции $\chi_{m,i}$ удовлетворяют рекуррентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений и данным Коши в точке $\xi=\xi_s$. Последние получаются из условий Ренкина — Гюгонио на скачке уплотнения (2.1). Поэтому в них входят параметры $D_{m,i}$, задание которых полностью определяет решение.

В случае несимметричного течения около профиля коэффициенты C_i и $D_{m,i}$ могут быть различными в верхней и нижней полуплоскостях: $C_i=C_i^+$, $D_{m,i}=D_{m,i}^+$ при $y>0$ и $C_i=C_i^-$, $D_{m,i}=D_{m,i}^-$ при $y<0$. Чтобы выяснить характер возмущений, которые обусловлены изменением подъемной силы при варьировании числа M_∞, нужно установить связь между $D_{m,i}^+$ и $D_{m,i}^-$. Для этой цели проведем контрольный контур в виде замкнутого прямоугольника C, который образован отрезками прямых $x=\pm x_0$ и $y=\pm R$, причем $x_0=(\varkappa+1)^{1/5}\xi_s R^{4/5}$. Составляющие v_x и v_y вектора скорости отнесем к критической скорости a_*, а плотность ρ и давление p — к величинам ρ_* и $\rho_* a_*^2$ соответственно. В этой шкале безразмерных единиц подъемную силу F_y удобно отнести к произведению $\rho_* a_*^2 x_0$.

Интегрирование вертикальной составляющей потока импульса газа через рассматриваемый контур дает

$$F_y=F_{y0}+\varepsilon F_y'=\oint_C(\rho v_y^2+p)\,dx-\rho v_x v_y\,dy \tag{2.2}$$

Здесь следует заметить, что представление решения в форме (1.1)—(1.3) несправедливо во всем поле возмущенного течения. Оно теряет силу на расстояниях $x=O(K^{-2})$, $y=O(K^{-5/2})$ от профиля. Кроме того, его нельзя применять в области вихревого следа, где поток перестает быть потенциальным.

Решение для вихревого следа, простирающегося вдоль полуоси $x>0$, указано в [6, 9] в предположении, что профиль симметричен. Однако полученные в них выражения для параметров потока можно использовать для оценки тех возмущений, которые связаны с подъемной силой. Подстановка этих выражений в интеграл (2.2) приводит к выводу, что их вклад в величину F_y' имеет порядок $O(R^{(m-3)/5})=O(K)$ при $m=1$. Отсюда ясно, что для вычисления F_y' достаточно ограничиться потенциальной частью решения на больших расстояниях от тела.

Определим входящие в (2.2) функции через потенциал возмущений Φ, который будем считать удовлетворяющим уравнению Кармана. Используя интеграл Бернулли и ограничиваясь главными членами разложения по относительной толщине τ, находим

$$F_y=\oint_C -v_x\,dx-v_y\,dy=\tau^{2/3}\Delta\Phi=\tau^{2/3}(\Phi|_{y=+0}-\Phi|_{y=-0}) \tag{2.3}$$

Этой формулой можно пользоваться во всем диапазоне околозвуковых скоростей, она верна как при $M_\infty=1$, так и при $M_\infty\gtrless 1$. Как и в несжимаемой жидкости, подъемная сила профиля в трансзвуковом потоке пропорциональна скачку $\Delta\Phi$ потенциала при переходе через полуось $x>0$. Имеющий более высокий порядок малости по τ, но отличный от нуля вклад в подъемную силу дают нелинейные члены из интеграла (2.2). Происхождение дополнительного «волнового» слагаемого проще всего понять, если заметить, что уравнение Кармана, будучи умноженным на $\partial\Phi/\partial y$, приводится к дивергентному виду и выражает, таким образом, закон сохранения поперечной составляющей импульса газа.

Действительно, из уравнения (1.4) следует:

$$-(\varkappa+1)\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\varkappa+1}{3}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^3+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right]=0$$

Поэтому учет нелинейных членов в интеграле (2.2) дает

$$F_y=\tau^{2/3}\Delta\Phi+\frac{1}{2}\tau^2\oint_C\left[\frac{\varkappa+1}{3}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^3+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right]dx+$$
$$+(\varkappa+1)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy$$

Подстановка сюда разложений (1.2) и (1.3) показывает, что члены порядка τ^2 содержат не зависящее от R слагаемое, когда $M_\infty\neq 1$. Аналогичное слагаемое возникает, если в области за скачком уплотнения дополнить представление (1.1) для потенциала Φ еще одним членом

$$\varepsilon^2\varphi''=\varepsilon^2\sum_{i\geqslant 0}y^{(n+2-i)/5}\chi_{n,i}(\xi)$$

с показателем степени $n=2$. Оба названных слагаемых пропорциональны ε^2.

