**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1977**

УДК 533.6.011.5

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА В ТЕОРИИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

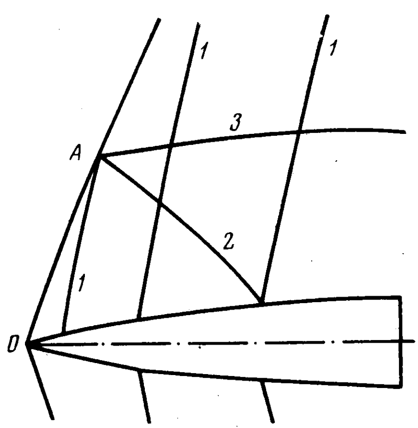
В. И. ВАСИЛЬЧЕНКО, С. И. КУСАКИН

(Москва)

В настоящее время метод малого параметра широко применяется при решении многих задач аэродинамики. Он позволил получить результаты, интересные с практической точки зрения. В частности, решена задача, в которой рассмотрено существенно трехмерное поле течения около крыла конечного размаха, обтекаемого сверхзвуковым потоком газа [1]. Однако в задаче об обтекании тел вращения применение метода наталкивается на определенные трудности. В настоящей работе в рамках теории малых возмущений рассмотрен способ получения решения, в котором этих трудностей можно избежать. При этом получаются простые аналитические выражения для аэродинамических характеристик тел вращения, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. Приведено сравнение результатов с экспериментальными данными и расчетами, проведенными по методу характеристик.

1. Постановка задачи об обтекании тела вращения сверхзвуковым потоком газа. Осесимметричное обтекание тела вращения сверхзвуковым потоком газа описывается системой уравнений гиперболического типа. При формулировке задачи нужно иметь в виду, что эта система имеет три семейства характеристик: характеристики первого и второго семейств и линии тока (линии *1—3* на фиг. 1).

Пусть заданы набегающий поток и положение скачка уплотнения. При этом задача формулируется таким образом: по заданным значениям газодинамических величин на поверхности сильного разрыва определить поле течения в области, ограниченной скачком уплотнения, характеристикой первого семейства и линией тока [2].



Фиг. 1

В линейной теории задача ставится по-другому. Волновое уравнение для определения потенциала в первом приближении имеет два семейства особых линий, совпадающих с невозмущенными характеристиками. Решение строится от тела, на поверхности которого должно выполняться условие непротекания, до характеристики первого семейства, разделяющей невозмущенную и возмущенную области потока. В таком виде задача формулируется после линеаризации уравнений и граничных условий.

Если же метод малого параметра применить к точно сформулированной выше нелинейной задаче, то ее постановка в каждом приближении должна сохраняться. Это значит, что поле течения определяется вплоть до заданной поверхности сильного разрыва, а возмущенные скорости не равны нулю в области между конусом Маха и скачком, как это имеет место в линейной теории. Следовательно, необходимо более точно по сравнению с линейной теорией решать уравнение для потенциала вблизи скачка уплотнения.

Чтобы постановка задачи сохранялась, при линеаризации не должны искажаться особые линии, ограничивающие область, в которой задача ставится. Для этого рассмотрим систему уравнений, записанную вдоль границ этой области, т. е. систему уравнений в характеристической нормальной форме. В переменных μ и ν, постоянных соответственно вдоль характеристик первого семейства и линий тока, эта система имеет вид

$$v_x\frac{\partial r}{\partial\mu}-v_r\frac{\partial x}{\partial\mu}=0,\qquad \frac{\partial r}{\partial\nu}-\lambda\frac{\partial x}{\partial\nu}=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial\mu}-\frac{\varkappa p}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\mu}=0$$

$$\rho v_x\frac{\partial v_x}{\partial\mu}+\rho v_r\frac{\partial v_r}{\partial\mu}+\frac{\partial p}{\partial\mu}=0$$

$$\rho v_r\frac{\partial v_x}{\partial\nu}-\rho v_x\frac{\partial v_r}{\partial\nu}+\frac{v_x+\lambda v_r}{v_r-\lambda v_x}\frac{\partial p}{\partial\nu}+(v_r-\lambda v_x)\frac{v_r}{r}\frac{\partial x}{\partial\nu}=0$$

$$\rho(v_r-\lambda v_x)\frac{\partial x}{\partial\nu}\frac{\partial v_r}{\partial\mu}+\frac{\partial x}{\partial\nu}\frac{\partial p}{\partial\mu}-\frac{\partial x}{\partial\mu}\frac{\partial p}{\partial\nu}=0$$

$$\lambda,\lambda'=(v_xv_r\pm a\sqrt{v_x^2+v_r^2-a^2})/(v_x^2-a^2)$$

(a — скорость звука, λ и λ' — тангенсы углов наклона к оси x соответственно характеристик первого и второго семейств).

