

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И УСЛОВНОЕ ОСРЕДНЕНИЕ В ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКАХ

В. Р. КУЗНЕЦОВ, В. И. РАСЩУПКИН

(Москва)

Приведены результаты экспериментального исследования характеристик турбулентности в плоском слое смешения и в следе за цилиндром. Представлены результаты измерений распределения вероятностей скорости и температуры, коэффициента перемежаемости и условно осредненных значений квадрата производных от скорости и температуры.

1. Экспериментальное исследование, результаты которого приведены ниже, предпринято с целью совершенствования теории турбулентных потоков с химическими реакциями. Известно, что при исследовании протекания химических процессов в турбулентном потоке нужно осреднять различные резко нелинейные зависимости (например, скорость реакции). При этом необходимо знать распределение вероятностей температуры и концентрации. Для разрешения возникающего затруднения естественно использовать уравнение для распределения вероятностей различных газодинамических параметров.

Такой подход развивался в [1-3]. В этих работах установлено, что для правильного описания распределения вероятностей скорости и температуры необходимо учесть перемежаемость и смешение до молекулярного уровня, а также процессы диссипации энергии. Показано, что эти процессы описываются величинами $\varepsilon(u) = \nu \langle (\partial u_i / \partial x_i)^2 \rangle_u$ и $N(T) = a \langle (\partial T / \partial x_i)^2 \rangle_T$. Здесь u — скорость, T — температура, x — координата, ν , a — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности. Индекс u (или T) означает, что осреднение проводится по таким промежуткам времени, когда скорость (температура) принимает фиксированное значение, равное $u(T)$. В работах [1, 2] на основании теории А. Н. Колмогорова — А. М. Обухова [4, 5] высказана гипотеза о том, что в турбулентной жидкости величины ε и N не зависят от u и T .

Одна из целей настоящей работы заключалась в том, чтобы экспериментально проверить это предположение. Другая цель — исследовать влияние перемежаемости на распределение вероятностей скорости и температуры.

2. Измерения проводились в плоском слое смешения и в следе за цилиндром. Использовалась аэродинамическая труба замкнутого типа с открытой рабочей частью. Исследовался слой смешения, возникающий при истечении воздуха из сопла квадратного сечения 40×40 см² в неподвижную атмосферу. Скорость истечения составляла 4 и 8 м/сек. Разность температур в слое смешения достигала 15° С. Измерения проводились на расстоянии 30 см от среза сопла.

При исследовании следа за цилиндром использовалось сопло прямоугольного сечения 30×50 см². Диаметр цилиндра $d = 8$ мм; цилиндр устанавливался поперек короткой стороны сопла. Скорость истечения 15 м/сек.

Цилиндр нагревался до температуры 500°C . Измерения проводились на расстоянии 42 см от цилиндра. В этом сечении максимальная температура следа превышала температуру потока на 3°C . Измерения средней скорости и пульсаций скорости в следе за холодным цилиндром показали, что в этом сечении влияние нагрева цилиндра на характеристики течения пренебрежимо мало.

Измерение скорости и температуры, а также аналоговая обработка сигналов проводились с помощью аппаратуры фирмы DISA. При измерении скорости использовался датчик с двумя параллельно расположенными вольфрамовыми нитями диаметром 5 мкм и длиной 1.2 мм каждая. Одна из нитей работала с большим перегревом (0.8) и служила детектором скорости, вторая работала с малым перегревом и служила для компенсации изменения температуры потока. Частотный диапазон аппаратуры при измерении скорости достигал 30 кгц .

Измерение температуры проводилось датчиком с платиновой проволокой диаметром 1 мкм и длиной 0.4 мм . При этом термоанемометр работал в режиме термометра сопротивления без компенсации тепловой инерции проволоки. Такой способ измерения позволял регистрировать пульсации температуры с частотой до 3 кгц .

