МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1977

УДК 532.527

ДИНАМИКА ЗАВИХРЕННОСТИ НА СФЕРЕ

В. А. БОГОМОЛОВ

(Калининград)

Рассматривается двумерное течение идеальной несжимаемой жидкости между двумя бесконечно близкими концентрическими сферами, вызванное отличным от нуля начальным распределением завихренности.

Введено понятие о точечных особенностях (вихрях, источниках и стоках) на сфере. Получены уравнения движения для точечных вихрей и инварианты движения, известные для плоского случая [1]. Рассмотрен простейший случай взаимного движения пары вихрей.

Получены уравнения движения точечных вихрей на вращающейся сфере. Решение этих уравнений совместно с эволюционным уравнением для распределенной завихренности позволяет определить траектории точечных вихрей. Для непрерывного распределения завихренности получены интегральные инварианты, имеющие динамический смысл полной кинетической энергии и момента количества движения жидкости на сфере.

Отмечено влияние топологии сферы на динамику завихренности и дано сравнение с плоским случаем.

При изучении долгопериодных колебаний областей высокого давления в тропических широтах Земли [2], направленной передачи энергии по спектру в двумерной турбулентности [3] или состояния двумерной плазмы с отрицательной температурой [4] весьма плодотворным оказался эвристический метод замены двумерного континуального распределения завихренности или зарядов дискретным. Отметим, что в работах [2–4] изучается движение вихрей на плоскости.

В геофизической и астрофизической гидродинамике одной из главных является задача определения поля скорости в океане или атмосфере, покрывающих сферу. В [5] предпринята попытка учесть влияние кривизны тонкого слоя вращающейся жидкости на движение вихрей, но исследование ограничивается изучением устойчивости малых колебаний вихрей вблизи заданного круга широты, поскольку принято приближение β-плоскости [1].

Ниже при получении точных уравнений движения для точечных вихрей на покоящейся и вращающейся сфере и интегральных инвариантов завихренности приближение β-плоскости не используется.

1. Постановка задачи. Некоторые качественные особенности движения жидкости на покоящемся или вращающемся шаре радиуса a, покрытом жидкой пленкой малой постоянной толщины h, можно выяснить с использованием упрощенных уравнений, которые будут выведены ниже. Зависимыми переменными будем считать осредненную по толщине пленки скорость, плотность и другие связанные с ними величины. Следовательно, рассматриваются только крупномасштабные горизонтальные движения, линейные размеры которых $L \gg h$ и плотность жидкости ρ считается постоянной.

Верхняя граница жидкой пленки (атмосферы планет) представляет собой свободную поверхность, которая вследствие большой силы тяжести остается приблизительно сферической. Предположение о сферичности свободной поверхности (или приближение твердой крышки) исключает из рассмотрения движения, на которые непосредственно влияет сила тяжести. Для простоты анализа трение ν на поверхности шара также не учитывается.

Эти упрощения выделяют из множества возможных течений класс течений идеальной несжимаемой жидкости между двумя твердыми бесконечно близкими концентрическими сферами в отсутствие внешних сил.

Известно [6], что если течение бездивергентно и завихренность на сфере равна нулю, то жидкость покоится. Одним из простейших случаев нетривиального движения жидкости будет тот, когда на сфере помещены точечные особенности (вихри, источники и стоки).

Поясним смысл, который вкладывается в понятие о точечных гидродинамических особенностях на сфере S^2, на примере тех же особенностей на плоскости E^2.

Все дальнейшие рассуждения для большей наглядности будем проводить, пользуясь только источниками и стоками [7], поскольку потенциал и функция тока течения на E^2 являются гармоническими сопряженными функциями; следовательно, полученные результаты останутся справедливыми и в случае вихрей.

Пусть трехмерное евклидово пространство E^3 заполнено идеальной несжимаемой жидкостью, покоящейся на бесконечности. Рассмотрим течение жидкости между двумя параллельными плоскостями, в пространстве между которыми расположен объемный точечный сток интенсивности M. Потенциал безвихревого течения между плоскостями легко найти, суммируя потенциалы от действительного источника и его мнимых зеркальных изображений такой же интенсивности M, расположенных по обе стороны от плоскостей в E^3 [8]. Устремив расстояние h между плоскостями к нулю так, чтобы сток оставался между ними, в пределе получим в качестве мнимых изображений бесконечную прямолинейную нить стоков с постоянной линейной плотностью m. Поясним подробнее, что здесь подразумевается под предельным переходом.

