МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1977

УДК 532.5+541.124 : 503.5

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕУСТОЙЧИВОГО РЕЖИМА РАБОТЫ ХИМИЧЕСКОГО РЕАКТОРА КАК ОБЪЕКТА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ С ПОМОЩЬЮ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ [1]

В. А. БУЧИН

(Москва)

В химической технологии известно много реакций, которые позволяют дешевым и быстрым способом получить нужный продукт. Однако их часто невозможно осуществить на практике из-за развивающейся в них неустойчивости. Примером таких реакций могут служить реакции окисления углеводородов (метана, этана, этилена и др.) [1]. Ценными промежуточными продуктами здесь являются альдегиды, спирты, окиси. Существует много случаев, когда реакция может протекать, например, в трех (или большем числе) режимах [1–7], из которых первый и третий устойчивы, а второй неустойчив. Наибольшего выхода ценных промежуточных продуктов во многих случаях следует ожидать при работе во втором режиме, так как при работе в первом режиме их выход невелик из-за медленной скорости реакции (невелики температуры), а в третьем режиме их выход невелик из-за большой скорости реакции (температуры очень большие; ценные промежуточные продукты успевают прореагировать до продуктов глубокого окисления – воды и углекислого газа). Наиболее выгоден неустойчивый второй режим, ибо он идет при некоторых промежуточных температурах. Отметим также, что возникновение неустойчивости протекания химической реакции не обязательно связано с существованием нескольких режимов. Даже в том случае, когда существует единственный режим работы химического реактора, неустойчивость может возникнуть при увеличении его пространственных размеров. Как в том, так и в другом случае возникает необходимость стабилизировать рассматриваемый режим с помощью некоторой системы принудительного подавления сопутствующей ему неустойчивости.

Из теории автоматического управления известно, что в линейной системе с помощью программного управления (отсутствует обратная связь) невозможно подавить неустойчивые возмущения. С его помощью можно лишь несколько изменить величины критических параметров. Поэтому стабилизирующие системы управления следует искать среди управлений с обратной связью. Известно, что вопросы стабилизации объектов с сосредоточенными параметрами хорошо разработаны. Напротив, вопросы стабилизации объектов с распределенными параметрами стали предметом изучения лишь в последние несколько лет. В Киеве с середины 60-х годов стали разрабатывать квазиконтинуальные управляющие устройства [8], с помощью которых были решены задачи подавления различных видов неустойчивостей в плазме [9, 10]. Подобные распределенные системы управления были использованы также и для подавления неустойчивостей в других средах (например, при гидродинамических течениях [11–13]). Возможность изменения конечного числа точек дискретного спектра, соответствующего распределенному объекту управления, с помощью распределенной системы управления изучалась также в [14–17].

Сложность распределенных систем управления резко возрастает, как только требуется стабилизировать неустойчивость течений или состояний сплошных сред

[1] Данная работа основана на результатах, содержащихся в отчете Института механики МГУ «Стабилизация неустойчивого режима работы химического реактора как объекта с распределенными параметрами с помощью сосредоточенных систем управления» 1975 г. Основные идеи развиваемого здесь подхода к реализации неустойчивых состояний распределенных механических систем содержались также в докладе Л. И. Седова «О перспективных направлениях и задачах в механике сплошных сред», прочитанном на IV Всесоюзном съезде по прикладной и теоретической механике (май 1976 г., Киев).

существенно неоднородных по пространственным переменным, а вместе с тем возрастают трудности технической реализации подобных управлений. Так, распределение параметров в реагирующей среде, протекающей в химическом реакторе, как правило, неоднородно по пространственным переменным.

К настоящему времени опубликованы работы, посвященные проблемам стабилизации неустойчивых реакций, многие из которых приведены, например, в библиографии к монографии [7]. В этих работах химический реактор рассматривается как сосредоточенная система, что во многих случаях является слишком грубым приближением.

Настоящая работа посвящена стабилизации неустойчивого режима работы химического реактора с учетом распределения параметров по его длине. Поставлена и решена задача конструирования управляющей системы с сосредоточенными параметрами, которая стабилизирует неустойчивость посредством внесения возмущений в поток концентрации реагирующего вещества на входе в реактор. Величина вносимых возмущений вырабатывается системой обратной связи по показаниям конечного числа датчиков, расположенных по длине реактора.

1. Рассмотрим модельную задачу о стабилизации неустойчивого режима протекания химической реакции в изотермическом реакторе. Задачу будем исследовать в одномерном приближении, т. е. пренебрежем изменением исследуемых величин в поперечном сечении реактора. Будем считать химический реактор трубой длины l. Будем предполагать, что скорость и плотность реагирующей смеси до реактора, в реакторе и за ним постоянны и равны u_0 и ρ_0 соответственно. Химическая реакция в реакторе может быть описана с помощью лишь одного уравнения для концентрации c вещества, уничтожающегося в ходе реакции. Коэффициент диффузии этого вещества D равен константе внутри реактора. Вне реактора диффузией пренебрегаем.

Введем безразмерные переменные по формулам $x=lx_*$, $t=lt_*/u_0$, $\Phi=u_0\Phi_*/l$, где c — безразмерная величина. Будем считать, что скорость химической реакции $\Phi(c)$ — непрерывная дифференцируемая функция своего аргумента. В дальнейшем индекс * у безразмерных величин писать не будем.

