

**РОСТ ПУЗЫРЯ ВО ВЗВЕШЕННОМ СЛОЕ
ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ МЕЖФАЗНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ**

Ю. П. ГУПАЛО, Ю. С. РЯЗАНЦЕВ, Ю. А. СЕРГЕЕВ

(Москва)

Получено приближенное решение задачи о движении и росте сферического пузыря во взвешенном слое частиц достаточно крупного размера, т. е. с учетом нелинейности закона межфазного взаимодействия. Получена система обыкновенных дифференциальных уравнений для зависящих от времени радиуса пузыря и скорости его подъема и найдены законы роста в случае, когда размеры пузыря мало отличаются от «равновесных», соответствующих подъему пузыря без изменения его объема, и в случае, когда радиус пузыря существенно превышает равновесный (последнее, как правило, имеет место, когда скорость подъема значительно превышает скорость псевдооживления).

1. Постановка задачи. Рассматривается движение сферического пузыря в однородном взвешенном слое. Для описания движения фаз используем модель двух идеальных взаимопроникающих взаимодействующих сплошных сред. Пористость плотной фазы ϵ будем полагать постоянной.

Уравнения сохранения импульса и массы в принятой модели имеют вид

$$(1.1) \quad d_1 \epsilon \frac{dv}{dt} = -\nabla p_1 + d_1 \epsilon g - f$$

$$d_2 \rho \frac{dw}{dt} = -\nabla p_2 + d_2 \rho g + f$$

$$\operatorname{div} v = \operatorname{div} w = 0, \quad \rho + \epsilon = 1$$

Здесь w и v — скорости частиц и жидкости в промежутках между частицами, d_1 и d_2 — плотности жидкости и материала частиц соответственно, ρ — объемная концентрация частиц, p_1 — давление жидкости, p_2 — эффективное давление дисперсной фазы, g — ускорение поля внешних сил.

Сила межфазного взаимодействия f в пренебрежении эффектами, обусловленными ускорениями относительного движения частиц и жидкости, может быть записана в виде (см., например, [1])

$$(1.2) \quad f = -d_1 \rho g + d_1 \rho \frac{dv}{dt} + \rho \epsilon^{-1} F(\epsilon, u) u$$

$$u = v - w$$

Приближенные формулы зависимости силы межфазного сопротивления от относительной скорости приведены, например, в [2]. Как следует из [2], нелинейность межфазного взаимодействия становится существенной уже при числах Архимеда $A = = g a_p^3 \cdot (d_2 - d_1) / (d_1 \nu^2) \approx 10^2$ (здесь a_p — радиус частиц дисперсной фазы, ν — вязкость жидкости). Последнее означает, что нелинейность межфазного сопротивления существ-

венна для большинства используемых на практике взвешенных слоев. При $A \geq 10^5$ (крупные частицы) межфазное сопротивление квадратично.

Функцию межфазного взаимодействия $F(\varepsilon, u)$ представим в виде

$$(1.3) \quad F(u) = F_0[1 + F_1(u)]$$

Второе слагаемое в правой части определяет нелинейную поправку в силе межфазного взаимодействия. Для линейного взаимодействия задача о росте пузыря рассматривалась в [3].

Согласно экспериментальным результатам [4] для функции (1.3) имеем

$$F_0 = \frac{9}{2} d_1 \nu a_p^{-2} \varepsilon^{-1/4}, \quad F_1(u) = 0.02 a_p \varepsilon \nu^{-1} u$$

Рассмотрим конкретные примеры. При псевдоожигении воздухом ($d_1 = 0.0012 \text{ г/см}^3$, $\nu = 0.15 \text{ см}^2/\text{сек}$) стеклянных шариков плотностью $d_2 = 2.6 \text{ г/см}^3$ межфазное сопротивление при числе псевдоожигения $U/U_0 = 2$ (здесь U и U_0 — скорости псевдоожигения и минимального псевдоожигения в расчете на пустое сечение аппарата) линейно для частиц радиусом менее 0.2 мм. Для частиц размером $a_p = 0.5 \text{ мм}$ при $u = 50 \text{ см/сек}$ нелинейная поправка существенна и составляет ~ 0.2 линейного члена. Для частиц $a_p > 3 \text{ мм}$ межфазное сопротивление квадратично для любых скоростей псевдоожигения. Отметим, что два последних примера соответствуют часто используемым в промышленных аппаратах системам крупных частиц при высоких скоростях псевдоожигения; в первом из них нелинейная поправка достаточно мала. Следовательно, в достаточно широком диапазоне параметров можно считать

