

МЕТОД РАСЧЕТА АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ  
НЕКОТОРЫХ ОБЪЕМНЫХ ТЕЛ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ  
ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Г. Г. СКИБА, Б. Н. ФЕДОТОВ

(Москва)

Рассматривается метод расчета аэродинамических коэффициентов тел с произвольным поперечным сечением. Метод реализован на ЭВМ, и в качестве примера проведены расчеты для тел с различными удлинениями и формой.

Работоспособность метода демонстрируется путем сравнения результатов расчетов с результатами систематического эксперимента.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается обтекание тела стационарным сверхзвуковым потоком невязкого нетеплопроводного газа. Уравнение поверхности тела в цилиндрической системе координат  $(x, r, \varphi)$  представлено в виде  $r_r = r_r(x, \varphi)$ .

Наряду с телом заданной формы рассмотрим определенным образом ему соответствующее осесимметричное тело  $r_r = r_r^{\circ}(x)$ , ось симметрии которого направлена параллельно скорости невозмущенного потока.

Форма тела, описываемая функцией  $r_r^{\circ}(x)$ , подбирается так, что

$$(1.1) \quad r_r(x, \varphi) = r_r^{\circ}(x) + \varepsilon r_r^{\varepsilon}(x, \varphi)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр.

Аналогично могут быть представлены искомые функции: составляющие скорости  $u, v, w$ , плотность  $\rho$ , давление  $p$  и радиус головной ударной волны  $r_b = r_b(x, \varphi)$ .

Представляя периодические по  $\varphi$  функции  $r_r^{\varepsilon}(x, \varphi)$ ,  $u_{\varepsilon}(x, r, \varphi)$ ,  $v_{\varepsilon}(x, r, \varphi)$ ,  $w_{\varepsilon}(x, r, \varphi)$ ,  $\rho_{\varepsilon}(x, r, \varphi)$ ,  $p_{\varepsilon}(x, r, \varphi)$ ,  $r_b^{\varepsilon}(x, \varphi)$  рядами Фурье, обеспечим необходимую гладкость функций. В частности, получаем

$$(1.2) \quad r_r^{\varepsilon} = a_1(x) + a_2(x) \cos \varphi + \sum_{i=3}^{\infty} a_i(x) \cos(i-1)\varphi$$

$$(1.3) \quad p_{\varepsilon} = p_1(x, r) + p_2(x, r) \cos \varphi + \sum_{i=3}^{\infty} p_i(x, r) \cos(i-1)\varphi$$

Соответствующие представления будут иметь место для остальных функций (с целью сокращения будем считать функции  $r_r^{\varepsilon}$ ,  $u_{\varepsilon}$ ,  $v_{\varepsilon}$ ,  $\rho_{\varepsilon}$ ,  $p_{\varepsilon}$ ,  $r_b^{\varepsilon}$  четными; для нечетных функций результаты получаются аналогично). Анализ влияния на газодинамические параметры различных возмущающих факторов показывает, что если составляющие малых возмущений, входящие в  $r_r$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $r_b$ , — четные функции, то составляющие аналогичных возмущений, входящие в  $w$ , — нечетные, и наоборот. Поэтому  $w_{\varepsilon}$  предста-

вим в следующем виде:

$$w_e = w_1 + w_2 \sin \varphi + \sum_{i=3}^{\infty} w_i \sin(i-1) \varphi$$

Подставляя (1.1) с учетом (1.2) и аналогичные представления для искомых функций в граничные условия и в систему уравнений газовой динамики, получаем нелинейную систему и граничные условия для определения параметров с индексами 0, линейные системы и граничные условия для определения параметров с индексами 1 и 2 и еще бесконечный ряд линейных систем с соответствующими граничными условиями для определения параметров с индексами  $i$  ( $i=3, 4, \dots$ ).