Исключая p и ρ с помощью соотношений

$$p=\left(\frac{a^2}{\varkappa\theta}\right)^{\varkappa/(\varkappa-1)},\qquad \rho=\left(\frac{a^2}{\varkappa\theta^\varkappa}\right)^{1/(\varkappa-1)},\qquad \theta^\varkappa=\frac{p}{\rho^\varkappa}$$

($\varkappa$ — отношение удельных теплоемкостей) и полагая $\theta=\text{const}$, получим

$$\frac{\partial r}{\partial\nu}-\lambda\frac{\partial x}{\partial\nu}=0,\qquad \frac{\partial r}{\partial\mu}-\frac{v_r}{v_x}\frac{\partial x}{\partial\mu}=0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial\nu}+\lambda'\frac{\partial v_r}{\partial\nu}=a^2\frac{v_r}{r(v_x^2-a^2)}\frac{\partial x}{\partial\nu}\tag{1.1}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\nu}-\frac{\partial v_x}{\partial\nu}\frac{\partial x}{\partial\mu}+\frac{\partial v_r}{\partial\mu}\frac{\partial_r}{\partial\nu}-\frac{\partial v_r}{\partial\nu}\frac{\partial r}{\partial\mu}=0$$

2. Применение метода малого параметра к точно сформулированной нелинейной задаче. Проведем линеаризацию данной системы уравнений, считая, что течение слабо отличается от невозмущенного. Ограничиваясь первым приближением и вводя потенциал скоростей Φ, решение запишем в виде

$$\Phi=v_\infty(x+\varphi_1+\cdots),\quad x=x_0+x_1+\cdots,\quad r=r_0+r_1+\cdots$$

Видно, что при линеаризации системы уравнений в характеристической нормальной форме необходимо представлять в виде ряда по малому параметру не только потенциал, но и координаты. При этом деформации координат определяются однозначным образом из уравнений для особых линий. В частности, нужно уточнять положение характеристик первого семейства, что соответствует постулату Уитема [3].

Следует иметь в виду, что при формальной линеаризации системы уравнений (1.1), т. е. в том случае, когда в линеаризованных уравнениях сохраняются только члены одного и того же порядка малости, наклоны невозмущенной и возмущенной характеристик в первом приближении совпадают, а граничные условия сносятся со скачка уплотнения на характеристику невозмущенного потока. Это приводит к тому, что постановка задачи в первом приближении нарушается, так как скачок в результате линеаризации «исчезает». Рассмотрим, как нужно применять метод малого параметра, чтобы постановка задачи в каждом приближении сохранялась.

Задача построения поля скоростей по известным значениям газодинамических величин на поверхности сильного разрыва формулируется в области, ограниченной скачком уплотнения, характеристикой первого семейства и поверхностью тела (фиг. 1). Поэтому, чтобы область существования решения при линеаризации не искажалась, будем при определении наклонов характеристик учитывать и члены следующего порядка малости:

$$\lambda = \frac{1}{\beta_\infty} + \frac{M_\infty^2}{\beta_\infty^2}\varphi_{1r_0} - \left[\frac{(\varkappa+1)M_\infty^4}{2\beta_\infty^3} - \frac{M_\infty^2}{\beta_\infty}\right]\varphi_{1x_0} + \ldots,$$

$$\frac{v_r}{v_x} = \varphi_{1r_0} + \ldots, \qquad \beta_\infty = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$$

Получаем следующую систему уравнений в первом приближении:

$$\frac{\partial r_0}{\partial \nu} - \left\{\frac{1}{\beta_\infty} + \frac{M_\infty^2}{\beta_\infty^2}\varphi_{1r_0} - \left[\frac{(\varkappa+1)M_\infty^4}{2\beta_\infty^3} - \frac{M_\infty^2}{\beta_\infty}\right]\varphi_{1x_0}\right\}\frac{\partial x_0}{\partial \nu} = 0$$