Заметим, что множество зеркальных изображений точечного стока при любом конечном расстоянии между плоскостями будет счетным, т. е. оно не заполняет прямую линию плотно. В то же время поле скорости на любом, заданном в параллельной плоскости расстоянии от стока, вызванное прямолинейной нитью стоков постоянной интенсивности, сколь угодно точно будет приближаться к полю скорости от счетной системы зеркальных изображений, если h будет достаточно мало. Следовательно, потенциал течения Φ от точечного объемного стока между двумя бесконечно близкими плоскостями можно найти, решая в E^3 уравнение Пуассона

$$\Delta\Phi = m\delta(x, y)$$

Здесь Δ — трехмерный оператор Лапласа, ось z декартовой системы координат x, y, z перпендикулярна E^2.

Замену точечного стока между двумя бесконечно близкими плоскостями нитью стоков, расположенной в E^3, назовем эквивалентным представлением стока на E^2.

Метод, подобный изложенному выше, применим также для отыскания эквивалентного представления стоков и вихрей на сфере.

2. Точечные вихри на неподвижной сфере и инварианты движения. Пусть объемный точечный сток интенсивности M расположен в жидкости между двумя твердыми концентрическими сферами с радиусами a и b. Чтобы компенсировать объемный расход жидкости, необходимо поместить в междусферическом пространстве источники с суммарной интенсивностью $-M$, поскольку объем, в котором происходит течение жидкости, конечен.

Используя теорему Вейса [9], можно доказать, что эквивалентным представлением на S^2 совокупности точечных источников и стоков при $a \to b$ является система полубесконечных нитей распределенных источников и стоков, начинающихся в центре сферы и проходящих через точки расположения точечных источников и стоков (см. п. 5). Линейная плотность каждой нити постоянна и пропорциональна интенсивности соответствующего ей точечного объемного стока. Воспользовавшись сопряженностью потенциала и функции тока течения, которые являются решениями уравнения Бельтрами на сфере [6], получим эквивалентное представление точечного вихря на S^2 в виде полубесконечной вихревой нити постоянной плотности, исходящей из центра S^2.

Найдем поле скорости жидкости на сфере, вызванное N точечными вихрями. Из разложения Гельмгольца имеем

$$\mathbf{V} = \operatorname{rot}\mathbf{A} + \nabla\Phi, \quad \operatorname{rot}\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}, \quad \operatorname{div}\mathbf{V} = \sigma \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{V}$ — скорость жидкости, $\mathbf{A}$, Φ — векторный и скалярный потенциалы, $\boldsymbol{\omega}$ — завихренность, σ — плотность источников в жидкости.

Пусть на сфере нет источников. Тогда в (2.1) $\Phi=0$. Используя калибровку $\mathbf{A}^\circ=\mathbf{A}+\nabla\varkappa$, всегда можно найти такую функцию $\varkappa$, чтобы для нового векторного потенциала было справедливо

$$(2.2)\qquad \Delta\mathbf{A}=-\boldsymbol{\omega},\quad \mathbf{V}=\operatorname{rot}\mathbf{A},\quad \mathbf{A}=-\boldsymbol{\omega}*G_3$$

Здесь G_3 — фундаментальное решение уравнения Лапласа в декартовых координатах x, y, z, звездочка означает свертку в E^3, индекс у нового векторного потенциала опущен.

В дальнейшем везде начало декартовой системы координат помещено в центре сферы радиуса a.

Введем сферические координаты по формулам

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\quad r\geqslant0$$

В соответствии с найденным эквивалентным представлением вихрей на S^2 задаем $\boldsymbol{\omega}$ в (2.2) в виде

$$(2.3)\qquad \boldsymbol{\omega}(r,\theta,\varphi)=\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{1}{r^2\sin\theta}\sum_i^N\Gamma_i\delta(\theta-\theta_i,\varphi-\varphi_i)$$

Здесь θ_i, φ_i — угловые координаты вихрей на сфере, Γ_i — их интенсивности, Γ в *см*^{2}/*сек*, δ — дельта-функция.