Нестационарное уравнение для изменения концентрации c внутри реактора в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-\Phi(c) \tag{1.1}$$

Здесь $\mathrm{Pe}=u_0l/D$ — число Пекле.

Уравнение для стационарного распределения концентрации $c_0=c_0(x)$, соответствующего стационарному режиму работы химического реактора, следует из уравнения (1.1), если положить нулем производную по времени.

Получим линеаризованное уравнение для развития малых возмущений $c_1(t, x)$ стационарного распределения концентраций $c_0(x)$

$$\frac{\partial c_1}{\partial t}+\frac{\partial c_1}{\partial x}=\frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2}-\frac{\partial\Phi(c_0(x))}{\partial c}c_1$$

В случае стационарного протекания химической реакции граничные условия для концентрации c_0 на входе и выходе из реактора имеют вид [7]

$$-\frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{\partial c_0}{\partial x}+c_0=c_{00}\quad (x=0),\qquad \frac{\partial c_0}{\partial x}=0\quad (x=1) \tag{1.2}$$

Здесь c_{00} — концентрация реагирующего вещества, подаваемого в реактор. Граничные условия для концентрации c (1.2) останутся справедливыми и при нестационарном протекании химической реакции в том случае, когда вне реактора можно пренебречь процессами диффузии [18]. Поэтому для малых возмущений c_1 на входе и выходе из реактора имеем те же граничные условия (1.2), причем считаем, что правая часть в (1.2) равна нулю.

2. Поставленная задача для c_0 может иметь несколько решений [2–6]. Это соответствует тому, что химический реактор может работать в нескольких стационарных режимах. В [2, 19] исследована в линейном приближении устойчивость стационарных режимов реактора. Для этого в них было рассмотрено поведение слабых нестационарных возмущений концентрации. Задача решена методом разделения переменных $c_1=e^{\lambda t}y$.

Если в спектре собственных значений задачи

$$\lambda y+y'=\frac{1}{\mathrm{Pe}}y''-\frac{\partial\Phi(c_0(x))}{\partial c}y \tag{2.1}$$

$$-\frac{1}{\mathrm{Pe}}y'+y=0\quad(x=0),\quad y'=0\quad(x=1)$$

все собственные числа $\lambda_n<0$, рассматриваемый стационарный режим устойчив, если же хотя бы одно собственное число положительно, то режим неустойчив.

Во многих случаях наиболее выгодным может оказаться неустойчивый режим протекания химической реакции. Для реализации такого режима необходима система воздействия на протекание химической реакции, принудительно подавляющая его неустойчивость.

Дальнейшее изложение посвящено построению таких стабилизирующих систем.

3. Пусть имеется неустойчивый стационарный режим работы химического реактора. Стабилизирующие системы управления будем искать в следующем виде. На входе в реактор в поток реагирующего вещества непрерывно вносится малое нестационарное возмущение. Его величина вырабатывается линейной системой обратной связи по показаниям конечного числа датчиков концентрации этого вещества, расположенных по длине реактора. При этом для функции y, удовлетворяющей уравнению (2.1), получаем следующие обобщенные краевые условия:

$$-\frac{1}{\mathrm{Pe}}y'+y=\varphi(\lambda)\quad(x=0),\quad y'=0\quad(x=1) \tag{3.1}$$

$$\varphi(\lambda)=F(y(\lambda,x)) \tag{3.2}$$

Здесь $\varphi(\lambda)$ — линейный непрерывный функционал от $y(\lambda, x)$. Конкретное выражение для функционала $F(y(\lambda, x))$ зависит, во-первых, от конструкции следящей системы (системы датчиков, измеряющих концентрацию по длине реактора) и, во-вторых, от того, как эта информация используется в цепи управления.

Система управления рассматриваемого вида будет стабилизировать неустойчивый стационарный режим работы химического реактора, если все собственные числа обобщенной краевой задачи (2.1), (3.1) лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости спектрального параметра λ.

4. Выведем уравнения для собственных значений краевой задачи (2.1), (3.1), (3.2) с произвольным линейным непрерывным функционалом $F(y)$.

Введем в рассмотрение функцию $p(\lambda, x)$

$$y(\lambda,x)=\exp(^1/_2\mathrm{Pe}\,x)p(\lambda,x)+\varphi(\lambda) \tag{4.1}$$

Уравнение и граничные условия для функции $p(\lambda, x)$ имеют вид

(4.2)

$$\lambda p=\frac{1}{\mathrm{Pe}}p''-\left[\Phi_c'(c_0(x))+\frac{1}{4}\mathrm{Pe}\right]p-[\lambda+\Phi_c'(c_0(x))]\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{Pe}\,x\right)\varphi(\lambda)$$

(4.3) $$-\frac{1}{\mathrm{Pe}}p'+\frac{1}{2}p=0\quad(x=0),\quad \frac{1}{\mathrm{Pe}}p'+\frac{1}{2}p=0\quad(x=1)$$

Однородное уравнение, соответствующее уравнению (4.2), следует из него, если положить $\varphi(\lambda)\equiv0$

(4.4) $$\lambda p_0=\frac{1}{\mathrm{Pe}}p_0''-\left[\Phi_c'(c_0(x))+\frac{1}{4}\mathrm{Pe}\right]p_0$$

Наряду с функционалом $F(y(\lambda, x))$ введем в рассмотрение функционал F_1 такой, что $F(y(\lambda, x))=F_1(p(\lambda, x))$.