$$\frac{\partial r_0}{\partial \mu} - \varphi_{1r_0}\frac{\partial x_0}{\partial \mu} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \varphi_{1x_0}}{\partial \nu} - \frac{1}{\beta_\infty}\frac{\partial \varphi_{1r_0}}{\partial \nu} = \frac{\varphi_{1r_0}}{\beta_\infty^2 r_0}\frac{\partial x_0}{\partial \nu}$$

$$\frac{\partial \varphi_{1x_0}}{\partial \mu}\frac{\partial x_0}{\partial \nu} - \frac{\partial \varphi_{1x_0}}{\partial \nu}\frac{\partial x_0}{\partial \mu} + \frac{\partial \varphi_{1r_0}}{\partial \mu}\frac{\partial r_0}{\partial \nu} - \frac{\partial \varphi_{1r_0}}{\partial \nu}\frac{\partial r_0}{\partial \mu} = 0$$

Из последних двух уравнений имеем

$$\varphi_{1x_0x_0} + \left(\frac{r_{0\nu}}{x_{0\nu}} - \frac{1}{\beta_\infty}\right)\varphi_{1x_0r_0} - \frac{r_{0\nu}}{x_{0\nu}}\frac{1}{\beta_\infty}\varphi_{1r_0r_0} - \frac{1}{\beta_\infty^2}\frac{\varphi_{1r_0}}{r_0} = 0$$

Таким образом, уточнение наклона характеристик приводит к нелинейному уравнению для потенциала в первом приближении

$$\beta_\infty^2\varphi_{1x_0x_0} + \left\{M_\infty^2\varphi_{1r_0} - \left[\frac{(\varkappa+1)M_\infty^4}{2\beta_\infty} - M_\infty^2\beta_\infty\right]\varphi_{1x_0}\right\}\varphi_{1x_0r_0} -$$

$$- \left\{1 + \frac{M_\infty^2}{\beta_\infty}\varphi_{1r_0} - \left[\frac{(\varkappa+1)M_\infty^4}{2\beta_\infty^2} - M_\infty^2\right]\varphi_{1x_0}\right\}\varphi_{1r_0r_0} - \frac{\varphi_{1r_0}}{r_0} = 0$$

Далее, чтобы удовлетворить граничным условиям на скачке, это уравнение можно решать приближенно, тщательно исследуя только область вблизи поверхности сильного разрыва. Именно в этой области линейная теория имеет особенность.

Решением уравнения вблизи границы, разделяющей возмущенную и невозмущенную части течения, является потенциал сверхзвуковых источников, который в отличие от линейного решения записан в деформированных координатах и вместо величины β_∞^{-1} содержит тангенс угла наклона возмущенной характеристики на скачке λ

$$\varphi_1=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{x_0-\eta_0}\frac{f_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x_0-\xi)^2-\eta_0^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2\eta_0}}F_1'+\frac{1}{8\eta_0\sqrt{2\eta_0}}F_1+\ldots$$

$$F_1(q_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{q_0}f_1(\xi)\sqrt{q_0-\xi}\,d\xi,\qquad q_0=x_0-\eta_0,\qquad \eta_0=\frac{r_0}{\lambda}$$

Найденное решение учитывает разворот потока на поверхности сильного разрыва и позволяет определить поле течения вплоть до границы области возмущений. Кроме того, даже в области за конусом Маха найденное решение более точно удовлетворяет уравнению, чем линейное.

Действительно, оценим точность первого приближения, для чего в уравнение

$$(a^2-\Phi_x^2)\Phi_{xx}+(a^2-\Phi_r^2)\Phi_{rr}-2\Phi_x\Phi_r\Phi_{xr}+\frac{a^2}{r}\Phi_r=0$$

подставим $\Phi=v_\infty(x+\varphi_1+\Delta\varphi)$ и найдем порядок величины $\Delta\varphi$. Этот добавочный потенциал удовлетворяет следующему уравнению:

$$\beta_\infty^2\Delta\varphi_{xx}-\Delta\varphi_{rr}-\frac{1}{r}\Delta\varphi_r=-[\beta_\infty^2+(\varkappa+1)M_\infty^2\varphi_{1x}]\varphi_{1xx}+$$
$$+[1-(\varkappa-1)M_\infty^2\varphi_{1x}]\varphi_{1rr}-2M_\infty^2\varphi_{1r}\varphi_{1xr}+$$
$$+\frac{1}{r}[1-(\varkappa-1)M_\infty^2\varphi_{1x}]\varphi_{1r}+\ldots$$