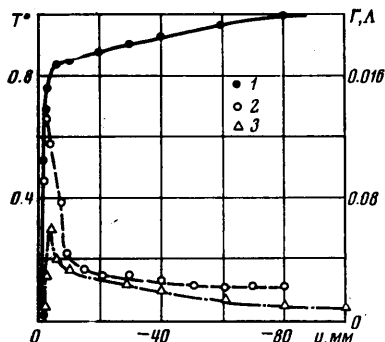
Коэффициент перемежаемости γ измерялся путем аналоговой обработки сигналов, пропорциональных $\partial u/\partial t$ или $\partial T/\partial t$ (u — продольная компонента скорости, t — время). Проводились следующие операции. Для уменьшения шумов сигнал от термоанемометра подавался на вспомогательный блок, отсекающий частоты выше 5 кгц . Затем сигнал дифференцировался с помощью RC-цепочки. Продифференцированный сигнал усиливался до такого уровня, чтобы в нетурбулентной жидкости его среднеквадратичное напряжение было меньше $W=0.1\text{ в}$ (при этом датчик выводился далеко за пределы турбулентной жидкости). После этого сигнал поступал на компаратор, работавший в режиме анализа плотности вероятности. В этом режиме на выходе из компаратора напряжение равно $V=V_0=\text{const}$, если напряжение на его входе U удовлетворяет неравенству $-W/2 < U < W/2$; во всех остальных случаях выходное напряжение равно нулю.

По среднему значению сигнала, снимаемого с выхода компаратора, можно определить величину γ . Действительно, если датчик находится в нетурбулентной жидкости, то $V=V_0$. Вероятность этого события есть $1-\gamma$. Выходное напряжение компаратора отлично от нуля также и в тех случаях, когда датчик находится в турбулентной жидкости и напряжение сигнала на входе компаратора близко к нулю (т. е. в моменты времени, когда значения $\partial u/\partial t$ или $\partial T/\partial t$ близки к нулю).

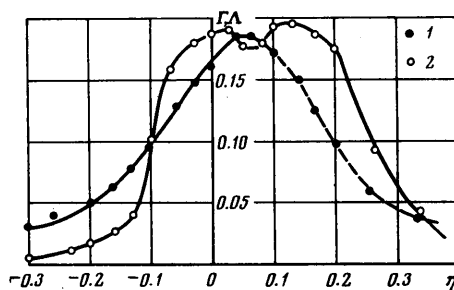
Пусть в единицу времени сигнал на входе компаратора n раз принимает нулевые значения. Тогда в единицу времени на выходе компаратора будет зарегистрировано n импульсов продолжительностью $W/(\partial U/\partial t)$. Поэтому среднее значение показаний прибора, интегрирующего сигнал с компаратора, при условии, что датчик находится в турбулентной жидкости, равно $nV_0W\langle 1/(\partial U/\partial t) \rangle$. Поскольку среднее значение напряжения на выходе из компаратора при условии, что датчик находится в нетурбулентной жидкости, равно V_0 , то безусловное среднее значение выходного сигнала компаратора есть $V_0[1-\gamma+\gamma nW\langle 1/(\partial U/\partial t) \rangle]$. При малом значении W среднее напряжение на выходе компаратора пропорционально $1-\gamma$, т. е. дает первое приближение измеряемой величины. При определении коэффициента перемежаемости измерения проводились при двух значениях W ($W=0.1\text{ в}$ и $W=0.2\text{ в}$). Величина $1-\gamma$ находилась путем линейной экстраполяции.

Опишем теперь методику измерений величин $\varepsilon(u)$ и $N(T)$. При этих измерениях предполагалось, что $\partial u/\partial x = \langle u \rangle^{-1} \partial u/\partial t$, $\partial T/\partial x = \langle u \rangle^{-1} \partial T/\partial t$,

т. е. турбулентность считалась «замороженной». Сигнал с термоанемометра подавался на вспомогательный блок, отсекающий частоты выше 5 кГц, а затем поступал в нормализатор, на выходе из которого среднеквадратичное напряжение сигнала поддерживалось на уровне 1 в. Выход нормализатора соединен параллельно с дифференцирующей цепочкой и с компаратором, который работает в режиме измерения плотности вероятности. Напряжение на выходе компаратора V_0 , если напряжение



Фиг. 1



Фиг. 2

на его входе удовлетворяет неравенству $U_0 - W/2 < U < U_0 + W/2$, и равно нулю во всех остальных случаях (величина U_0 может изменяться, она соответствует некоторому фиксированному значению u и T). Среднее значение напряжения на выходе компаратора измерялось с помощью интегратора и вольтметра постоянного тока. Оно, очевидно, равно PW , где P — плотность вероятностей скорости или температуры.