$$(1.4) \quad F_1(u) = \gamma f(u), \quad \gamma \ll 1, \quad f(u) = O(1)$$

Ниже будем полагать условие (1.4) выполненным.

Представление функции $F(u)$ в виде (1.3), (1.4) может служить также для более точного описания межфазного сопротивления в области существенно нелинейного взаимодействия.

Введем сферическую систему координат, связанную с центром пузыря (полярная ось направлена вдоль потока дисперсной фазы). Так как движение пузыря, вообще говоря, нестационарно, запишем уравнения сохранения импульса и массы в виде

$$(1.5) \quad \begin{aligned} d_1 \varepsilon (\partial/\partial t + v \nabla) \mathbf{v} &= -\varepsilon \nabla p_1 + d_1 \varepsilon \mathbf{g} + d_1 \varepsilon u_b \cdot \mathbf{g} / g - \rho u F(u) \\ d_2 \rho (\partial/\partial t + w \nabla) \mathbf{w} &= -\rho \nabla p_1 - \nabla p_2 + d_2 \rho \mathbf{g} + d_2 \rho u_b \cdot \mathbf{g} / g + \rho u F(u) \\ \text{div } \mathbf{v} &= \text{div } \mathbf{w} = 0 \end{aligned}$$

Здесь $u_b(t)$ — скорость движения центра пузыря. Члены, пропорциональные u_b , описывают даламберову силу, появляющуюся в используемой неинерциальной системе координат.

Известно (см., например, [5]), что пузыри появляются, как правило, лишь в системах, для которых

$$(1.6) \quad d_2 \gg d_1$$

В этом случае справедлива и запись силы в форме (1.2). Ниже в уравнениях и граничных условиях будем последовательно пренебрегать членами порядка d_1 по сравнению с членами порядка d_2 .

Рассмотрим граничные условия вдали от пузыря. Давление дисперсной фазы, обусловленное пульсациями частиц, в однородном взвешенном слое постоянно (см., например, [6]). Тогда вдали от пузыря с учетом (1.6) имеем

$$(1.7) \quad \begin{aligned} r \rightarrow \infty, \quad p_1 &= p_{1\infty} + d_2 \rho g r; \quad p_2 = p_{2\infty} \\ \mathbf{w} &= u_b(t) \mathbf{g} / g, \quad \mathbf{v} = [u_b(t) - v_0] \mathbf{g} / g \end{aligned}$$

Здесь v_0 — скорость псевдоожигения.

Условия на границе пузыря $r=a$ следуют из условий на поверхности разрыва между однофазной жидкостью и двухфазной средой [6] и с учетом (1.6) имеют вид

$$(1.8) \quad r=a, \quad w_r=a^{\cdot}, \quad v_{+r}=\varepsilon v_r; \quad p_1=p_+(t), \quad p_2=0$$

Здесь $p_+(t)$ — давление жидкости внутри пузыря; второе условие представляет собой условие сохранения потока массы жидкости на границе пузыря (нижний индекс плюс относится к параметрам внутреннего течения).

Будем предполагать, что движение дисперсной фазы потенциально, т. е. $\mathbf{w}=\nabla\varphi$. Тогда из последнего уравнения (1.5) следует, что потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа, решение которого с граничными условиями $r\rightarrow\infty$, $\nabla\varphi=u_b\mathbf{g}/g$; $r=a$, $\partial\varphi/\partial r=a^{\cdot}$, следующими из (1.7), (1.8), имеет вид

$$(1.9) \quad \varphi=u_b \left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right) r \cos\theta - \frac{a^2 a^{\cdot}}{r}$$