Действительно, задание $\boldsymbol{\omega}$ в виде (2.3) удовлетворяет условию независимости плотности вихревых нитей от радиуса и угловых координат. Необходимое условие $\operatorname{div}\boldsymbol{\omega}=0$ выполняется тождественно. Из уравнения движения для идеальной несжимаемой жидкости в отсутствие внешних сил следует, что интенсивности Γ_i при движении жидких частиц остаются постоянными.

Подставив (2.3) в (2.2), получим

$$(2.4)\qquad A=\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\omega(r',\theta',\varphi')\frac{r'^2\sin\theta'dr'd\theta'd\varphi'}{[r^2+r'^2-2rr'b(\theta,\varphi,\theta',\varphi')]^{1/2}}$$

Здесь A и ω — единственные отличные от нуля радиальные компоненты $\mathbf{A}$ и $\boldsymbol{\omega}$, $b(\theta,\varphi,\theta',\varphi')=\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')+\cos\theta\cos\theta'$ — косинус угла между векторами, исходящими из начала координат в точки (r,θ,φ), (r,θ',φ').

Интеграл (2.4) имеет несобственную логарифмическую расходимость по радиусу. Поэтому воспользуемся следующим приемом выделения регулярной части (2.4). Выразим составляющие скорости V_θ, V_φ из (2.2) в сферической системе координат

$$(2.5)\qquad V_\theta=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A}{\partial\varphi},\quad V_\varphi=-\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial\theta}$$

Здесь ввиду (2.2), (2.3) $V_r=0$. Интегралы в правых частях (2.5) сходятся. Вычислив их, получим поле скорости от системы вихревых нитей в E^3

$$(2.6)\qquad V_\theta=-\frac{1}{4\pi r}\sum_i\Gamma_i\frac{\alpha_i}{1-b_i},\quad V_\varphi=-\frac{1}{4\pi r}\sum_i\Gamma_i\frac{\beta_i}{1-b_i}$$

$$\alpha(\varphi,\theta',\varphi')=\sin\theta'\sin(\varphi-\varphi')$$

$$\beta(\theta,\varphi,\theta',\varphi')=\cos\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')-\sin\theta\cos\theta'$$

$$b_i=b(\theta,\varphi,\theta_i,\varphi_i),\quad \alpha_i=\alpha(\varphi,\theta_i,\varphi_i),\quad \beta_i=\beta(\theta,\varphi,\theta_i,\varphi_i)$$

Из (2.5), (2.6), интегрируя по углам, находим потенциал

$$A=-\frac{1}{4\pi}\sum_i \Gamma_i \ln(1-b_i) \tag{2.7}$$

Действительно, (2.7) удовлетворяет везде, за исключением конечного числа точек, как трехмерному уравнению Лапласа, так и сферической части лапласиана, т. е. уравнению Бельтрами на S^2, при условии

$$\sum_i \Gamma_i=0 \tag{2.8}$$

поскольку для (2.7) справедливо

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial A}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A}{\partial\varphi^2}=$$

$$=-\frac{1}{\sin\theta}\sum_i \Gamma_i\delta(\theta-\theta_i,\varphi-\varphi_i)+\sum_i \Gamma_i$$

Из (2.8) следует, что в (2.3) $N>1$. Этот результат является следствием теоремы Кельвина о циркуляции. В самом деле, поскольку объем между двумя бесконечно близкими концентрическими сферами односвязен, то

$$\int \omega dS=\int \mathbf{V}\cdot d\mathbf{l} \tag{2.9}$$

В левой части интегрирование ведется по поверхности сферы, ограниченной замкнутой жидкой линией с элементом длины $d\mathbf{l}$. Если известно, что в одной из двух областей, на которые жидкая линия делит поверхность S^2, расположен точечный вихрь, то из (2.9) следует, что во второй области существует вихрь противоположного знака.

Поместим пару вихрей противоположного знака в точках $\theta_1=0$, $\theta_1^*=\pi$. Из (2.6) находим $V_\theta=0$, $V_\varphi=\Gamma/2\pi a\sin\theta$. Этот результат можно получить непосредственно из (2.9). При малых θ, $V_\varphi\simeq\Gamma/2\pi a\theta$, т. е. поля скорости на сфере и на плоскости вблизи вихря локально-изоморфны.

Найдем уравнения для траекторий N вихрей. На S^2 справедливо

$$V_\theta=a\dot\theta,\quad V_\varphi=a\sin\theta\dot\varphi \tag{2.10}$$

Здесь и далее знак точки сверху означает дифференцирование по времени.