Необходимые интегральные выражения для аэродинамических коэффициентов получены из следующих общих соотношений:

$$c_{xв} = \frac{1}{qS} \int_0^L \int_0^{2\pi} (p-p_\infty) r_T \frac{\partial r_T}{\partial x} dx d\varphi$$

$$c_y = \frac{1}{qS} \int_0^L \int_0^{2\pi} (p-p_\infty) \left( r_T \cos \varphi + \frac{\partial r_T}{\partial \varphi} \sin \varphi \right) dx d\varphi$$

$$c_z = \frac{1}{qS} \int_0^L \int_0^{2\pi} (p-p_\infty) \left( r_T \sin \varphi - \frac{\partial r_T}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) dx d\varphi$$

$$m_x = \frac{1}{qSL} \int_0^L \int_0^{2\pi} (p-p_\infty) r_T \frac{\partial r_T}{\partial \varphi} dx d\varphi$$

$$m_y = \frac{1}{qSL} \int_0^L \int_0^{2\pi} (p-p_\infty) \left[ x \frac{\partial r_T}{\partial \varphi} \cos \varphi - r_T \left( r_T \frac{\partial r_T}{\partial x} + x \right) \sin \varphi \right] dx d\varphi$$

$$m_z = \frac{1}{qSL} \int_0^L \int_0^{2\pi} (p-p_\infty) \left[ x \frac{\partial r_T}{\partial \varphi} \sin \varphi + r_T \left( r_T \frac{\partial r_T}{\partial x} + x \right) \cos \varphi \right] dx d\varphi$$

Подстановка представления (1.3) (или аналогичного) в интегральные выражения для аэродинамических коэффициентов  $c_x^e$ ,  $c_y^e$ ,  $c_z^e$ ,  $m_x^e$ ,  $m_y^e$ ,  $m_z^e$  показывает, что  $m_x^e = 0$ , а на значения остальных коэффициентов могут оказать влияние только члены  $p_1$  и  $p_2$ .

Таким образом при любых возможных формах поперечного сечения обтекаемого тела на значения аэродинамических коэффициентов окажут влияние только первые два члена ряда Фурье. Или, другими словами, для тела с произвольным поперечным сечением, уравнение поверхности которого  $r_T = r_T(x, \varphi)$ , аэродинамические коэффициенты имеют значения, равные соответствующим значениям аэродинамических коэффициентов для гладкого тела, уравнение поверхности которого

$$(1.4) \quad r_T = r_T^0(x) + \varepsilon [a_1(x) + a_2(x) \cos \varphi]$$

Исходную систему уравнений представим в следующем виде (на примере совершенного газа):

$$A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial r} + C \frac{\partial U}{\partial \varphi} + D = 0$$

где  $A, B, C$  — квадратные матрицы  $5 \times 5$ :  $a_{ii}=u, b_{ii}=v, c_{ii}=w/r, a_{15}=b_{25}=1/\rho, a_{41}=b_{42}=\rho, a_{51}=b_{52}=k\rho, c_{35}=1/\rho, c_{43}=\rho/r, c_{53}=k\rho/r$  ( $k=c_p/c_v$  — отношение теплоемкостей); остальные элементы равны нулю;  $D, U$  — вектор-столбцы:  $d_1=0, d_2=-w^2, d_3=vw, d_4=\rho v, d_5=k\rho v, u_1=u, u_2=v, u_3=w, u_4=\rho, u_5=p$ .

Граничные условия на поверхностях тела  $r_T=r_T(x, \varphi)$  и головной ударной волны  $r_b=r_b(x, \varphi)$

$$\mu U=0, \quad \mu = \left[ \frac{\partial r_T}{\partial x}, -1, \frac{1}{r_T} \frac{\partial r_T}{\partial \varphi}, 0, 0 \right]$$

$$M(U+U_e)=K, \quad \frac{\partial r_b}{\partial x} = -\frac{u+1}{v}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u+1 & v & w & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_b} \frac{\partial r_b}{\partial \varphi} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_2^2/y_1 \\ 0 \\ y_1/(y_1 - y_2) \\ y_2 + p_\infty \end{bmatrix}, \quad U_e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_\infty = \frac{1}{kM_\infty^2}$$

$$y_1 = (v_e n)^2, \quad y_2 = v_e n (v n + v_e n), \quad v_e = 1e_x, \quad v = ue_x + ve_r + we_\varphi$$

Здесь  $M_\infty$  — число Маха невозмущенного потока,  $n$  — внешняя единичная нормаль к поверхности ударной волны, заданной функцией  $r_b=r_b(x, \varphi)$ .