Учитывая, что $|\nabla p_1| \sim d_2 g$, и пренебрегая нестационарными членами и внешними силами в первом уравнении (1.5) согласно условию (1.6), будем далее записывать уравнение движения жидкости в виде

$$(1.10) \quad \varepsilon \nabla p_1 + \rho u F(u) = 0$$

Для суммы уравнения (1.10) и второго уравнения (1.5) справедлив интеграл Коши — Лагранжа

$$(1.11) \quad d_2 \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} d_2 \rho w^2 - \frac{1}{2} d_2 \rho u_b^2 + p_1 + p_2 - p_{1\infty} - p_{2\infty} - d_2 \rho g r - d_2 \rho u_b^{\cdot} g r / g = 0$$

позволяющий выразить p_2 через остальные параметры течения.

Решение задачи (1.5) — (1.9) позволяет удовлетворить всем граничным условиям (1.7), (1.8), кроме условия $p_2=0$ на поверхности пузыря, которое не согласуется с предположением о сферичности пузыря. Последнее условие, записанное согласно (1.8), (1.11) в виде

$$(1.12) \quad r=a, \quad d_2 \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} d_2 \rho (w^2 - u_b^2) + p_+(t) - d_2 \rho g a \cos\theta - d_2 \rho u_b^{\cdot} a \cos\theta = p_{1\infty} + p_{2\infty}$$

может быть при помощи метода Дэвиса — Тейлора [7] удовлетворено локально в окрестности передней критической точки течения дисперсной фазы, что приводит к искомым уравнениям для скоростей подъема и роста пузыря. Условие (1.12) содержит неизвестную функцию $p_+(t)$, и задача сводится к определению связи между давлением $p_+(t)$ внутри пузыря и скоростью роста $a^{\cdot}(t)$.

2. Связь между скоростью роста и давлением внутри пузыря. Давление внутри пузыря будем искать в виде

$$(2.1) \quad p_+(t) = p_+^{\circ}(t) + \gamma p_+^1(t)$$

Здесь $p_+^{\circ}(t)$ соответствует скорости роста a^{\cdot} при линейном межфазном сопротивлении; $p_+^1(t)$ — поправка, возникающая вследствие малой нели-

нейности при той же скорости роста. Для определения p_+ необходимо найти распределение давления жидкости вне растущего пузыря, которое вместе с полем течения определяется из решения задачи

$$(2.2) \quad -\varepsilon \nabla p_1 = \rho \mathbf{u} F(u), \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ r \rightarrow \infty, \quad p_1 = p_{1\infty} + d_2 \rho g r \cos \theta \quad (\mathbf{u} = v_0 \mathbf{g} / g); \quad r = a, \quad p_1 = p_+$$

Будем искать решение задачи (2.2) в виде

$$(2.3) \quad p_1 = p_1^\circ + \gamma p_1^1; \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ + \gamma \mathbf{u}^1, \quad \mathbf{u}^\circ = \mathbf{v}^\circ - \mathbf{w}$$

Здесь \mathbf{v}° , \mathbf{u}° и p_1° соответствуют линейному межфазному сопротивлению. Из (1.3) и (2.2) следует потенциальность \mathbf{v}° .

Функции нулевого приближения p_1° и \mathbf{u}° могут быть получены из задачи (2.2) в виде, аналогичном [3]

$$(2.4) \quad p_1^\circ = p_{1\infty} + d_2 \rho g \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) r \cos \theta + \frac{(p_+^\circ - p_{1\infty}) a}{r} \\ \mathbf{u}^\circ = \nabla \Phi, \quad \Phi = -v_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) r \cos \theta + \frac{1}{\varepsilon} \frac{a^2 a'}{r}$$

Связь между $p_+^\circ(t)$ и a' следует из (2.4), уравнения для функций нулевого приближения $-\varepsilon \nabla p_1^\circ = \rho F_0 \mathbf{u}^\circ$ и условия отсутствия источников и стоков внутри пузыря

$$(2.5) \quad \int_{\Sigma} (\varepsilon u_n + w_n) d\sigma = 0$$

(здесь интегрирование проводится по любой замкнутой поверхности, ограничивающей пузырь) и может быть представлена в виде

$$(2.6) \quad p_+^\circ - p_{1\infty} = -\rho \varepsilon^{-2} F_0 a a'$$

Для функций первого приближения имеем

$$(2.7) \quad -\varepsilon \nabla p_1^1 = \rho F_0 \mathbf{u}^\circ f(u^\circ) + \rho F_0 \mathbf{u}^1, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}^1 = 0$$