Наличие закона сохранения влечет за собой существование первого интеграла [11] обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, которому удовлетворяет функция $\chi_{2,0}$

$$\left(f_0-2\xi\frac{df_0}{d\xi}\right)\left(\frac{df_0}{d\xi}-\frac{16}{25}\xi^2\right)\frac{d\chi_{2,0}}{d\xi}+\left[\frac{16}{25}\xi\left(f_0-2\xi\frac{df_0}{d\xi}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{df_0}{d\xi}\right)^2\right]\chi_{2,0}+\frac{9}{25}\xi\chi_{1,0}^2+\frac{3}{2}\left(\frac{df_0}{d\xi}-\frac{16}{25}\xi^2\right)\chi_{1,0}\frac{d\chi_{1,0}}{d\xi}+$$
$$+\frac{1}{2}\left[f_0-2\xi\frac{df_0}{d\xi}-2\xi\left(\frac{df_0}{d\xi}-\frac{16}{25}\xi^2\right)\right]\left(\frac{d\chi_{1,0}}{d\xi}\right)^2=0$$

В дальнейшем подсчет подъемной силы будет основываться на формуле (2.3), а вклад в нее порядка τ^2 — полагаться пренебрежимо малым.

При $\xi\to+\infty$, т. е. в окрестности полуоси $x>0$, для функций $\chi_{m,i}$ справедливо представление [6]

$$(2.4)\qquad \chi_{m,i}\to B^{s}_{m,i}\xi^{(m+2-i)/4}+B^{a}_{m,i}\xi^{-(3+i-m)/4}+X_{m,i}(\xi)$$

Здесь постоянные $B^{s}_{m,i}$ и $B^{a}_{m,i}$ определяются через коэффициенты $C_j^{\pm}$ и $D^{\pm}_{mj}$ с $j=0, 1, \ldots, i$.

Подразумеваемые под $X_{m,i}$ асимптотики обусловлены правыми частями уравнений в частных производных для $\varphi'_{m,i}$, которые, как упоминалось выше, неоднородны при $i=1, 2, \ldots$ Для дальнейшего существенно, что $X_{m,0}=0$, а $X_{m,i}=O(\xi^{-(8+i-m)/4})$. Отметим еще, что в выражения для $X_{m,i}$ входят коэффициенты $C_j^{\pm}$ и $D^{\pm}_{m,j}$ с $j=0, 1, \ldots, i-1$.

Учитывая соотношение (2.4), подставим ряды (1.2) и (1.3) для потенциала φ и поправочной функции φ' в формулу (2.3) и будем считать, что во втором из них показатель степени $m=1$. Если символ Δ наделен прежним смыслом, то главный член в выражении для поправки к подъемной силе

$$(2.5)\qquad F_y'=\tau^{2/3}\sum_{i\geqslant 0}\xi_s^{(3-i)/4}R^{(3-i)/5}\Delta B^{s}_{1,i}$$

Разумеется, эта поправка должна оставаться конечной при увеличении линейного размера R контрольного контура C. Отсюда вытекает требование, чтобы коэффициенты при $R^{3/5}$, $R^{2/5}$ и $R^{1/5}$ в (2.5) обращались тождественно в нуль, т. е.

$$(2.6)\qquad B^{s+}_{1,i}=B^{s-}_{1,i},\qquad i=0, 1, 2$$

Установим связи, которые налагает последнее равенство на постоянные $D^{+}_{1,i}$ и $D^{-}_{1,i}$.

Начнем с замечания, что постоянные $B^{s}_{1,i}$ и $D_{1,i}$ пропорциональны. Обозначив коэффициент пропорциональности посредством $k_{1,0}$, пишем $B^{s}_{1,0}=k_{1,0}D_{1,0}$. Подстановка этого равенства в (2.6) дает $D^{+}_{1,0}=D^{-}_{1,0}$, т. е. при $M_\infty\neq1$ вид первого члена разложения поправочного потенциала φ' один и тот же как при симметричном, так и при несимметричном обтекании профиля.