Система уравнений и граничные условия представлены в безразмерном виде.

Так как исходная система уравнений и граничные условия записаны для невязкого нетеплопроводного газа, то, очевидно, предлагаемый метод будет эффективен только для таких тел, форма которых не приводит к существенному влиянию неучитываемых эффектов. В частности, метод может быть рекомендован для расчета аэродинамических коэффициентов деформируемых тел.

В результате указанных выше подстановок для определения коэффициентов тела, уравнение поверхности которого (1.4), необходимо решить следующую систему уравнений:

$$(1.5) \quad A_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + B_0 \frac{\partial U_0}{\partial \xi} + C_0 = 0$$

$$A_0 \frac{\partial U_j}{\partial x} + B_0 \frac{\partial U_j}{\partial \xi} + A_j \frac{\partial U_0}{\partial x} + B_j \frac{\partial U_0}{\partial \xi} + C_j = 0 \quad (j=1, 2)$$

$$\xi = (r - r_T^\circ) / (r_b^\circ - r_T^\circ)$$

Здесь  $r_b=r_b^\circ(x)$  — уравнение поверхности ударной волны тела, форма которого задана функцией  $r_T=r_T^\circ(x)$ .

Граничные условия на поверхности тела, заданной функцией  $r_T=r_T(x, \varphi)$ , с учетом сноса на поверхность тела, заданной функцией  $r_T=r_T^\circ(x)$

$$(1.6) \quad \mu_0 U_0 = 0, \quad \mu_0 U_j = g_j, \quad \mu_0 = \left[ \frac{dr_T^\circ}{dx}, -1, 0, 0, 0 \right]$$

$$g_j = \left( \frac{\partial v_0}{\partial \xi} - \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \frac{dr_T^\circ}{dx} \right) \frac{a_j}{r_b^\circ - r_T^\circ} - u_0 \frac{da_j}{dx} \quad (j=1, 2)$$

Граничные условия на поверхности головной ударной волны  $r_b = r_b(x, \varphi)$  с учетом сноса на поверхность ударной волны  $r_b = r_b^\circ(x)$  представлены в следующем виде:

$$(1.7) \quad M_0 U_0 = K_0, \quad M_0 \left( U_j + \frac{\partial U_0}{\partial \xi} \frac{r_j}{r_b^\circ - r_T^\circ} \right) = K_j$$

$$(1.8) \quad \frac{dr_b^\circ}{dx} = -\frac{u_0 + 1}{v_0}, \quad \frac{dr_j}{dx} = \frac{1}{v_0^2} \left[ (u_0 + 1) \left( v_j + \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \frac{r_j}{r_b^\circ - r_T^\circ} \right) - v_0 \left( u_j + \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \frac{r_j}{r_b^\circ - r_T^\circ} \right) \right], \quad (j=1, 2)$$

В результате решения системы уравнений (1.5) с граничными условиями (1.6)–(1.8) должны быть определены аэродинамические коэффициенты

$$c_x = c_x^\circ + \varepsilon c_x^\varepsilon, \quad c_y = \varepsilon c_y^\varepsilon, \quad m_z = \varepsilon m_z^\varepsilon$$

$$c_x^\circ = c_{xb} + c_{xd} + c_{xf}, \quad c_{xb} = -\frac{2\pi}{qS} \int_0^L (p_0 - p_\infty) r_T^\circ \frac{dr_T^\circ}{dx} dx$$