Как следует из (1.10) и (2.4), условие (2.5) для функции \mathbf{u}^1 имеет вид

$$(2.8) \quad \int_{\Sigma} u_r^1 d\sigma = 0$$

Из (2.2), (2.4) следует задача для p_1^1 :

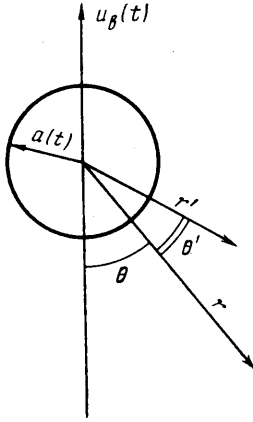
$$(2.9) \quad \Delta p_1^1 = -\rho \varepsilon^{-1} F_0 \operatorname{div} [\mathbf{u}^\circ f(u^\circ)] \\ r = a, \quad p_1^1 = p_+^1(t); \quad r \rightarrow \infty, \quad p_1^1 = 0$$

решение которой будем искать в виде

$$(2.10) \quad p_1^1 = \frac{p_+^1 a}{r} - \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} (Rr)^{-1} \left(\frac{\partial p_1^1}{\partial r} \right)_{r=a} d\sigma + \\ + \frac{\rho F_0}{4\pi \varepsilon} \int_{\nu} (Rr)^{-1} \operatorname{div} [\mathbf{u}^\circ f(u^\circ)] d\tau$$

Здесь σ — поверхность пузыря; интегрирование в объемном интеграле проводится по внешности сферы радиуса a ; $R = [1 + (r'/r)^2 - 2(r'/r) \cos \theta']^{1/2}$, r' , θ' — переменные интегрирования (см. фиг. 1).

Из уравнения (2.9) и соотношения (2.10) следует справедливость второго граничного условия в (2.9) и гармоничность функции p_1^1 на бесконечности. Тогда для функции (2.10) справедливы формулы Грина во внешности сферы, применением которых доказывается выполнение первого граничного условия в (2.9).



Фиг. 1

Для определения искомой связи между p_1^1 и a в дальнейшем понадобятся лишь члены $O(r^{-1})$ асимптотического разложения функции (2.10) по r^{-n} при $r \gg a$. Представим объемный интеграл в (2.10) в виде

$$\int_V (Rr)^{-1} \operatorname{div}[\mathbf{u}^\circ f(u^\circ)] d\tau = \frac{1}{r} J_1(r, \theta) + \frac{1}{r} J_2(r, \theta) + \frac{1}{r} \int_{V_1} \operatorname{div}[\mathbf{u}^\circ f(u^\circ)] d\tau$$

$$J_1(r, \theta) = \int_{V_1} \operatorname{div}[\mathbf{u}^\circ f(u^\circ)] (R^{-1} - 1) d\tau$$

$$J_2(r, \theta) = \int_{V-V_1} \operatorname{div}[\mathbf{u}^\circ f(u^\circ)] R^{-1} d\tau$$

Здесь V_1 — область, расположенная между сферами радиусов a и r . Учитывая (2.7) и (2.8), получим представление для p_1^1 при $r \gg a$ в виде

$$(2.11) \quad p_1^1 = \frac{p_+^1 a}{r} + \frac{\rho F_0}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \int_{\Sigma} u_r^\circ f(u^\circ) d\sigma + \frac{\rho F_0}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} [J_1(r, \theta) + J_2(r, \theta)]$$

Здесь Σ — поверхность сферы радиуса r .