Следующую постоянную $B^{s}_{1,1}$ можно представить в виде суммы $B^{s}_{1,1}=k^{(1)}_{1,1}D_{1,1}+k^{(2)}_{1,2}C_1D_{1,0}$. Как известно [3], для звукового на бесконечности потока $C_1^{+}=C_1^{-}$, а по доказанному выше $D^{+}_{1,0}=D^{-}_{1,0}$. С учетом этих свойств соотношение (2.6) ведет к равенству $D^{+}_{1,1}=D^{-}_{1,1}$. Форма второго члена в φ' также не зависит от того, обтекается ли несущий профиль или поле скоростей вокруг него симметрично.

Наконец, для последней $B^{s}_{1,2}$ из рассматриваемых постоянных справедливо представление

$$B^{s}_{1,2}=k^{(1)}_{1,2}D_{1,2}+k^{(2)}_{1,2}C_1D_{1,1}+k^{(3)}_{1,2}C_2D_{1,0}+k^{(4)}_{1,2}C_1^2D_{1,0}$$

в котором $C_2^{+}\neq C_2^{-}$ для тела, создающего подъемную силу [3].

Принимая во внимание, что коэффициенты C_1, $D_{1,0}$ и $D_{1,1}$ сохраняют свои значения при переходе из верхней полуплоскости в нижнюю, при помощи соотношения (2.6) заключаем

$$D_{1,2}^{+}=D_{1,2}^{-}+l_{1,2}D_{1,0}(C_2^{+}-C_2^{-}),\qquad l_{1,2}=-k_{1,2}^{(3)}/k_{1,2}^{(1)} \tag{2.7}$$

Если при $M_\infty=1$ профиль несущий, то последнее слагаемое в правой части (2.7) отлично от нуля. Для такого профиля третий член поправочного потенциала φ' получается несимметричным, когда $M_\infty\neq1$. Несмотря на несимметричность индуцируемого этим членом поля скоростей, он не вносит никакого вклада в подъемную силу тела. Изменение подъемной силы при варьировании числа M_∞ задается функцией $\chi_{1,3}$, а обусловленное ею слагаемое в формуле (2.5) для F_y' не содержит линейного размера R и остается конечным при увеличении длины сторон контрольного контура C.

В построенном решении поправочный потенциал $\varepsilon\varphi'$ отличен от нуля только в областях, расположенных позади скачков уплотнения на верхней и нижней сторонах профиля, здесь он пропорционален $K^{1/2}$. Перед ударными фронтами, где $\varepsilon\varphi\sim K^3$, справедлив закон стабилизации газовых параметров, как это имеет место в случае симметричного поля скоростей [7, 9]. При варьировании числа M_∞ изменение как сопротивления, так и подъемной силы определяется значениями потенциала за скачками уплотнения. Поэтому каждая из сторон профиля будет давать вклады в главные члены разложения для F_x' и F_y', которые пропорциональны $K^{1/2}\sim\sim|1-M_\infty|^{1/2}$. Если учесть еще вторую поправочную функцию φ'', то она приведет к возникновению в F_x' и F_y' слагаемых порядка $K\sim1-M_\infty$.

В заключение рассмотрим вопрос о различных режимах течения около тела, когда изменение его аэродинамических характеристик диктуется указанными выше причинами. Ввиду пренебрежения вязкостью и теплопроводностью газа при любом M_∞ обтекание профиля следует считать безотрывным. Заметим, что при $y\to\pm0$ пользоваться асимптотическими рядами (1.3) и (1.4) нельзя. Будем предполагать, однако, что распределение давления вдоль контура тела изменяется при варьировании M_∞ так же, как и вдали от него.

Существуют четыре значения числа Маха, при достижении которых по мере увеличения скорости набегающего потока происходят качественные изменения в полях газовых параметров. При $M_\infty=M_1$ на верхней стороне профиля впервые достигается местная скорость звука, в то время как на нижней стороне течение остается дозвуковым. Когда $M_\infty=M_2$, точка с критической скоростью появляется и на нижней стороне тела. При $M_\infty=M_3$ скачок уплотнения, движущийся вдоль верхней стороны, достигает задней кромки. Число $M_\infty=M_4$ характеризуется тем, что скачок уплотнения на нижней стороне также приходит в заднюю кромку. Для несущего профиля, установленного под положительным углом атаки к направлению набегающего потока, справедливы неравенства $M_1<M_2<M_4$, $M_1<<M_3<M_4$ [12, 13].

Ниже будет предполагаться, что $M_2<M_3$. Аналогично можно изучить закономерности, характеризующиеся обратным неравенством ($M_3<M_2$).