Заменив в (2.6), (2.10) r, θ, φ на a, θ_k, φ_k и опуская члены с $i=k$, получим

$$\begin{aligned}\dot\theta_k&=-\frac{1}{4\pi a^2}\sum_i{}' \Gamma_i\frac{\alpha_{ik}}{1-b_{ik}},\qquad i,k=1,2,\ldots,N.\\ \sin\theta_k\dot\varphi_k&=-\frac{1}{4\pi a^2}\sum_i{}' \Gamma_i\frac{\beta_{ik}}{1-b_{ik}}\end{aligned} \tag{2.11}$$

Здесь и далее знак штрих у знака суммы означает, что $i\neq k$ и введены обозначения: $\alpha_{ik}=\alpha(\varphi_k,\theta_i,\varphi_i)$, $\beta_{ik}=\beta(\theta_k,\varphi_k,\theta_i,\varphi_i)$, $b_{ik}=b(\theta_k,\varphi_k,\theta_i,\varphi_i)$.

Определив из (2.11) θ_k, φ_k и подставив результат в правые части (2.6) при $r=a$, получим скорость жидкости как функцию координат и времени.

Найдем инварианты движения точечных вихрей на сфере. Заметим, что уравнения (2.11) допускают запись в гамильтоновой форме

$$\dot{q}_k=\frac{\partial H}{\partial p_k},\qquad \dot{p}_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k},\qquad q_k=\sqrt{\Gamma_k}\cos\theta_k,\qquad p_k=\sqrt{\Gamma_k}\,\varphi_k \tag{2.12}$$

$$H=\frac{1}{4\pi a^2}\sum_{i<k}\sum\Gamma_i\Gamma_k\ln(1-b_{ik})$$

Тогда из инвариантности H относительно четырехпараметрической группы преобразований, состоящей из сдвигов по времени и вращений системы координат, следует:

$$H=c_0 \tag{2.13}$$

$$\sum_i\Gamma_i\sin\theta_i\cos\varphi_i=c_1,\qquad \sum_i\Gamma_i\sin\theta_i\sin\varphi_i=c_2,\qquad \sum_i\Gamma_i\cos\theta_i=c_3 \tag{2.14}$$

Для скобки Пуассона от интегралов движения (2.14) справедливо соотношение $[c_1, c_2]=-c_3$ и два других, полученных циклической перестановкой индексов. Поскольку эти инварианты коммутируют подобно компонентам кинетического момента в динамике материальных частиц [10], вектор $\mathbf{c}=(c_1, c_2, c_3)$ можно интерпретировать как момент количества движения жидкости на сфере. Этот факт будет доказан в п. 4.

Интересно сравнить полученные четыре инварианта (2.13), (2.14) с инвариантами движения вихрей на плоскости [1]

$$\sum_{i<k}\sum\Gamma_i\Gamma_k\ln r_{ik}^2=a_0,\qquad r_{ik}^2=(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2$$

$$\sum_i\Gamma_i x_i=a_1,\qquad \sum_i\Gamma_i y_i=a_2,\qquad \sum_i\Gamma_i r_i^2=a_3,\qquad i,k=1,2,\ldots,N$$

Здесь x, y — декартовы координаты на E^2, $r_i^2=x_i^2+y_i^2$.

Пусть N вихрей при $t=0$ расположены на сферической поверхности шарового сегмента малой площади ε. Тогда в достаточно близкие моменты времени они также будут находиться в этой ε-окрестности. Выберем декартову систему координат в E^3 с началом в центре S^2 так, чтобы ось z проходила через область ε на S^2 и разложим $\sin\theta$, $\cos\theta$ в (2.13), (2.14) в ряд Тейлора вблизи $\theta=0$ ($\sin\theta\simeq\theta$, $\cos\theta\simeq1-\theta^2/2$). Легко заметить, что в этом случае c_0, c_1, c_2, c_3 с точностью до постоянных множителей переходят соответственно в a_0, a_1, a_2, a_3.

Следовательно, для рассмотренной системы вихрей на S^2 установлен локальный во времени изоморфизм между инвариантами движения на E^2 и S^2. Поскольку установлен также локальный изоморфизм на E^2 и S^2 между скоростями вблизи вихрей, то отсюда следует, что движение вихрей на плоскости локально во времени тождественно движению вихрей по сфере достаточно большого радиуса, если координаты вихрей на S^2 получены с помощью гномонической проекции координат вихрей на плоскости, касательной к сфере, и соответствующие интенсивности вихрей равны.