Для вычисления объемных интегралов J_1 и J_2 заметим, что при $r \gg r_1 = \text{const} \gg O(a\epsilon v_0 / a')$ для $\operatorname{div}[\mathbf{u}^\circ f(u^\circ)]$ справедливо асимптотическое разложение

$$(2.12) \quad \operatorname{div}[\mathbf{u}^\circ f(u^\circ)] = \frac{2a^2 a'}{\epsilon r^3} v_0 \frac{df}{dv_0} P_2(\cos \theta) + O(r^{-4})$$

Здесь $df/dv_0 = (df/dv)_{v=v_0}$. Считая $r \gg r_1$, получим для интегралов J_1 и J_2 следующие асимптотические выражения:

$$(2.13) \quad J_1(r, \theta) = 4\pi a^2 a' v_0 f'(v_0) \epsilon^{-1} \int_0^r \int_0^\pi (r')^{-1} P_2[\cos(\theta' + \theta)] \times \\ \times \sin \theta' (R^{-1} - 1) dr' d\theta' + O(r^{-1})$$

$$J_2(r, \theta) = 4\pi a^2 a' v_0 f'(v_0) \epsilon^{-1} \int_r^\infty \int_0^\pi (r')^{-1} P_2[\cos(\theta' + \theta)] \times \\ \times \sin \theta' R^{-1} dr' d\theta' + O(r^{-1})$$

Здесь интегрирование проводится в системе координат r', θ' , полярная ось которой проходит через точку r, θ (см. фиг. 1). Из (2.12) и свойств функции $R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ следует сходимость интегралов (2.13). Заметим, что функция R^{-1} является производящей функцией для полиномов Лежандра $P_n(\cos \theta')$. Выражая $P_2[\cos(\theta' + \theta)]$ через полиномы Лежандра и учиты-

вая условия ортогональности последних, получим

$$(2.14) \quad \begin{aligned} J_1(r, \theta) &= \frac{1}{5} \pi a^2 a' v_0 f'(v_0) \varepsilon^{-1} (2\mu^2 - 1) + O(r^{-1}) \\ J_2(r, \theta) &= \frac{1}{5} \pi a^2 a' v_0 f'(v_0) \varepsilon^{-1} (13 - 11\mu^2) + O(r^{-1}) \\ (\mu &= \cos \theta) \end{aligned}$$

Применяя соотношения (2.7), (2.11) и (2.14) и интегрируя по удаленной поверхности Σ согласно условию (2.8), получим искомое соотношение между p_+^1 и a' в виде

$$(2.15) \quad p_+^1 = -\frac{5}{9} \rho \varepsilon^{-2} F_0 v_0 \frac{df}{dv_0} a a'$$

3. Уравнения движения и скорости роста пузыря. Для получения искомых уравнений движения и скорости роста будем требовать выполнения условия (1.13) в окрестности передней критической точки течения дисперсной фазы $\theta = \pi$ согласно методу Дэвиса — Тейлора [7]. Разлагая входящие в (1.13) величины в ряд по $\sin^2(\pi - \theta)$ и оставляя первые два члена разложения, получим уравнения, связывающие зависящие от времени радиус пузыря и скорость его подъема, в виде

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} u_b' a + \frac{3}{2} u_b a' + \frac{9}{4} u_b^2 &= g a \\ \frac{7}{4} u_b^2 - \frac{p_{2\infty}}{d_2 \rho} - a a'' - \frac{3}{2} a'^2 &= \frac{F_0}{d_2 \varepsilon^2} \left(1 + \frac{5}{9} \gamma v_0 \frac{df}{dv_0} \right) a a' \end{aligned}$$

Заметим, что в [3] соотношения для скорости роста и скорости подъема пузыря представляли собой алгебраические уравнения. Последнее связано с неоправданным в общем случае пренебрежением в [3] нестационарными членами в уравнениях движения фаз (1.6).

Система (3.1) имеет не зависящее от времени решение a_* , u_{b*} , совпадающее с полученным в [3]

$$(3.2) \quad a_* = \frac{9 p_{2\infty}}{7 d_2 \rho g}, \quad u_{b*} = \frac{2}{3} (g a_*)^{1/2}$$

При $a > a_*$ пузырь растет, при $a < a_*$ уменьшается в размерах.