При $0<M_\infty<M_1$ сопротивление профиля в идеальном (лишенном вязкости и теплопроводности) газе равно нулю, а подъемная сила согласно правилу Прандтля — Глауэрта растет пропорционально $(1-M_\infty^2)^{-1/2}$. Собственно трансзвуковое обтекание реализуется при $M_1<M_\infty$. Пока $M_1<<M_\infty<M_2$, ударный фронт, который замыкает зону местных сверхзвуковых скоростей на верхней поверхности тела, сдвигается на расстояние порядка $(1-M^2)^{1/2}$, что приводит к эквивалентному изменению его сопро-

тивления по сравнению с сопротивлением при $M_\infty=1$. Подъемную силу профиля создает разность давлений, приложенных к верхней и нижней поверхностям. С ростом M_∞ вклад в поправку $\varepsilon F_y'$ от интегрирования $p-p_\infty$ по верхней поверхности увеличивается пропорционально $(1-M_\infty^2)^{1/2}$; интеграл от $p-p_\infty$, взятый по нижней поверхности, растет в соответствии с правилом Прандтля — Глауэрта как $(1-M_\infty^2)^{-1/2}$. Поэтому общая величина подъемной силы изменяется по более сложному закону, чем каждый из членов разности.

При $M_2<M_\infty<M_3$ приращение абсциссы скачка уплотнения, который замыкает появляющуюся на нижней поверхности местную сверхзвуковую зону, увеличивается как $(1-M_\infty^2)^{1/2}$. Поправки $\varepsilon F_x'$ и $\varepsilon F_y'$ к сопротивлению тела и его подъемной силе растут пропорционально $(1-M_\infty^2)^{1/2}$.

Когда $M_3<M_\infty<M_4$, вдоль всей верхней поверхности действует закон стабилизации с показателем $m=6$ в разложении (1.3) для добавочного потенциала φ'. Сопротивление профиля продолжает увеличиваться за счет вклада от нижней поверхности. Подъемная сила изменяется как $(1-M_\infty^2)^{1/2}$ по сравнению с реализующейся при $M_\infty=1$.

При $M_4<M_\infty$ закону стабилизации подчиняются распределения давлений уже по обеим сторонам профиля. Изменения поправок $\varepsilon F_x'$ и $\varepsilon F_y'$ имеют порядок $(1-M_\infty^2)^3$, т. е. аэродинамические характеристики профиля чрезвычайно слабо зависят от числа Маха набегающего потока.

Изложенные результаты фактически повторяют обычное объяснение того изменения силовых воздействий на тело с ростом M_∞, которое связано с наблюдаемым на опытах движением скачков уплотнения по верхней и нижней сторонам обтекаемой поверхности [12, 13]. Вместе с тем проведенный анализ позволяет дать количественную формулировку для зависимостей аэродинамических характеристик от числа M_∞, основанную на свойствах асимптотических разложений возмущенного потенциала скорости по разности $1-M_\infty$ в различных областях потока.

3. Выясним теперь, как вязкость и теплопроводность реального газа изменяют установленные выше законы идеального обтекания профиля трансзвуковым потоком. Пусть эффекты диссипации в среде пренебрежимо малы, но течение реализуется около тела, трансформированного на толщину вытеснения. Новый профиль представляет собой полутело, толщина которого при $x\to\infty$ равна $H(M_\infty)$. Ясно, что сопротивление трения пропорционально H.

Потенциал возмущений трансзвукового течения в рассматриваемом случае можно представить в виде суммы трех членов

$$\Phi=\varphi(x, y)+\varepsilon\varphi'(x, y)+\delta\varphi''(x, y) \tag{3.1}$$

Первое слагаемое в ней является потенциалом звукового на бесконечности потока около полутела. Согласно [4] на больших расстояниях φ представляется по-прежнему в виде ряда (1.2). Второе слагаемое $\varepsilon\varphi'$ на тех же расстояниях имеет разложение (1.3). Наконец, последнее слагаемое $\delta\varphi''$ в этой сумме ответственно за изменение формы полутела при $M_\infty\neq1$. В нем малый параметр $\delta=\delta(\varepsilon)$, причем $\delta\to0$ при $M_\infty\to1$ и $\varepsilon\to0$.