Сигнал, прошедший через дифференцирующую цепочку, возводился в квадрат с помощью среднеквадратичного вольтметра, а затем с помощью процессора турбулентности умножался на сигнал, снимаемый с выхода компаратора. Среднее напряжение на выходе процессора турбулентности равно $\varepsilon(u)P(u)W$ (или $N(T)P(T)W$). При изменении величины U_0 , которая пропорциональна u или T , по известному значению P отсюда можно найти $\varepsilon(u)$ или $N(T)$. Правильность работы описанной схемы проверена на примере синусоидального сигнала, для которого зависимость $\varepsilon(u)$ можно легко найти теоретически. Установлено, что вплоть до частот порядка 3 кГц использованная схема дает удовлетворительные результаты.

3. Перейдем теперь к описанию экспериментальных данных, полученных при исследовании слоя смешения. На фиг. 1 представлены результаты измерений в сечении $x=0$. Координата x отсчитывается от кромки сопла вниз по потоку. Координата y отсчитывается от кромки сопла перпендикулярно направлению течения. Точки на фигуре соответствуют: 1 — T° , 2 — Γ , 3 — Λ . Здесь $T^\circ = (\langle T \rangle - T_1) / (T_2 - T_1)$, $\Gamma = \sigma_u / u_2$, $\Lambda = \sigma / (T_2 - T_1)$, $\sigma_u^2 = \langle (u - \langle u \rangle)^2 \rangle$, $\sigma^2 = \langle (T - \langle T \rangle)^2 \rangle$, u_2 — скорость потока на выходе из сопла, T_1 — температура окружающей среды, T_2 — температура нагретого потока. В этих опытах $u_2 = 4$ м/сек. Результаты измерений средней скорости не приводятся, так как толщина динамического пограничного слоя на стенках сопла достаточно мала (порядка 7 мм). Толщина температурного пограничного слоя, как видно из фиг. 1, на порядок больше.

Измеренные в сечении $x=30$ см профили средней скорости и температуры имеют обычный вид, близкий, например, к профилям, полученным в [6], и в данной работе не приводятся. Как и в работе [6], профиль

средней температуры получился несколько шире профиля средней скорости.

На фиг. 2 приведены данные измерения величин Γ (точки 1) и Λ (точки 2). Эти измерения проведены при $u_2=8$ м/сек и $x=30$ см. Обращает на себя внимание наличие двух максимумов в профиле температуры, один из которых расположен точно за кромкой сопла. Аналогичный результат получен в [6]. В то же время в профиле пульсаций скорости имеется лишь один максимум. Возможно, различия в профилях связаны с особенностями начальных распределений скорости и температуры. Напомним, что в начальном сечении толщина динамического пограничного слоя на порядок меньше толщины теплового. Поэтому распределения средней скорости и пульсаций скорости становятся автомодельными значительно раньше, чем распределения температуры и пульсаций температуры. В связи со сказанным отметим, что измерения проводились на расстоянии примерно пяти толщин теплового пограничного слоя. Поэтому можно предположить, что максимум в начальном распределении Λ (фиг. 1), расположенный вблизи кромки сопла, на столь небольшом расстоянии не успевает выродиться. Поскольку начальная толщина динамического пограничного слоя мала, то динамическая структура слоя смешения автомодельна и профиль пульсаций скорости имеет только один максимум. Второй максимум в профиле пульсаций температуры возникает в том месте, где градиент средней температуры в слое смешения максимален. Эта точка заметно смещена в область положительных значений $\eta=y/x$.

Результаты измерения коэффициента перемежаемости изображены на фиг. 3. Точки соответствуют: 1 — первому методу измерений (основанному на регистрации $\partial u/\partial t$), 2 — второму методу (основанному на регистрации $\partial T/\partial t$). Эти данные получены при $u_2=8$ м/сек. Отметим заметные различия в значениях γ , измеренных двумя методами. Максимальное значение γ , найденное первым методом, близко к единице ($\gamma=0.97$). Максимальное значение коэффициента перемежаемости, определенное вторым методом, заметно меньше ($\gamma=0.77$). Накопленный к настоящему времени экспериментальный материал не позволяет сделать достаточно обоснованных выводов о причинах различия между данными, полученными двумя способами.

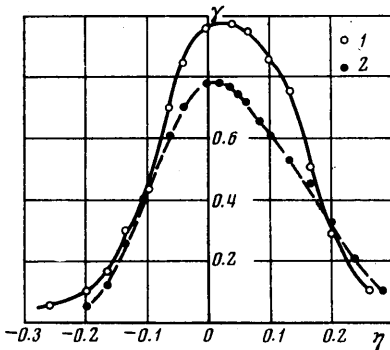
Наличие перемежаемости в центральной части слоя смешения, по-видимому, связано с так называемыми когерентными структурами, обнаруженными в слое смешения [7]. Из приведенных в [7] теневых фотографий отчетливо видно, что нетурбулентная жидкость наблюдается в центре слоя смешения.