Здесь опущены члены порядка кубов скоростей и произведений квадратов скоростей на вторые производные потенциала ($F_1''^3$ и $F_1''^2F_1'''$). Подставляя найденное решение в правую часть уравнения и учитывая, что

$$\lambda=\frac{1}{\beta_\infty}+\frac{M_\infty^2}{\beta_\infty^2}\varphi_{1r}-\left[\frac{(\varkappa+1)M_\infty^4}{2\beta_\infty^3}-\frac{M_\infty^2}{\beta_\infty}\right]\varphi_{1x}+\ldots$$
$$\ldots=\frac{1}{\beta_\infty}+\frac{(\varkappa+1)M_\infty^4}{2\beta_\infty^3\sqrt{2\beta_\infty r}}F_1''+\ldots$$

получим

$$\Delta\varphi_r\sim O(F_1',F_1''^2,F_1'F_1''')+O(F_1''^3,F_1''^2F_1''')\sim F_1'F_1'''$$

Таким образом, $\Delta\varphi\sim F_1'F_1''\ll\varphi_1$, т. е. имеет порядок членов, учитываемых во втором приближении.

Чтобы оценить точность линейной теории, в правую часть уравнения подставим линейное решение

$$\varphi_1=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{x-\beta_\infty r}\frac{f_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-\beta_\infty^2r^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2\beta_\infty r}}F_1'+$$
$$+\frac{1}{8\beta_\infty r}\frac{1}{\sqrt{2\beta_\infty r}}F_1+\ldots$$

$$F_1=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{x-\beta_\infty r}f_1(\xi)\sqrt{x-\beta_\infty r-\xi}\,d\xi$$

В результате получим

$$\Delta\varphi_r \sim O(F_1', F_1''F_1''') + O(F_1''^2, F_1''^2F_1''') \sim F_1''F_1'''$$

Следовательно, $\Delta\varphi \sim F_1'F_1''' \sim \varphi_1$, т. е. имеет порядок членов, рассматриваемых при решении задачи в первом приближении. В задаче об обтекании конуса $F_1 \sim \varepsilon^{12}$, $q_0 \sim \varepsilon^4$. Таким образом, в линейной теории $\varphi_1 \sim \varepsilon^8$, $\Delta\varphi \sim \sim \varepsilon^8$, в то время как для найденного решения $\Delta\varphi \sim \varepsilon^{12}$.

Рассмотрим теперь граничные условия на скачке уплотнения $r=r_*(x)$: $x=\nu$, $r=r_*(\nu)$

$$\varphi_x = -\frac{2(\beta_\infty^2 r_*'^2-1)}{(\varkappa+1)M_\infty^2(1+r_*'^2)}, \quad \varphi_r = \frac{2(\beta_\infty^2 r_*'^2-1)}{(\varkappa+1)M_\infty^2(1+r_*'^2)r_*'}$$

Проведем их линеаризацию, принимая за параметр малости величину $\delta=\lambda-r_*'$. При этом $\beta_\infty^{-1}=\lambda-2\delta$. В результате линеаризации получим

$$\varphi_x = -\frac{4\delta\lambda}{(\varkappa+1)(1+\lambda^2)^2}+\ldots, \quad \varphi_r = \frac{4\delta}{(\varkappa+1)(1+\lambda^2)^2}+\ldots$$

После удовлетворения граничным условиям на поверхности сильного разрыва придем к следующему уравнению:

$$F_1'' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{q_0}\frac{f_1'(\xi)\,d\xi}{\sqrt{q_0-\xi}} = \frac{4\delta\sqrt{2\lambda r_*}}{(\varkappa+1)(1+\lambda^2)^2}$$

Для определения входящей в это уравнение неизвестной величины q_0 необходимо построить ряды пространственных деформаций. Интегрируя первое уравнение системы (2.1), имеем

$$x=\beta_\infty r_* - \frac{(\varkappa+1)(1+\lambda^2)^2}{2\lambda^2}\sqrt{\frac{2r_*}{\lambda}}\,F_1''+q_0+\ldots$$

С другой стороны, так как $r_*'=\beta_\infty^{-1}+\delta$, то $x=\beta_\infty r_*+(\nu/\lambda)l_1+\cdots$, где l_1 удовлетворяет соотношению $\delta=-(\nu l_1)'$. Отсюда найдем $q_0=-\frac{\nu}{\lambda}[4(\nu l_1)'-$ $-l_1]$.