Поле скорости, а следовательно, и уравнения движения вихрей на сфере можно определить и другим способом. Известно [11], что любое потенциальное течение на гладкой двухсторонней поверхности конформно отображается в соответствующее течение на E^2. Поэтому скорость в произвольной точке $Y\in S^2$ от системы точечных вихрей легко найти, используя стереографическую проекцию координат вихрей на плоскость, касающуюся S^2 в точке Y.

Рассмотрим простейший случай движения пары вихрей противоположного знака на S^2. Расстояние по геодезической между вихрями согласно (2.13) сохраняется постоянным. Выбрав ось z декартовой системы координат параллельно вектору $\mathbf{c}=(0,0,c_3)$, получим из (2.11) $\theta_1=\mathrm{const}$, $\theta_2=\pi-\theta_1$, $\varphi_1=\varphi_2=\omega_0 t$, $\omega_0=-\Gamma/4\pi a^2\sin\gamma$, $\gamma=(\theta_2-\theta_1)/2$. Угол γ связан с постоянной c_0 энергии взаимодействия вихрей. Итак, движение пары вихрей происходит с постоянной угловой скоростью в плоскостях, перпендикулярных $\mathbf{c}$.

3. Динамика завихренности на вращающейся сфере. Пусть на S^2 в неподвижной системе координат задано начальное распределение регулярной ω_p и сингулярной завихренностей

$$\omega(\theta,\varphi)=\omega_p(\theta,\varphi)+\frac{1}{a^2\sin\theta}\sum_i\Gamma_i\delta(\theta-\theta_i,\varphi-\varphi_i) \tag{3.1}$$

Эволюция завихренности описывается уравнением

$$d\omega/dt=0 \tag{3.2}$$

которое не позволяет найти уравнения движения точечных вихрей. Поэтому для определения их траекторий воспользуемся процедурой, изложенной в п. 2.

Функция тока A определяется по формуле

$$A=\omega*G_S,\quad G_S=-\ln(1-b(\theta,\varphi,\theta',\varphi'))/4\pi \tag{3.3}$$

Подставив (3.1) в (3.3) и выразив компоненты скорости V_θ, V_φ по формулам (2.5) при $r=a$, получим

$$\begin{aligned} V_\theta&=-\frac{1}{4\pi a}\sum_i\Gamma_i\frac{\alpha_i}{1-b_i}+\frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\omega_p*G_S)\\ V_\varphi&=-\frac{1}{4\pi a}\sum_i\Gamma_i\frac{\beta_i}{1-b_i}-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\theta}(\omega_p*G_S)\end{aligned} \tag{3.4}$$

Уравнения движения точечных вихрей получаются так же, как и в п. 2

$$\begin{aligned}\dot\theta_k&=-\frac{1}{4\pi a^2}\sum_i{}'\,\Gamma_i\frac{\alpha_{ik}}{1-b_{ik}}+\frac{1}{a^2\sin\theta_k}\frac{\partial}{\partial\varphi_k}(\omega_p*G_S^k)\\ \sin\theta_k\dot\varphi_k&=-\frac{1}{4\pi a^2}\sum_i{}'\,\Gamma_i\frac{\beta_{ik}}{1-b_{ik}}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial\theta_k}(\omega_p*G_S^k)\\ G_S^k&=G_S(\theta_k,\varphi_k,\theta',\varphi')\end{aligned} \tag{3.5}$$

Система уравнений (3.2), (3.4), (3.5) полностью определяет эволюцию континуальной и дискретной завихренности, если начальное распределение (3.1) удовлетворяет вытекающему из (2.9) условию

$$\int\omega(\theta,\varphi)\,dS=0 \tag{3.6}$$

Частным, имеющим прикладной интерес случаем течения жидкости на сфере будет начальное вращение жидкости вокруг оси z как твердого тела с угловой скоростью Ω, тогда в (3.1) $\omega_p(t=0)=2\Omega\cos\theta$.