Используя функцию Грина $G(x, \xi, \lambda)$ краевой задачи (4.3), (4.4), решение уравнения (4.2) можно записать следующим образом:

(4.5) $$p(\lambda,x)=\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)[\lambda+\Phi_c'(c_0(\xi))]\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{Pe}\,\xi\right)d\xi F_1(p(\lambda,x))$$

Подействуем на обе части равенства (4.5) функционалом F_1. В результате получим

$$F_1(p(\lambda,x))\left\{1-F_1\left(\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)[\lambda+\Phi_c'(c_0(\xi))]\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{Pe}\,\xi\right)d\xi\right)\right\}=0$$

Полученное выражение обращается в нуль в двух случаях: либо первый, либо второй сомножитель равен нулю. Случай, когда $F_1(p(\lambda, x))$ обращается в нуль при λ равном какому-нибудь собственному значению задачи (4.3), (4.4) означает, что рассматриваемая система управления не взаимодействует с модой, отвечающей данному собственному значению, оставляя ее невозмущенной. В том случае, когда корень уравнения

$$F_1(p(\lambda, x))=0$$

не есть собственное значение задачи (4.3), (4.4), этот корень не является собственным значением краевой задачи (4.2), (4.3), так как для функции $p(\lambda, x)$ справедливо равенство $p(\lambda, x)\equiv0$. Последнее следует из того, что функция $p(\lambda, x)$ при этом есть решение однородной краевой задачи (4.3), (4.4) при значении λ, отличном от собственного значения.

Таким образом, уравнение для собственных значений обобщенной краевой задачи (4.2), (4.3) имеет вид

(4.6) $$F_1(z(\lambda, x))=1$$

(4.7) $$z(\lambda,x)=\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda)[\lambda+\Phi_c'(c_0(\xi))]\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{Pe}\,\xi\right)d\xi$$

Отметим, что функция z есть решение дифференциального уравнения

(4.8)

$$\lambda z=\frac{1}{\mathrm{Pe}}z''-\left[\Phi_c'(c_0(x))+\frac{1}{4}\mathrm{Pe}\right]z-[\lambda+\Phi_c'(c_0(x))]\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{Pe}\,x\right)$$

с граничными условиями (4.3).

Получим еще одну форму уравнения (4.6), а также разложение $z(\lambda, x)$ по собственным функциям краевой задачи (4.3), (4.4).

Разложим функцию Грина $G(x, \xi, \lambda)$ в ряд по собственным функциям $q_1(x), q_2(x), \ldots$ краевой задачи (4.3), (4.4) [20].

$$G(x,\xi,\lambda) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k(x)q_k(\xi)}{\lambda-\lambda_k} \tag{4.9}$$

Подставив (4.9) в уравнение (4.6), после преобразований получим

$$1+\sum_{k=1}^{\infty} F_{1k}\frac{\tau_k\lambda+\nu_k}{\lambda-\lambda_k}=0 \tag{4.10}$$

Здесь $F_{1k}=F_1(q_k(x))$, τ_k, ν_k – коэффициенты следующих разложений:

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{Pe} x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\tau_k q_k(x) \tag{4.11}$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{Pe} x\right)\Phi_c'(c_0(x))=\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k q_k(x)$$

Из соотношения (4.7) с учетом разложения функции $G(x, \xi, \lambda)$ (4.9) получаем искомое разложение для функции $z(\lambda, x)$

$$z(\lambda,x)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tau_k\lambda+\nu_k}{\lambda-\lambda_k}q_k(x) \tag{4.12}$$

5. Переходим к построению класса управляющих систем, стабилизирующих неустойчивый режим работы химического реактора. Все управляющие системы из этого класса могут быть описаны при помощи следующей схемы. Химическая реакция протекает в реакторе, безразмерные координаты x точек которого заключены между нулем и единицей. Внутри реактора в точках с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_N$ помещены датчики концентрации $(0<x_1<x_2<\ldots<x_N<1)$, размерами которых пренебрегаем. Сигналы от датчиков, расположенных в точках $x_1, x_2, \ldots, x_N$, попадают в устройства $L_1, L_2, \ldots, L_N$, в которых они умножаются на константы $b_1, b_2, \ldots, b_N$ соответственно. После этого результаты действия $L_1, L_2, \ldots, L_N$ суммируются в сумматоре Σ. Полученный таким образом сигнал определяет величину малого нестационарного возмущения потока концентрации реагента, которое вносится на входе в реактор.

Управляющие системы, описанные выше, полностью определяются заданием $2N$ параметров $(b_1, b_2, \ldots, b_N, x_1, x_2 \ldots, x_N)$. Будем называть такие системы сосредоточенными в отличие от распределенных управляющих систем [8–17], в которых как измерение, так и управляющее воздействие распределено по пространственной координате.

Стабилизирующая управляющая система из описанного выше класса будет найдена, если удастся определить значения параметров $b_1, b_2, \ldots \ldots, b_N, x_1, x_2, \ldots, x_N$ и значение N, при которых неустойчивый режим протекания химической реакции станет устойчивым.