Рассмотрим решения системы (3.1) в некоторых предельных случаях. Ниже будем учитывать соотношения

$$(3.3) \quad F_0 [1 + \gamma f(v_0)] = \frac{g}{\varepsilon v_0}, \quad \frac{p_{2\infty}}{d_2 \rho v_0^2} = O(1)$$

первое из которых следует из условий равновесия однородного слоя. Второе следует из элементарных кинетических соображений (см., например, [3]).

В случае $a \gg a_*$, чему, согласно (3.3), соответствует $u_b \gg u_0$, приближенное решение системы (3.1) приводит к выражениям

$$(3.4) \quad \begin{aligned} u_b &= \frac{2}{3} (g a)^{1/2} \\ a' &= \frac{7g(a - a_*) d_2 \varepsilon^2}{F_0 a (1 + \frac{5}{9} \gamma v_0 df/dv_0)} \approx \frac{7\varepsilon v_0 [1 + \gamma f(v_0)]}{9(1 + \frac{5}{9} \gamma v_0 df/dv_0)} \end{aligned}$$

Отметим существенное влияние нелинейности межфазного сопротивления на характер роста пузыря. В случае линейного межфазного сопротивления и больших радиусов пузыря соотношения (3.4) переходят в по-

лученные в [3]. Закон роста (3.4) и, следовательно, результаты, полученные в [3] для систем мелких частиц ($\gamma=0$), применимы лишь при $a \gg \gg a_*$ ($u_b \gg v_0$). Для многих псевдооживленных систем, используемых на практике, характерно соотношение $u_b/v_0 = O(1)$ ($a \sim a_*$); как показано ниже, в этом случае закон роста пузыря имеет иной характер. (Заметим, что в последнем случае существенно также окружающее пузырь облако газа, оказывающее значительное влияние на массообмен пузыря с непрерывной фазой [9].)

Во многих случаях, когда рассматривается система достаточно крупных частиц, отклонение радиуса пузыря от «равновесного» значения невелико. Ниже будем полагать $|a - a_*| \ll a_*$. Решение линеаризованной системы (3.1) приводит к выражению для скорости роста пузыря в виде

$$(3.5) \quad \dot{a} = \frac{2}{3} g^{1/2} a_*^{-1/2} \lambda(\eta) (a - a_*)$$

Здесь λ — наибольший положительный корень характеристического уравнения линеаризованной системы (3.1)

$$\lambda^3 + (9 + \eta)\lambda^2 + (21/2 + 9\eta)\lambda - 63/4 = 0$$

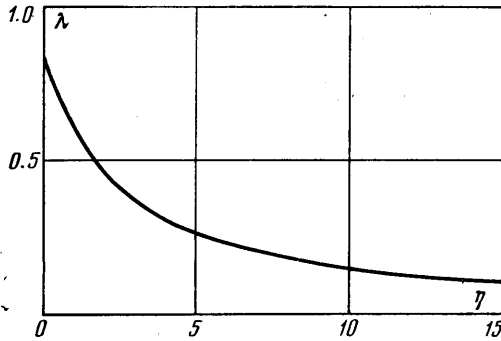
$$\eta = \frac{3F_0(1 + 5/9\gamma v_0 df/dv_0) a_*^{1/2}}{2d_2 \varepsilon^2 g^{1/2}} = \frac{3(1 + 5/9\gamma v_0 df/dv_0) (g a_*)^{1/2}}{2\varepsilon v_0 [1 + \gamma f(v_0)]}$$

Зависимость $\lambda(\eta)$ приведена на фиг. 2. Выражение (3.5) пригодно при достаточно больших временах, когда зависимость параметров движения пузыря от начальных условий становится несущественной. Как показывает анализ линеаризованной системы (3.1), последнее справедливо уже для времен, требующихся пузырю для прохождения расстояния порядка половины его радиуса.