Пусть N точечных вихрей помещены при $t=0$ на вращающейся сфере в точках (θ_i,φ_i). Перейдем в систему координат θ^s, φ^s, жестко скрепленную со сферой, по формулам $\theta=\theta^s$, $\varphi=\varphi^s+\Omega t$. Тогда (3.2) перейдет в

$$\frac{d\omega^s}{dt}-\frac{2\Omega}{a}V_\theta{}^s\sin\theta^s=0 \tag{3.7}$$

Здесь величины с индексом s измеряются во вращающейся системе координат.

Вид уравнений (3.4), (3.5) в новой системе координат остается прежним, а начальное условие перейдет в $\omega_p^s\ (t=0)=0$. Поскольку нелинейный оператор в (3.7), применяемый к ω^s, не изотропен, то при $t>0$ имеет место $\omega_p^s\neq 0$.

Иная ситуация будет наблюдаться в случае плоского слоя жидкости, имеющего в начальный момент вращение твердого тела. Если на E^2 при $t=0$ помещены точечные вихри и $\omega_p^s(t=0)=0$, то и при $t>0$ выполняется равенство $\omega_p^s=0$, так как эволюционное уравнение для ω^s на E^2, записанное во вращающихся осях, не содержит выделенных направлений.

Следовательно, уравнения (3.5) на вращающейся сфере отличаются от уравнений движения точечных вихрей на вращающейся плоскости наличием интегральных членов в правой части (3.5). Эти члены в рассмотренном случае своим существованием обязаны отличной от нуля кривизне поверхности.

4. Интегральные инварианты распределенной завихренности на сфере. Эти величины те же, что и для точечных вихрей (2.13), (2.14). Легко проверить, используя (3.2), (3.3) и (2.5), что интегралы

(4.1) $$\iint \omega(\theta,\varphi)\,\omega(\theta',\varphi')\ln(1-b(\theta,\varphi,\theta',\varphi'))\,dS\,dS'=C_0$$

(4.2) $$\int \omega(\theta,\varphi)\sin\theta\cos\varphi\,dS=C_1,\qquad \int \omega(\theta,\varphi)\sin\theta\sin\varphi\,dS=C_2,$$

$$\int \omega(\theta,\varphi)\cos\theta\,dS=C_3$$

не зависят явно от времени.

Можно установить и динамический смысл (4.1), (4.2). Инварианты C_i при $i=0$, 1, 2, 3 равны с точностью до множителей полной кинетической энергии жидкости и компонентам вектора момента количества движения жидкости по осям x, y, z

$$T=\frac{1}{2}\rho\int (V_\theta^2+V_\varphi^2)\,dS,\qquad \mathbf{M}=\rho\int \mathbf{r}\times\mathbf{V}\,dS$$

Используя уравнение сохранения массы, можно показать, что в отличие от E^2, импульс жидкости $\mathbf{P}$ на S^2 равен нулю. Конечность T, $\mathbf{M}$, $\mathbf{P}$ есть следствие (3.6). Заметим, что в приближении β-плоскости, принятом в [5], получить условие (3.6) не удается, так как не учитывается топология сферы. Это основное отличие динамики завихренности на S^2 от плоского случая, которое является следствием односвязности и замкнутости поверхности S^2.

Полученные уравнения (3.2) для траекторий точечных вихрей на вращающейся сфере, как отмечалось в п. 1, могут быть полезными для прогноза траекторий тайфунов, ураганов и других подобных им геофизических образований с повышенной концентрацией завихренности по сравнению с окружающей средой.

5. Приложение. Приведем теорему Вейса [9] для частного случая.

Теорема. Пусть в безграничном пространстве имеется безвихревое течение идеальной несжимаемой жидкости, вызванное объемным точечным источником интенсивности M, помещенным на расстоянии $\lambda>b$ от начала координат. Если в область этого течения поместить сферу $r=b$, то потенциал скорости вне сферы можно найти, поместив внутри сферы на радиусе, проходящем через источник:

а) линию распределенных стоков с линейной плотностью $\rho=-M/b$ на отрезке $[0, b^2/\lambda]$;

б) точечный источник интенсивности Mb/λ на расстоянии b^2/λ от центра.

Из приведенной теоремы вытекает следствие.

Следствие. Пусть в безграничном пространстве имеется безвихревое течение идеальной несжимаемой жидкости, вызванное системой N точечных источников и стоков с интенсивностями M_i, помещенных на расстояниях $0<r_i<a$ от начала координат. Пусть выполнено условие $\sum\limits_i M_i=0$. Если в область этого течения поместить сферу $r=a$, то потенциал скорости внутри сферы можно найти, поместив вне сферы на радиусах, проходящих через каждый источник M_i:

а) полубесконечную линию распределенных источников с линейной плотностью M_i/a, исходящую из точки a^2/r_i;

б) источник интенсивности $M_i a/r_i$ на расстоянии a^2/r_i от центра.