Отметим, что при этом нет необходимости следить за каждой неустойчивой модой и организовывать избирательное воздействие на нее. Искомая управляющая система как измеряет, так и воздействует на все моды, стабилизируя неустойчивые из них и не дестабилизируя устойчивые. Отпадает также необходимость конечномерной аппроксимации распределенной системы.

Математически эта задача эквивалентна отысканию среди множества функционалов вида

$$F(y(\lambda,x))=\sum_{m=1}^{N} b_m y(\lambda, x_m) \tag{5.1}$$

такого функционала, для которого обобщенная краевая задача (4.2), (4.3) имеет собственные значения лишь в левой полуплоскости комплексной плоскости λ.

В предыдущем пункте было показано, что для этого необходимо и достаточно, чтобы у всех решений уравнения (4.6) (или (4.10)) были отрицательные действительные части.

Функционал $F_1(p(\lambda, x))$ связан с функционалом $F(y(\lambda, x))$. В силу (3.2), (4.1) и (5.1) для функционала $F_1(p(\lambda, x))$ имеем

$$F_1(p(\lambda,x))=\sum_{m=1}^{N} a_m p(\lambda, x_m) \tag{5.2}$$

Здесь константы a_m и b_m связаны соотношениями

$$a_m=b_m \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Pe} x_m\right)\left(1-\sum_{k=1}^{N} b_k\right)^{-1} \tag{5.3}$$

$$b_m=a_m \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{Pe} x_m\right)\left[1+\sum_{k=1}^{N} a_k \exp\left(-\frac{1}{2}\operatorname{Pe} x_m\right)\right]^{-1},$$

$$m=1,2,\ldots,N$$

6. Переходим к отысканию функционалов $F_1(p(\lambda, x))$ вида (5.2), таких, что обобщенная краевая задача (4.3), (4.4) имеет собственные числа лишь в левой полуплоскости комплексной плоскости λ.

Без ограничения общности будем предполагать, что n первых собственных чисел краевой задачи (4.2), (4.3) строго положительны, а все остальные ее собственные числа строго отрицательны. В силу осцилляционной теоремы Штурма [21] можно записать следующие неравенства:

$$\lambda_1>\lambda_2>\ldots>\lambda_n>0,\quad 0>\lambda_{n+1}>\lambda_{n+2}>\ldots,\quad \lambda_m\to-\infty\quad (m\to\infty)$$

Собственные числа задачи (4.3), (4.4) обозначим $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$

Будем искать функционал F_1 в следующем виде:

$$F_1=\sum_{i=1}^{n} \beta_i H_i,\quad H_i(f(x))=\sum_{m=1}^{N}(x_{m+1}-x_m)\,q_i(x_m)f(x_m),\quad x_{N+1}=1, \tag{6.1}$$

$$i=1,2,\ldots,n$$

Здесь β_i — константы, подлежащие определению; $f(x)$ — произвольная функция, $q_i(x)$ — i-я собственная функция краевой задачи (4.3), (4.4).

С помощью соотношений (5.2), (5.3) и (6.1) получаем выражение констант a_m, а следовательно, и b_m через константы β_i

$$a_m=\sum_{i=1}^{n}(x_{m+1}-x_m)\,q_i(x_m)\,\beta_i \tag{6.2}$$

Уравнение (4.10) для определения собственных значений $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ с учетом (6.1) имеет вид

$$1+Q_n(\lambda)+R_n(\lambda)=0 \tag{6.3}$$

$$Q_n(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{N}(x_{m+1}-x_m)\,q_i(x_m)\,q_k(x_m)\,\frac{\tau_k\lambda+\nu_k}{\lambda-\lambda_k} \tag{6.4}$$

$$R_n(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{m=1}^{N}(x_{m+1}-x_m)\,q_i(x_m)\,q_k(x_m)\,\frac{\tau_k\lambda+\nu_k}{\lambda-\lambda_k} \tag{6.5}$$

С целью упрощения изложения зафиксируем значения $x_m=m/(N+1)$, $m=1, 2, \ldots N$.

Теперь искомыми величинами являются константы β_i, $i=1, 2, \ldots, n$ и число N.

Для определения констант β_i и числа N поступим следующим образом. Устремим число N в уравнении (6.3) к бесконечности. Подберем константы β_i так, чтобы полученное предельное уравнение имело корни лишь в левой полуплоскости комплексной плоскости λ. После этого подставим найденные значения β_i в уравнение (6.3) и определим те значения N, при которых все его корни имеют отрицательные действительные части. Это гарантирует, что управление, стабилизируя неустойчивые моды, не дестабилизирует устойчивые.

Отметим при этом, что, вообще говоря, неправомерно подменять изучение уравнения (6.3) приближенным уравнением, в котором стоит сумма по k лишь конечного числа первых членов. В этом случае (без специального исследования) нельзя утверждать, что построенное управление не дестабилизирует устойчивых мод.