$$c_x^\varepsilon = \frac{2\pi}{qS} \int_0^L \left\{ \left[ p_1 r_T^\circ + (p_0 - p_\infty) a_1 + \frac{\partial p_0}{\partial \xi} \frac{a_1 r_T^\circ}{r_b^\circ - r_T^\circ} \right] \frac{dr_T^\circ}{dx} + (p_0 - p_\infty) r_T^\circ \frac{da_1}{dx} \right\} dx$$

$$c_y^\varepsilon = \frac{\pi}{qS} \int_0^L \left( p_2 + \frac{\partial p_0}{\partial \xi} \frac{a_2}{r_b^\circ - r_T^\circ} \right) r_T^\circ dx$$

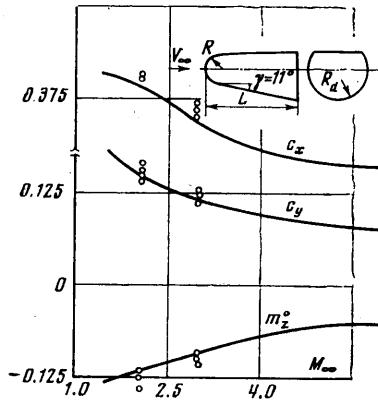
$$m_z^\varepsilon = \frac{\pi}{qSL} \int_0^L \left( p_2 + \frac{\partial p_0}{\partial \xi} \frac{a_2}{r_b^\circ - r_T^\circ} \right) \left( r_T^\circ \frac{dr_T^\circ}{dx} + x \right) + (p_0 - p_\infty) \left( 2a_2 \frac{dr_T^\circ}{dx} + r_T^\circ \frac{da_2}{dx} \right) r_T^\circ dx$$

Если  $r_T^\circ$  — четная функция, то  $c_z^\varepsilon = 0$ ,  $m_y^\varepsilon = 0$  и  $c_x^\varepsilon \neq 0$ ,  $c_y^\varepsilon \neq 0$ ,  $m_z^\varepsilon \neq 0$ ; для нечетной  $r_T^\circ$  будем иметь  $c_y^\varepsilon = 0$ ,  $m_z^\varepsilon = 0$  и  $c_x^\varepsilon \neq 0$ ,  $c_z^\varepsilon \neq 0$ ,  $m_y^\varepsilon \neq 0$ .

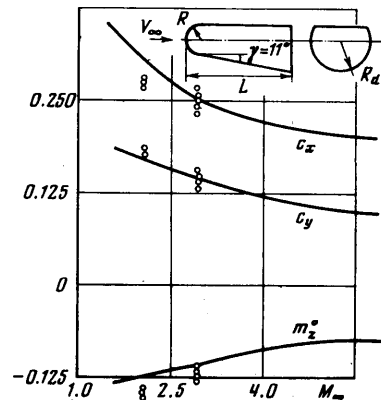
Так как значение  $c_x^\varepsilon$  определяется величиной  $a_1$ , а значения  $c_y^\varepsilon$  и  $m_z^\varepsilon$  — величиной  $a_2$ , представляется возможность анализа с использованием развитого аппарата рядов Фурье, направленного на обоснование формы тел, удовлетворяющих тем или иным требованиям.

2. О решении системы уравнений. Поставленная задача была реализована на ЭВМ с использованием метода сеток [1] в области  $x$ -гиперболичности системы. Начальные данные в окрестности сферического притупления находились методом прямых [2]. Правильность составленной программы проверялась при контрольных расчетах, в том числе для линейных систем — расчеты с нулевыми входными данными; расчеты для систем уравнений, преобразованных к виду наиболее соответствующих задач, решенных ранее; сравнения результатов с результатами решения трехмерной задачи обтекания малодеформированных гладких тел; расчеты для кругового конуса при наличии угла атаки. Проводились также расчеты с разным числом интервалов разностной сетки. Анализ всего имеющегося материала дает основание считать, что в рамках модели газа при фиксированной соответствующей осесимметричной форме  $r_T = r_T^\circ(x)$  значения  $c_{xb}$  получены с точностью не хуже 0.5%, а значения  $c_x^\varepsilon$ ,  $c_y^\varepsilon$ ,  $m_z^\varepsilon$  — с точностью не хуже (3–5) %.