Это позволяет получить следующее интегральное уравнение для определения интенсивности источников

$$\int_0^{q_0}\frac{f_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{q_0-\xi}} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{(\varkappa+1)}\frac{1}{(1+\lambda^2)^2}\nu^{1/2}(\nu l_1'+l_1)^2$$

По заданному положению скачка уплотнения (или известной функции l_1) можно построить поле течения вплоть до поверхности обтекаемого тела. В этой области полученное решение

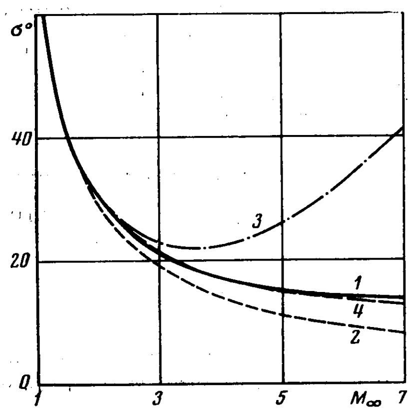
$$\varphi_1 = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{x_0-\eta_0}\frac{f_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x_0-\xi)^2-\eta_0^2}}$$

удовлетворяет уравнению для потенциала с той же точностью, что и линейное, так как наклон возмущенной характеристики на скачке λ отличается от β_∞^{-1} на величину, которая в линейной теории отбрасывается. Однако это отличие, как было показано выше, существенно вблизи поверхности сильного разрыва.

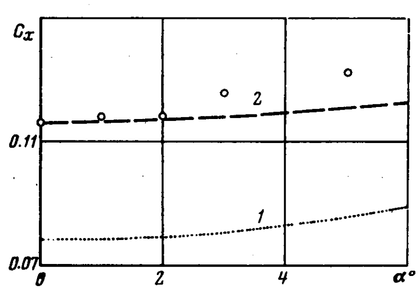
Так как вблизи тела

$$\varphi_1 = -\frac{f_1(x_0)}{2\pi}\ln\frac{2\lambda}{r_0} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{x_0} f_1'(\xi)\ln(x_0-\xi)\,d\xi + \ldots$$

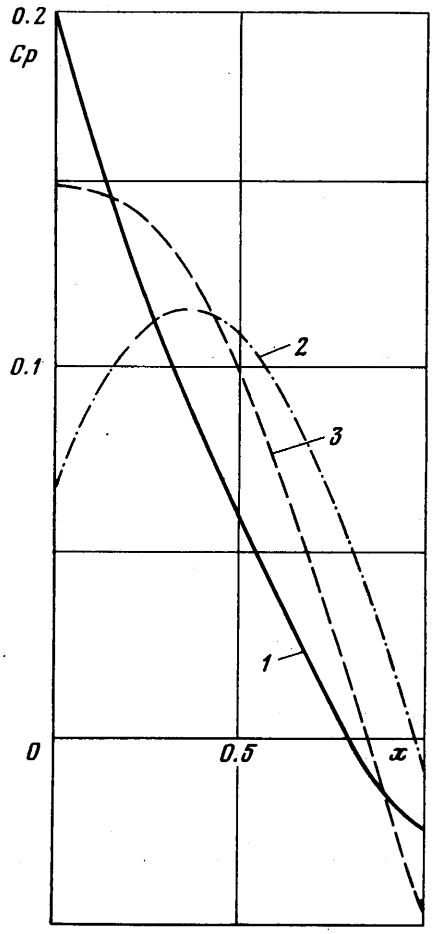
то из условия непротекания на его поверхности найдем, что $f_1(x)=S'(x)$, где $S(x)$ — площадь поперечного сечения тела вращения.



Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 3

Таким образом, установлено соотношение между положением скачка и формой обтекаемого тела. Для тел вращения степенной формы это соотношение имеет вид