7. Определим теперь константы β_i. Суммы по m есть интегральные суммы для интегралов вида

$$\int_0^1 q_i(x)\,q_k(x)\,dx=\delta_{ik}$$

Здесь δ_{ik} — символ Кронекера. Следовательно, при $N\to\infty$ имеем

$$Q_{n\infty}(\lambda)=\lim_{N\to\infty}Q_n(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\frac{\tau_i\lambda+\nu_i}{\lambda-\lambda_i}$$

Можно показать, что равномерно по всем λ, $\operatorname{Re}\lambda\geqslant0$, при $N\to\infty$ справедливо

$$R_{n\infty}(\lambda)=\lim_{N\to\infty}R_n(\lambda)\equiv0$$

Таким образом, уравнение (6.3) при $N\to\infty$, $\operatorname{Re}\lambda\geqslant0$ имеет вид

$$1+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\frac{\tau_i\lambda+\nu_i}{\lambda-\lambda_i}=0 \tag{7.1}$$

Выберем константы β_i так, чтобы все корни Λ_k, $k=1, 2, \ldots, n$ уравнения (7.1) имели отрицательные действительные части. Эта задача разрешима для почти любого набора из n чисел $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$, которые хотим видеть нулями уравнения (7.1), $\operatorname{Re}\Lambda_k<0$, $k=1, 2, \ldots, n$. Система уравнений для констант β_i, подлежащих определению, имеет вид

$$1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i\Lambda_k+\nu_i}{\Lambda_k-\lambda_i}\beta_i=0,\qquad k=1,2,\ldots,n \tag{7.2}$$

Решение системы уравнений (7.2) можно получить в явном виде.

Система (7.2) эквивалентна следующей системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{\lambda_i-\Lambda_k}=1+a,\qquad k=1,2,\ldots,n \tag{7.3}$$

$$a=\sum_{i=1}^{n}\tau_i\beta_i,\quad \gamma_i=(\tau_i\lambda_i+\nu_i)\beta_i,\quad i=1,2,\ldots,n \tag{7.4}$$

Решение системы (7.3) имеет вид [22]

$$\gamma_i=(1+a)\prod_{k=1}^{n}(\lambda_i-\Lambda_k)\Big/\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(\lambda_i-\lambda_k),\quad i=1,2,\ldots,n \tag{7.5}$$

С помощью соотношений (7.4) и (7.5) находим явное выражение для $1+a$ через λ_i, Λ_i, τ_i, ν_i, $i=1, 2, \ldots, n$, после чего с помощью (7.4), (7.5) получаем значения констант

$$\beta_i=\frac{1}{\tau_i\lambda_i+\nu_i}\,\frac{1}{1-\Sigma^\circ}\prod_{k=1}^{n}(\lambda_i-\Lambda_k)\Big/\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(\lambda_i-\lambda_k),\qquad i=1,2,\ldots,n \tag{7.6}$$

$$\Sigma^\circ=\sum_{m=1}^{n}\frac{\tau_m}{\tau_m\lambda_m+\nu_m}\prod_{k=1}^{n}(\lambda_m-\Lambda_k)\Big/\prod_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n}(\lambda_m-\lambda_k)$$

Можно показать, что при $N\to\infty$ для величин Λ_{n+1}, $\Lambda_{n+2}, \ldots$ выполнены равенства $\Lambda_k=\lambda_k$, $k=n+1, n+2, \ldots$

Интуитивно ясно, что уравнение (6.3), в которое подставлены константы β_i, определенные по формулам (7.6), может иметь нули лишь в левой полуплоскости комплексной плоскости λ и при конечных значениях N. Найдем, при каких N это справедливо.

8. Чтобы получить оценку для N снизу, представим уравнение (6.3) в виде

$$1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i\lambda+\nu_i}{\lambda-\lambda_i}\beta_i+Q_n(\lambda)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i\lambda+\nu_i}{\lambda-\lambda_i}\beta_i+R_n(\lambda)=0 \tag{8.1}$$

Здесь $Q_n=Q_n(\lambda, N)$, $R_n=R_n(\lambda, N)$ определены с помощью соотношений (6.4), (6.5).

Уравнение (8.1) не будет иметь нулей в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$ одновременно с уравнением (7.1) для всех значений N, при которых на мнимой оси $\operatorname{Re}\lambda=0$ выполнено неравенство

$$\left|1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i\lambda+\nu_i}{\lambda-\lambda_i}\beta_i\right|>\left|Q_n-\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i\lambda+\nu_i}{\lambda-\lambda_i}\beta_i+R_n\right|,\qquad \operatorname{Re}\lambda=0 \tag{8.2}$$

Докажем это утверждение. Все слагаемые в уравнении (8.1) есть аналитические функции от λ в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$, за исключением конечного числа точек $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$. Все эти функции имеют конечный предел при $\lambda\to\infty$, $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$, поэтому из справедливости неравенства (8.2) на мнимой оси $\operatorname{Re}\lambda=0$ следует справедливость его на полуокружности $|\lambda|=r_0$, $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$ для достаточно больших значений $r_0(r_0>\lambda_1)$. Если выполнено неравенство (8.2), то выполнено и неравенство

$$\left|p_n(\lambda)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i\lambda+\nu_i}{\lambda-\lambda_i}\beta_i\right)\right|>$$

$$>\left|p_n(\lambda)\left(Q_n-\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i\lambda+\nu_i}{\lambda-\lambda_i}\beta_i+R_n\right)\right|,\qquad \operatorname{Re}\lambda=0$$

Здесь $p_n(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)$. Верно и обратное утверждение. Функции

$$f_1(\lambda)=p_n(\lambda)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i\lambda+\nu_i}{\lambda-\lambda_i}\beta_i\right)$$

$$f_2(\lambda)=p_n(\lambda)\left(Q_n-\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i\lambda+\nu_i}{\lambda-\lambda_i}\beta_i+R_n\right)$$

аналитичны при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$. Из теоремы Руше [23] вытекает, что функции $f_1(\lambda)$ и $f_1(\lambda)+f_2(\lambda)$ имеют в области $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$, $|\lambda|<r_0$ одинаковое число нулей. Переходя к пределу $r_0\to\infty$, получаем, что из справедливости неравенства (8.2) вытекает отсутствие нулей у уравнения (6.3) при $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$.