**3. Результаты расчетов и экспериментальные данные.** Для проверки работоспособности метода был проведен систематический эксперимент (весовые испытания) четырех моделей в сверхзвуковой аэродинамической трубе. Формы моделей представлены на фиг. 1–4; размеры (в мм): фиг. 1 –  $L=75.2$ ,  $R_d=25$ ,  $R=12.6$ ; фиг. 2 –  $L=85.0$ ,  $R_d=25$ ,  $R=10.3$ ; фиг. 3 и 4 –  $L=93.3$ . Там же приведены результаты расчетов (сплошные кривые)



Фиг. 1



Фиг. 2

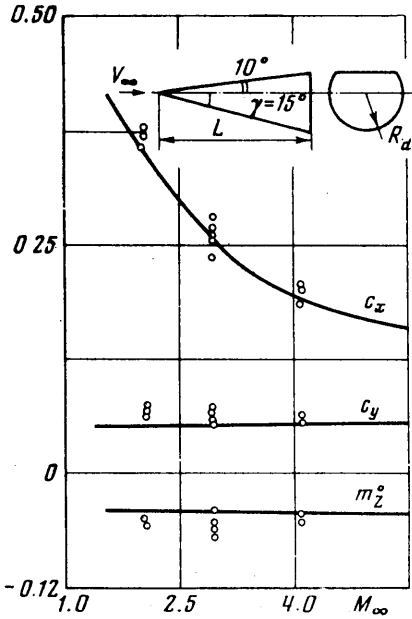
и экспериментальные данные (точки). Характерная площадь  $S = \pi R_d^2$ , характерная длина  $L$ . При расчете значений  $c_x$  значениями коэффициента сил трения  $c_{xt}$  пренебрегали, а значения  $c_{xd}$  определялись по формуле

$$c_{xd} = \frac{2}{kM_\infty^2} \left( 1 - \frac{1+0.4M_\infty}{0.7+M_\infty^2} \right) \frac{S_d}{S}$$

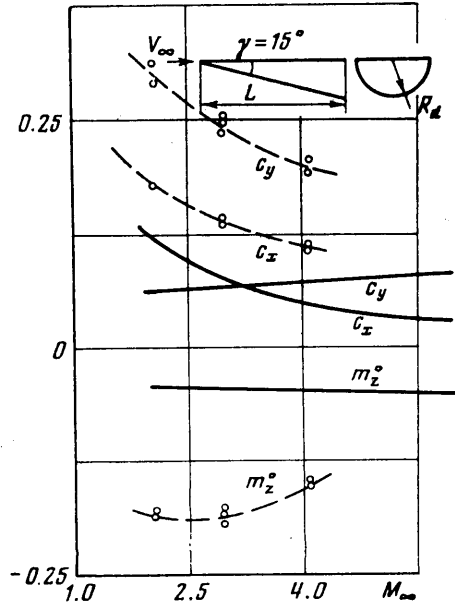
Экспериментальные данные получены по результатам 6–12 продувок при каждом  $M_\infty$ . На фиг. 1–4 данные представлены с учетом поправки на установку модели относительно потока. Выборочно для моделей 2 и 4 (номер модели совпадает с номером фигуры), подверженных воздействию наибольших нормальных сил и моментов, были проведены оценки систематических ошибок, обусловленных жесткостью системы крепления. Эти ошибки не более 5% для модели 2 и порядка 5% (в значениях  $c_x$ ) и до 16% (в значениях  $c_y$  и  $m_z^o$ ) для модели 4. На фиг. 1–4 экспериментальные данные представлены без учета поправок на жесткость системы крепления. Оценки влияния державки не проводились.