Скорость пузыря определяется соотношением

$$(3.6) \quad u_b = u_{b*} + \frac{4}{21} g^{1/2} a_*^{-1/2} \times$$

$$\times [\lambda^2(\eta) + \eta \lambda(\eta)] (a - a_*)$$



Фиг. 2

Как следует из фиг. 2, функция $\lambda(\eta)$ может быть аппроксимирована выражением $\lambda(\eta) = 7/4(\eta + 2.1)^{-1}$. Последнее позволяет при малых отклонениях радиуса от a_* представить скорости роста и подъема приближенными зависимостями

$$\dot{a} = \frac{g^{1/2}}{6a_*^{1/2}(\eta + 2.1)} (a - a_*)$$

$$u_b = u_{b*} + \frac{g^{1/2}}{3a_*^{1/2}} \frac{\eta + 3.85}{(\eta + 2.1)^2} (a - a_*)$$

4. Область применимости результатов. Полученные выше результаты могут быть использованы для анализа влияния роста пузыря на скорость массообмена его с непрерывной фазой. В частности, при высоких скоростях роста массообмен пузыря целиком определяется скоростью увеличения объема пузыря.

Для промежуточных радиусов пузыря и достаточно больших времен, когда зависимость от начальных условий незначительна, система (3.1) приводит к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению для зависимости скорости роста пузыря от его радиуса, решение которого может быть получено численными методами.

Зависимости (3.4)–(3.6) для скоростей роста и подъема могут быть легко обобщены на случай пузырей более сложной формы. Результаты, полученные для пузырей со сферической лобовой частью, практически не отличаются от полученных выше.

Модель, примененная выше и в работе [3], вероятно, непригодна в условиях, близких к началу псевдооживления. Как показывают экспериментальные исследования (например, [10, 11]), рост пузырей практически любого размера в условиях минимального псевдооживления отсутствует. Такое противоречие с экспериментальными данными вызвано, по-видимому, тем, что модель дисперсной фазы как идеальной жидкости далека от действительности в области начала псевдооживления (см., например, [12]).

В заключение остановимся на некоторых методических неточностях работы [3]. Выше указывалась неправомерность стационарной постановки [3] задачи (1.6).

Постановка задачи [3] об определении формы пузыря ошибочна. Так, условие сохранения формы пузыря в процессе подъема, записанное в [3] в виде

$$r = r_s(\theta), \quad w_n = w_0 r_s(\theta) / r_0$$

в действительности таковым не является. (Здесь $r_s(\theta)$ определяет форму пузыря, w_n — нормальная скорость его границы, w_0 и r_0 — нормальная скорость и радиус-вектор в передней критической точке.) В последнем легко убедиться, рассматривая, например, участок границы в виде прямой. Согласно приведенному условию в процессе роста он будет деформироваться и, таким образом, условие подобия будет не выполнено.

Поступила 18 IV 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Гупало Ю. П. Об устойчивости ламинарного движения жидкости с тяжелой примесью. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 6.
2. Ergun S. Fluid flow through packed columns. Chem. Engng Progr., 1952, vol. 48, No. 2.
3. Бувечич Ю. А. О движении пузырей в псевдооживленном слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 3.
4. Горошко В. Д., Розенбаум Р. Б., Тодес О. М. Приближенные закономерности гидравлики взвешенного слоя и стесненного падения. Изв. вузов, Нефть и газ, 1958, № 1.
5. Fluidization. London — New York, Acad. Press., 1971.
6. Бувечич Ю. А., Гупало Ю. П. О поверхностях разрыва в дисперсных системах. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
7. Davies R. M., Taylor G. I. The mechanics of large bubbles rising through extended liquid and through liquids in tubes. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1950, vol. 200, No. 1062.
8. Гольдштик М. А., Козлов Б. Н. Элементарная теория концентрированных дисперсных систем. ПМТФ, 1973, № 4.
9. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Сергеев Ю. А. О массообмене между пузырями и непрерывной фазой в псевдооживленном слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4.
10. Davies L., Richardson J. E. Gas interchange between bubbles and the continuous phase in a fluidised bed. Trans. Inst. Chem. Engrs London, 1966, vol. 44, No. 8.
11. Rowe P. N., Matsuno R. Single bubbles injected into a gas fluidised bed and observed by X-rays. Chem. Engng Sci., 1971, vol. 26, No. 6.
12. Гупало Ю. П., Черепанов Г. П. О переходе слоя твердых частиц во взвешенное состояние. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 1.