Найдем значения N, при которых выполнено неравенство (8.2). Это неравенство будет заведомо выполнено, если справедливо неравенство

$$\min_{\operatorname{Re}\lambda=0}\left|1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i\lambda+\nu_i}{\lambda-\lambda_i}\beta_i\right|>\max_{\operatorname{Re}\lambda=0}\left|Q_n-\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i\lambda+\nu_i}{\lambda-\lambda_i}\beta_i+R_n\right| \tag{8.3}$$

Обозначим левую часть (8.3) буквой d, а правую — d_1. Левую часть неравенства (8.3) с учетом (7.1) и (7.2) можно записать иначе

$$d=\left|1+\sum_{i=1}\tau_i\beta_i\right|\min_{\operatorname{Re}\lambda=0}\left|\prod_{k=1}\left(\frac{\lambda-\Lambda_k}{\lambda-\lambda_k}\right)\right| \tag{8.4}$$

Из выражения (8.4) видно, что d не зависит от N и не обращается в нуль. Значение d можно без труда вычислить на ЭВМ.

Правая часть неравенства (8.3) зависит от N. Покажем, что всегда найдется такое значение N, при котором это неравенство будет выполнено. Для этого с учетом (6.4) и (6.5) преобразуем выражение для d_1 следующим образом:

$$d_1=\max_{\operatorname{Re}\lambda=0}\left|Q_n-\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_i\lambda+\nu_i}{\lambda-\lambda_i}\beta_i+R_n\right|\leqslant \tag{8.5}$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|\sum_{k=1}^{n}\max_{\operatorname{Re}\lambda=0}\left|\frac{\tau_k\lambda+\nu_k}{\lambda-\lambda_k}\right|\left|\frac{1}{N+1}\sum_{m=1}^{N}q_i\left(\frac{m}{N+1}\right)\times\right.$$

$$\left.\times q_k'\left(\frac{m}{N+1}\right)-\delta_{ik}\right|+\sum_{i=1}|\beta_i|\max_{\operatorname{Re}\lambda=0}\left|\frac{1}{N+1}\sum_{m=1}q_i\left(\frac{m}{N+1}\right)z_n\left(\lambda,\frac{m}{N+1}\right)\right|$$

$$(8.6)\qquad z_n(\lambda, x) = -\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\tau_k\lambda + \nu_k}{\lambda - \lambda_k} q_k(x)$$

Оценим входящие в (8.5) члены. Нетрудно показать, что

$$(8.7)\qquad \max_{\mathrm{Re}\,\lambda=0} \left| \frac{\tau_k\lambda+\nu_k}{\lambda-\lambda_k} \right| = \max \left\{ \left| \frac{\nu_k}{\lambda_k} \right|, |\tau_k| \right\}, \qquad k=1, 2, \ldots, n$$

Оценивая в (8.5) по N суммы, содержащие лишь функции $q_i(x)$ и $q_k(x)$, можно получить

$$(8.8)\qquad \left| \frac{1}{N+1} \sum_{m=1}^{N} q_i\left(\frac{m}{N+1}\right) q_k\left(\frac{m}{N+1}\right) - \delta_{ik} \right| \leqslant \chi_{ik} \frac{1}{N+1}, \quad i, k=1, 2, \ldots, n$$

$$\chi_{ik} = \max_{0\leqslant x\leqslant 1} \{ |q_i(x)|\,|q_k(x)| + |q_i(x)|\,|q_k'(x)| + |q_i'(x)|\,|q_k(x)| \}$$

Осталось оценить по N следующие выражения:

$$h_i = \max_{\mathrm{Re}\,\lambda=0} \left| \frac{1}{N+1} \sum_{m=1}^{N} q_i\left(\frac{m}{N+1}\right) z_n\left(\lambda, \frac{m}{N+1}\right) \right|, \qquad i=1, 2, \ldots, n$$

Используя условие ортогональности в метрике $L_2(0, 1)$ функций $q_i(x)$, $i=1,2, \ldots, n$, и $z_n(\lambda, x)$, которое следует из соотношения (8.6), можно получить оценки для величин h_i

$$(8.9)\qquad h_i \leqslant \frac{\varkappa_i}{N+1}, \qquad i=1, 2, \ldots, n$$

$$\varkappa_i = [3 \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |q_i(x)| + {}^1\!/_2 \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |q_i'(x)|] \max_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ \mathrm{Re}\,\lambda=0}} |z_n(\lambda, x)| +$$

$$+ {}^1\!/_2 \max_{0\leqslant x\leqslant 1} |q_i'(x)| \max_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ \mathrm{Re}\,\lambda=0}} |z_n'(\lambda, x)|, \qquad i=1, 2, \ldots, n$$

Получим необходимые неравенства для максимальных значений функции $z_n(\lambda, x)$ и ее производной при изменении x от нуля до единицы и $\mathrm{Re}\,\lambda=0$.