Величину $\varphi+\delta\varphi''$ в формуле (3.1) можно понимать как потенциал потока с критической скоростью на бесконечности, который реализуется около полутела, соответствующего заданому числу Маха $M_\infty\neq1$. Поэтому φ'' удовлетворяет такому же линейному однородному уравнению, что и φ', отличному от нуля граничному условию при $y\to\pm0$ и дополнительному условию $\partial\varphi''/\partial x\to0$ при $x^2+y^2\to\infty$. Как ясно отсюда, φ'' разлагается в ряд (1.3) с $m=0$. Если же полутела, получающиеся при $M_\infty=1$ и $M_\infty\neq1$, имеют одинаковую форму в минимальной области влияния, то в указанном ряде для φ'' первый член будет отсутствовать.

При обтекании профиля влияние вязкости может оказаться несущественным, тогда $\delta \ll \varepsilon$. В этом случае все установленные выше закономерности остаются в первом приближении справедливыми даже при учете диссипативных эффектов.

Выше уже отмечалось, что при увеличении числа Маха набегающего потока сопротивление тела возрастает, а скачки уплотнения перемещаются по направлению к задней кромке. При таких условиях, которые наблюдались в многочисленных опытах [12, 13], противоположное неравенство $\delta \gg \varepsilon$ не может иметь места. Действительно, пренебрегая вторым слагаемым в правой части равенства (3.1), получим потенциал звуковых течений около полутел различной толщины. Для них характерна другая зависимость между сопротивлением и положением скачков. Как следует из работы [4], при увеличении толщины полутела, т. е. его сопротивления, скачки уплотнения смещаются вверх по потоку.

Рассмотрим, наконец, случай $\delta = \varepsilon$. Влияние вязкости на суммарные аэродинамические характеристики профиля имеет тогда тот же порядок, что и изменение числа Маха набегающего потока. Однако вклады в их величину второго и третьего слагаемых из суммы (3.1) противоположны по знаку. Вероятно, этим объясняется, почему рост сопротивления с увеличением M_∞, полученный в расчете обтекания профиля невязким газом, оказался больше измеренного экспериментальным путем [14].

Поступила 20 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Франкль Ф. И.* Исследования по теории крыла бесконечного размаха, движущегося со скоростью звука. Докл. АН СССР, 1947, т. 57, № 7.
2. *Euvrard D.* Étude asymptotique de l'écoulement à grande distance d'un obstacle se déplaçant à la vitesse du son. I. Écoulement plan, en amont des ondes de choc. J. Mécan., 1967, vol. 6, No. 4.
3. *Euvrard D.* Étude asymptotique de l'écoulement à grande distance d'un obstacle se déplaçant à la vitesse du son. II. Écoulement plan, en aval des ondes de choc. J. Mécan., 1968, vol. 7, No. 1.
4. *Лифшиц Ю. Б., Рыжов О. С.* Об обтекании полутел звуковым потоком идеального газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1969, т. 9, № 2.
5. *Диесперов В. Н., Рыжов О. С.* Об обтекании конечных тел равномерным потоком в околозвуковом диапазоне скоростей. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 1.
6. *Диесперов В. Н., Лифшиц Ю. Б.* О структуре течения в области за ударной волной при трансзвуковом обтекании профиля. Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 3.
7. *Диесперов В. Н., Лифшиц Ю. Б., Рыжов О. С.* Об обосновании закона стабилизации для крыловых профилей. Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 5.
8. *Рыжов О. С.* О зависимости сопротивления тел от числа Маха набегающего потока в трансзвуковом диапазоне скоростей. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 3.
9. *Diesperov V. N., Lifshitz Yu. B., Ryzhov O. S.* Stabilization law and drag in transonic range of velocities. Symposium Transsonicum 2, Gettingen, 1976. Berlin — Heidelberg — New York, Springer, 1976.
10. *Von Kármán Th.* The similarity law of transonic flow. J. Math. and Phys., 1947, vol. 26, No. 3.
11. *Рыжов О. С., Терентьев Е. Д.* О применении законов сохранения к решению задач газовой динамики при помощи асимптотических методов. В сб. «Аэромеханика и газовая динамика». М., «Наука», 1976.
12. *Holder D. W., Cash R. F.* Experiments with two-dimensional aerofoil designed to be free from turbulent boundary-layer separation at small angles of incidence for all Mach numbers. Aeronaut. Res. Council. Repts. and Mem., 1959, No. 3100.
13. *Holder D. W.* The transonic flow past two-dimensional aerofoils. J. Roy. Aeronaut. Soc., 1964, vol. 68, No. 644.
14. *Murman E. M., Cole J. D.* Inviscid drag at transonic speeds. AIAA paper, 1974, No. 540.