Основная идея доказательства следствия состоит в применении теоремы Вейса к линиям распределенных источников, последовательно компенсирующих линии распределенных стоков внутри сферы.

Чтобы получить потенциал скорости от источников и стоков, расположенных между двумя концентрическими сферами, необходимо последовательно построить инверсные изображения двух основных систем источников, стоков и линий, полученных из теоремы Вейса и ее следствия.

Интенсивности и координаты точечных инверсных изображений какого-либо источника M, расположенного на расстоянии λ от центра двух концентрических сфер a, $b(b<\lambda<a)$, занумерованные в порядке удаления по радиусу от источника M, будут следующими:

$$M_1^+=Ma/\lambda, \quad r_1^+=a^2/\lambda; \quad M_1^-=Mb/\lambda, \quad r_1^-=b^2/\lambda \tag{5.1}$$

$$M_{2n}^{\pm}=M\left(\frac{a}{b}\right)^{\pm n}, \quad r_{2n}^{\pm}=\lambda\left(\frac{a}{b}\right)^{\pm 2n}; \quad M_{2n+1}^{\pm}=M_1^{\pm}\left(\frac{a}{b}\right)^{\pm n},$$

$$r_{2n+1}^{\pm}=r_1^{\pm}\left(\frac{a}{b}\right)^{\pm 2n}.$$

Здесь знак плюс относится к изображениям вне сферы a, знак минус — к изображениям внутри сферы b.

Из (5.1) легко найти плотность инверсных изображений точечных источников на единицу длины при $b\to a$ в зависимости от расстояния r от центра

$$\rho_0=m(a/r)^{1/2}, \quad m=\text{const} \tag{5.2}$$

Здесь m в *см²/сек*.

Применяя к (5.2) теорему Вейса и следствие, при $b\to a$ окончательно получаем в качестве эквивалентного представления источника на S^2: 1) полубесконечную прямую распределенных источников постоянной плотности m, исходящую из центра S^2; 2) точечный сток в центре S^2 с интенсивностью $M=-ma$. Точечные источники и стоки в центре в силу условия $\sum\limits_i M_i=0$ взаимно уничтожаются.

Следовательно, доказана теорема о том, что течение идеальной несжимаемой жидкости между двумя бесконечно близкими концентрическими сферами радиуса a, вызванное системой точечных источников и стоков

M_i, эквивалентно течению жидкости на поверхности воображаемой сферы a в E^3, если каждый источник и сток заменить исходящей из центра сферы полубесконечной прямой распределенных источников и стоков с линейной плотностью $m_i = M_i / a$.

В заключение отметим, что фундаментальное решение G_S уравнения Бельтрами на S^2 можно найти более простым путем [12], не используя метода спуска по числу переменных. Достоинства изложенного метода решения состоят в том, что полученная теорема и следствие дают возможность рассчитывать течение идеальной несжимаемой жидкости между двумя концентрическими сферами, вызванное распределением объемных стоков, источников и вихрей.

Поступила 23 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
2. *Bauer L., Morikawa G. K.* Stability of rectilinear geostrophic vortices in stationary equilibrium. Phys. Fluids, 1976, vol. 19, No. 7.
3. *Новиков Е. А.* Динамика и статистика системы вихрей. ЖЭТФ, 1975, т. 68, вып. 5.
4. *Edwards S. F., Taylor J. B.* Negative temperature states of two-dimensional plasmas and vortex fluids. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1974, vol. 336, No. 1606.
5. *Friedlander S.* Interaction of vortices in a fluid on the surface of a rotating sphere. Tellus, 1975, vol. 27. No. 1.
6. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
7. *Богомолов В. А.* Движение идеальной жидкости постоянной плотности при наличии стоков. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 4.
8. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1967.
9. *Милн-Томсон Л. М.* Теоретическая гидродинамика. М., «Мир», 1964.
10. *Голдстейн Г.* Классическая механика. М., «Наука», 1975.
11. *Ламб Г.* Гидродинамика.М.— Л., Гостехиздат, 1947.
12. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1972.