С учетом уравнения и граничных условий для функции $z(\lambda, x)$ (4.8), (4,3), а также выражений (4.12) и (8.6) для функций $z(\lambda, x)$ и $z_n(\lambda, x)$, можно получить

$$(8.10)\qquad z_n(\lambda, x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{Pe}\, x\right) + \psi(\lambda, x) + v(\lambda, x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\tau_k\lambda+\nu_k}{\lambda-\lambda_k} q_k(x)$$

$$\psi(\lambda, x) = \frac{(2\zeta-\mathrm{Pe})\exp\zeta x + (2\zeta+\mathrm{Pe})\exp(2\zeta-\zeta x)}{(2\zeta+\mathrm{Pe})^2\exp 2\zeta - (2\zeta-\mathrm{Pe})^2} 2\,\mathrm{Pe}$$

$$\zeta = \zeta(\lambda) = {}^1\!/_2[\mathrm{Pe}(4\lambda+\mathrm{Pe})]^{1/2}, \qquad \zeta(0) = \mathrm{Pe}/2$$

Функция $v(\lambda, x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(8.11)\qquad \frac{1}{\mathrm{Pe}} v'' - \left[\lambda + \Phi_c'(c_0(x)) + \frac{1}{4}\mathrm{Pe}\right] v = \Phi_c'(c_0(x))\,\psi(\lambda, x)$$

и граничным условиям, совпадающим с (4.3).

Для функции $\psi(\lambda, x)$ и ее производной по x справедливы неравенства

$$(8.12)\qquad \max_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ \mathrm{Re}\,\lambda=0}} |\psi(\lambda, x)| \leqslant [1-\exp(-{}^1\!/_2\,\mathrm{Pe})]^{-1}$$

$$\max_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ \mathrm{Re}\,\lambda=0}} |\psi'(\lambda, x)| \leqslant \mathrm{Pe}[1-\exp(-{}^1\!/_2\,\mathrm{Pe})]^{-1}$$

С помощью функции Грина $G(x, \xi, \lambda)$ краевой задачи (4.3), (4.4) можно выписать решение неоднородного дифференциального уравнения (8.11) с заданными граничными условиями (4.3)

$$v=\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\,\Phi_c'(c_0(\xi))\,\psi(\lambda,\xi)\,d\xi \tag{8.13}$$

Используя первое неравенство (8.12) и неравенство Коши – Буняковского для интегралов, с помощью (8.13) получаем для функции $v(\lambda, x)$ и ее производной по x следующие оценки:

$$\max_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ \operatorname{Re}\lambda=0}}|v(\lambda,x)|\leqslant A\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\left[\int_0^1|G(x,\xi,0)|^2\,d\xi\right]^{1/2}=\delta_1 \tag{8.14}$$

$$\max_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ \operatorname{Re}\lambda=0}}|v'(\lambda,x)|\leqslant A\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\left[\int_0^1|G_x'(x,\xi,0)|^2\,d\xi\right]^{1/2}=\delta_2 \tag{8.15}$$

$$A=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|\Phi(c_0(x))|\,[1-\exp(-{}^1/_2\,\mathrm{Pe})]^{-1}$$

Объединяя (8.7), (8.10), (8.12), (8.14) и (8.15), получим, что функция $z_n(\lambda, x)$ и ее производной по x справедливы следующие неравенства:

$$\max_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ \operatorname{Re}\lambda=0}}|z_n(\lambda,x)|\leqslant 1+[1-\exp(-{}^1/_2\,\mathrm{Pe})]^{-1}+\delta_1+ \tag{8.16}$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\max\left\{\left|\frac{\nu_k}{\lambda_k}\right|,\ |\tau_k|\right\}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|q_k(x)|=\omega_1$$

$$\max_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ \operatorname{Re}\lambda=0}}|z_n'(\lambda,x)|\leqslant\frac{\mathrm{Pe}}{2}+[1-\exp(-{}^1/_2\,\mathrm{Pe})]^{-1}\mathrm{Pe}+\delta_2+ \tag{8.17}$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\max\left\{\left|\frac{\nu_k}{\lambda_k}\right|,\ |\tau_k|\right\}\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|q'_k(x)|=\omega_2$$

С учетом неравенств (8.9), (8.16) и (8.17) получаем окончательное неравенство для величин h_i

$$h_i\leqslant\mu_i/(N+1),\quad i=1,2,\ldots,n \tag{8.18}$$
$$\mu_i=[3\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|q_i(x)|+{}^1/_2\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|q_i'(x)|]\omega_1+{}^1/_2\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|q_i(x)|\omega_2$$

Оценка числа датчиков N, необходимых для стабилизации неустойчивого режима работы химического реактора может быть получена с учетом соотношений (8.3) – (8.5), (8.8) и (8.18). Она имеет вид

$$N\geqslant\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|\left[\sum_{k=1}^{n}\max\left\{\left|\frac{\nu_k}{\lambda_k}\right|,\ |\tau_k|\right\}\chi_{ik}+\mu_i\right]-1 \tag{8.19}$$

При любом числе датчиков N, удовлетворяющих неравенству (8.19), описанные в п. 5 системы управления вида (6.1), (6.2), (7.6) стабилизируют рассматриваемый неустойчивый режим работы химического реактора.