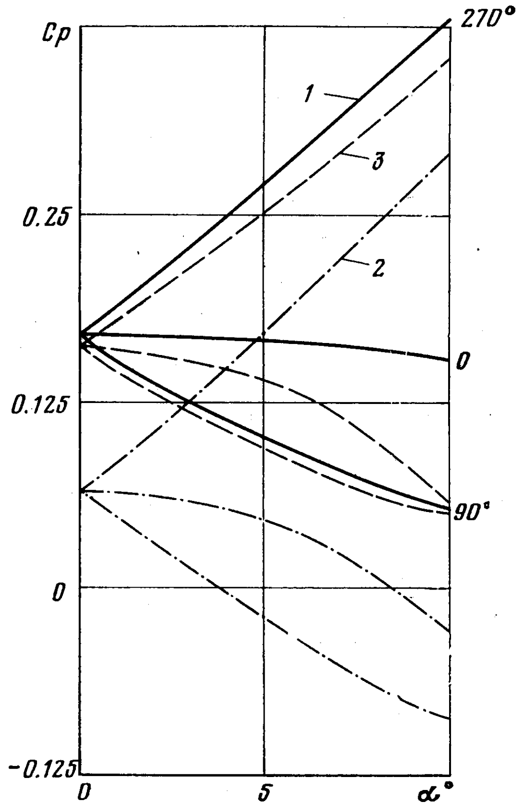
$$r_*' = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\beta_\infty}\right), \qquad \frac{1}{\beta_\infty} = \lambda - C(m)\frac{(\varkappa+1)^2(1+\lambda^2)^4}{\lambda^3}\varepsilon^4$$

Влияние формы тела на положение скачка определяется функцией

$$C(m) = (5-4m)^{4(1-m)}(4m-1)^{4m-1}\frac{m^2\Gamma^4(2m)}{2^{8(1-m)}\Gamma^2(4m)}$$

где $\Gamma(m)$ — гамма-функция.

Изложенный метод легко обобщается на случай обтекания тела вращения слабовозмущенным трехмерным потоком газа. Решение задачи представляется в виде потенциала источников и диполей, распределенных на оси тела вращения, который в отличие от решения линейного уравнения записан в деформированных координатах и вместо величины β_∞^{-1} содержит тангенс угла наклона возмущенной характеристики на скачке λ. Можно показать, что это решение более точно описывает поле скоростей



Фиг. 5

вблизи скачка, чем решение линейного уравнения. Ниже даны результаты расчета осесимметричного обтекания и обтекания тел вращения под углом атаки.

3. Результаты расчетов. На основе полученных теоретических результатов были проведены расчеты аэродинамических характеристик тел вращения, обтекаемых осесимметричным сверхзвуковым потоком газа. На фиг. 2 приведены результаты расчетов угла наклона скачка уплотнения для случая обтекания конуса с углом полураствора $\omega=10°$ (*1* — точное решение, *2* — линейная теория, *3* — решение Лайтхилла, *4* — предлагаемый метод). Полученные результаты хорошо согласуются с решением, найденным по методу характеристик [4] для тела вращения с обводом $r=\varepsilon(2x-x^2)$ при $\varepsilon=0.1428$, $M_\infty=3$ (фиг. 3). На фигуре приняты следующие обозначения: *1* — точное решение, *2* — линейная теория, *3* — предлагаемый метод.

В случае обтекания тел вращения под углом атаки изложенным методом удалось добиться хорошего соответствия с точным решением и экспериментальными данными (экспериментальные результаты заимствованы из исследований П. Д. Михайлова) как при расчете коэффициентов аэродинамических сил (фиг. 4), так и при определении распределения давления на поверхности обтекаемого тела (фиг. 5). На фиг. 4 приведены результаты для тела вращения с обводом $r=\varepsilon x^{3/4}$ при $M_\infty=4$ (*1* — линейная теория, *2* — предлагаемый метод, *3* — эксперимент). На фиг. 5 приведены данные для конуса с $\omega=15°$ при $M_\infty=3$ (*1* — точное решение, *2* — линейная теория, *3* — предлагаемый метод) в трех сечениях, которые в цилиндрической системе координат определяются углами, равными 0, 90 и 270°.

При обработке экспериментальных данных были учтены поправки на донное сопротивление и сопротивление трения при нулевом угле атаки.

В заключение авторы благодарят В. В. Сычева за обсуждение результатов работы.

Поступила 2 IX 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кусакин С. И., Притуло М. Ф.* Метод деформированных координат в задаче обтекания крыла сверхзвуковым потоком газа. В сб. «Аэромеханика». М., «Наука», 1976.
2. *Мейер Р. Е.* Метод характеристик в задачах о течениях сжимаемой жидкости, зависящих от двух переменных. В сб. «Газовая динамика», М., Изд-во иностр. лит., 1950.
3. *Whitham G. B.* The behaviour of supersonic flow past a body of revolution, far from the axis. Proc. Roy. Soc., London, Ser. A, 1950, vol. 201, N 1064.
4. *Русанов В. В., Нажесткина Э. И.* Волновое сопротивление тел вращения степенной формы (осесимметричное обтекание). М., 1972, (Ин-т прикл. матем. Препринт № 33).