Результаты, представленные на фиг. 1–3, дают основание утверждать о хорошей работоспособности метода при достаточно существенных изменениях формы по сравнению с осесимметричной. В то же время результаты, представленные на фиг. 4, в совокупности с остальными результатами, характеризуют возможности метода. В данном случае (полуконус,  $\epsilon$  велико) явное несоответствие результатов расчетов и экспериментальных данных.

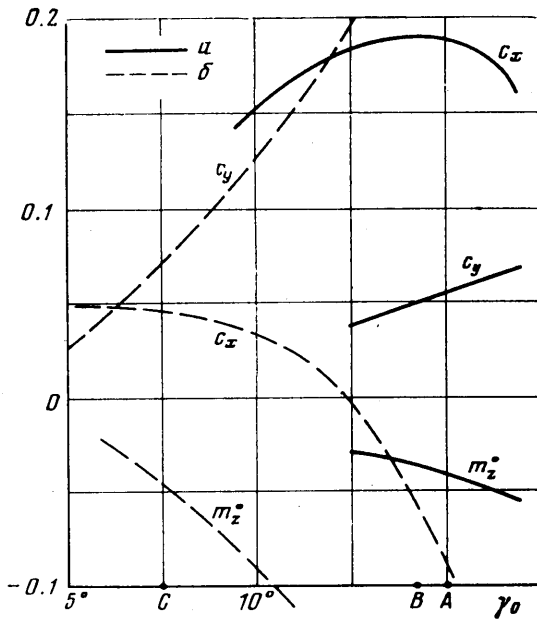
**4. О выборе формы соответствующего осесимметричного тела.** В предлагаемом методе результаты, вообще говоря, зависят от выбора соответствующего осесимметричного тела, уравнение поверхности которого задано функцией  $r_T = r_T^o(x)$ . Эта функция определяет результаты нелинейной части задачи, а сумма  $r_T^o(x) + \epsilon a_1(x)$  определяет значение  $c_x$  осесимметричного тела, теоретически равное значению  $c_x$  тела, уравнение поверхности которого задано функцией  $r_T = r_T(x, \varphi)$ .



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Очевидно, что если результаты нелинейной части будут определяться суммой  $r_T^\circ + \epsilon a_1$ , то будут устранены ошибки в значении  $C_x$ , обусловленные нелинейностью по  $\epsilon$ . Это означает фактически несколько другую последовательность при постановке задачи: сначала исходная функция  $r_T = r_T(x, \varphi)$  представляется рядом Фурье  $r_T = b_0 + b_1 \cos \varphi + \dots$ . Определив коэффициенты  $b_0(x)$  и  $b_1(x) = \epsilon a_2(x)$ , вместо функции  $r_T = r_T^\circ(x)$  имеем

$r_T = r_T^\circ(x) + \epsilon a_1(x) = b_0(x)$ , после чего задача сводится к решению нелинейной системы и одной линейной системы с соответствующими граничными условиями.

Сказанное иллюстрируется на примере тел 3 и 4 при  $M_\infty = 4$  на фиг. 5. Представлены аэродинамические коэффициенты тела 3 (кривые *a*) и тела 4 (кривые *b*) в зависимости от угла полураствора кругового конуса  $\gamma_0$ , соответствующего функции  $r_T = r_T^\circ(\gamma_0)$ . Показаны области изменения  $\gamma_0$  от значения  $\gamma_0 = \gamma$  (точка *A*) до значения, соответствующего сумме  $r_T^\circ(\gamma_0) + \epsilon a_1$  (точка *B* для тела 3 и точка *C* для тела 4). В указанных областях изменения  $c_x$ ,  $c_y$  и  $m_z^\circ$  соответственно 1.6, 11.3 и 13.4% для тела 3 ( $\epsilon$  достаточно мало) и порядка 300% для тела 4 ( $\epsilon$  слишком велико).

Поступила 20 XII 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русанов В. В. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. М., «Наука», 1964.
2. Гилинский С. М., Теленин Г. Ф., Гиняков Г. П. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 4.