9. Для фактического вычисления числа N, а также значений констант b_m, $m=1, 2, \ldots, N$, необходимо знать: 1) стационарное распределение концентрации $c_0(x)$, отвечающее неустойчивому режиму работы химического

реактора; 2) функцию $\Phi_c'(c_0(x))$; 3) n положительных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ краевой задачи (4.3), (4.4); 4) n соответствующих этим собственным значениям собственных функций $q_1(x), q_2(x), \ldots$ $\ldots, q_n(x)$; 5) функцию Грина и ее производную по x краевой задачи (4.3), (4.4) при $\lambda=0$; 6) значения констант τ_k, ν_k, β_k, $k=1, 2, \ldots, n$, определенных равенствами (4.11), (7.6). После того как величины 1)—6) найдены, значения b_m и N можно определить из соотношений (5.3), (6.2) и (8.19). Во всех случаях, за исключением реакции первого порядка ($\Phi(c)=$ $=\Phi_0 c$, $\Phi_0=\mathrm{const}$), аналитический расчет величин 1)—6) не представляется возможным, поэтому их вычисление должно проводиться на ЭВМ. Само же это вычисление не представляет принципиальных трудностей, так как для решения задач, доставляющих величины 1)—6), разработаны соответствующие алгоритмы.

В заключение отметим, что подобным образом могут быть построены системы принудительной стабилизации неустойчивых режимов работы химических реакторов других типов с произвольной кинетикой протекающих реакций, с учетом тепловых эффектов и при отсутствии ограничений, перечисленных в начале п. 1. Можно также рассматривать системы принудительной стабилизации, отличные от описанных в данной работе. Так, например, можно изменять поток концентрации на входе в реактор, возмущая скорость потока, вместо возмущения концентрации измерять соответствующими датчиками его изменение во времени и т. д.

Поступила 15 IV 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Франк-Каменецкий Д. А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., «Наука», 1967.
2. *Иванов Е. А., Бесков В. С., Слинько М. Г.* Число стационарных решений и устойчивость адиабатического процесса в потоке с продольным смешением. Теор. основы хим. технол., 1967, т. 1, № 4.
3. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С.* О стационарных режимах работы проточного адиабатического химического реактора. ПМТФ, 1967, № 5.
4. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С.* О стационарных режимах работы проточного изотермического химического реактора. ПМТФ, 1969, № 3.
5. *Чернова Э. А.* О стационарных режимах работы химических реакторов. ПМТФ, 1969, № 2.
6. *Чернова Э. А.* Об условиях существования различных стационарных состояний в проточном адиабатическом реакторе со слоем катализатора. ПМТФ, 1970, № 4.
7. *Самойленко Ю. И.* Пространственно-распределенные системы автоматического управления и способы их реализации. Автоматика и телемеханика, 1968, № 2.
8. *Бутенко В. К., Ладиков-Роев Ю. П., Самойленко Ю. И.* Комбинированная система автоматического управления плазменным шнуром. В сб. «Кибернетика и вычислительная техника», вып. 8. Киев, «Наукова думка», 1971.
9. *Ладиков Ю. П., Самойленко Ю. И.* Применение системы ортогонализированных обмоток с автоматически регулируемыми токами для стабилизации плазмы в системах Токамак. Ж. техн. физ., 1972, т. 42, вып. 10.
10. *Ладиков-Роев Ю. П., Машковский А. Г.* К теории синтеза импедансного распределенного регулятора для стабилизации плоских течений жидкости. В сб. «Кибернетика и вычислительная техника», вып. 8. Киев, «Наукова думка», 1971.
11. *Ладиков-Роев Ю. П.* Синтез магнитоупругой управляющей среды для стабилизации гидродинамических течений. В сб. «Кибернетика и вычислительная техника», вып. 15. Киев, «Наукова думка», 1972.
12. *Ладиков Ю. П.* Устойчивость тяжелой жидкости, стекающей по наклонной поверхности фазового перехода. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.
13. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М., «Наука», 1976.
14. *Gould L. A., Murray-Lasso M. A.* On the modal control of distributed systems with distributed ferdback. I.E.E.E. Trans. Automatic Control, 1966, vol. AC-11, No. 4.
15. *Porter B., Bradshaw A.* Modal control of a class of distributed-parameter systems. Intern. J. Control, 1972, vol. 15, No. 4.

16. *Bradshaw A., Porter B.* Modal control of a class of distributed-parameter systems: multi-eigenvalue assignment. Intern. J. Control, 1972, vol. 16, No. 2.
17. *Aris R.* Introduction to the analysis of chemical reactors. New Jersey, Prentice-Hall, 1965. (Рус. перев.: Анализ процессов в химических реакторах. Л., «Химия», 1967.)
18. *Van Cauwenberghe A. R.* Further note on Dankwerts boundary conditions for flow reactors. Chem. Engng Sci., 1966, vol. 21, No. 2.
19. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С.* О единственности и устойчивости стационарных режимов работы проточных химических реакторов. ПМТФ, 1969, № 4.
20. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., «Наука», 1969.
21. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1965.
22. *Thomas Muir.* The theory of determinants in the historical order of development, vol. II. London, 1911.
23. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1973.