Результаты измерения плотности вероятностей температуры приведены на фиг. 4. По оси абсцисс отложена величина $S=(T-\langle T \rangle)/\sigma$. Точки 1—3 соответствуют $\eta=0, -0.067, 0.067$. Во всех трех распределениях имеется по два максимума. Аналогичный характер имеют результаты, полученные в [8]. Можно показать, что один из максимумов обусловлен перемежаемостью. Для этого рассмотрим, каким значениям температуры соответствуют максимумы в распределении P , расположенные при $S=0.85$ ($\eta=-0.067$), $S=1.5$ ($\eta=0$), $S=-1.7$ ($\eta=0.067$). Используя данные, приведенные на фиг. 2, и профиль средней температуры, получаем, что указанные значения соответствуют температурам $T^0=0.98, 0.92, 0.15$ ($\eta=-0.067, 0, 0.067$). Отсюда видно, что максимумы расположены вблизи крайних значений температуры. Это свидетельствует о сильном влиянии перемежаемости на распределение вероятностей температуры.

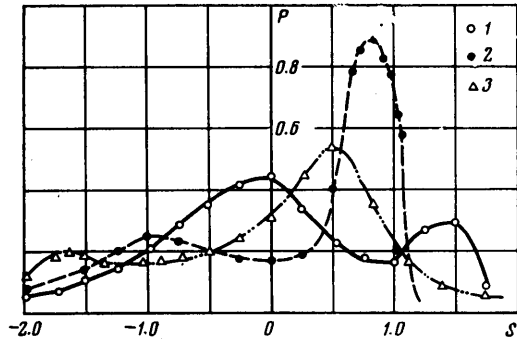
Качественный характер зависимости $P(S)$ в окрестности максимумов, о которых шла речь выше, обусловлен двумя причинами: неточностью измерений и влиянием процессов молекулярного переноса. Эта окрестность

в дальнейшем будет называться аномальной областью. Ширина этой области ΔS_m определяется как длина интервала значений S , в котором $P = 0.5P_m$ (P_m — максимальное значение P). Если исходить из теоретических соображений, то при наличии перемежаемости в выражении для распределения плотности вероятностей должен содержаться член, пропорциональный дельта-функции. В силу неточности измерений вместо дельта-функции в аномальной области регистрируется более или менее плавное изменение $P(S)$, для которого характерно наличие максимума.

В данном случае неточность измерений связана прежде всего с шириной «окна» компаратора W , т. е. с интервалом напряжений входного сигнала, при которых выходной сигнал компаратора отличен от нуля. Очевид-



Фиг. 3



Фиг. 4

но, что точность измерений повышается при уменьшении W . Поскольку среднеквадратичное напряжение на входе компаратора равно 1 в, а $W = 0.1$ в, то интервалу напряжений, при которых выходной сигнал компаратора отличен от нуля, соответствует интервал значений S , равный $\Delta S = 0.1$. Из приведенных рассуждений ясно, что в аномальной области из-за неточности измерений в интервале значений S порядка $\Delta S = 0.1$ вместо дельта-функции должен регистрироваться плавный максимум $P(S)$. Справедливость этих рассуждений становится ясной при рассмотрении данных, помещенных на фиг. 4. Из этих данных видно, что $\Delta S_m \sim \Delta S$.

Вторая причина, обуславливающая отмеченный характер зависимости $P(S)$, имеет принципиальное значение. Суть дела заключается в том, что, строго говоря, перемежаемость возникает только при бесконечно большом числе Рейнольдса. При любом конечном числе Re молекулярная теплопроводность приведет к тому, что в нетурбулентной жидкости возникнут пульсации температуры, а вязкий перенос импульса обусловит завихренность течения в нетурбулентной жидкости. В этом случае в выражении для распределения плотности вероятности содержится слагаемое, которое при неограниченном увеличении числа Re стремится к дельта-функции. При конечном числе Re величина $P(S)$ изменяется плавно, а в области предельно возможных значений S имеет максимум. Ширина этой области ΔS стремится к нулю при увеличении числа Рейнольдса.

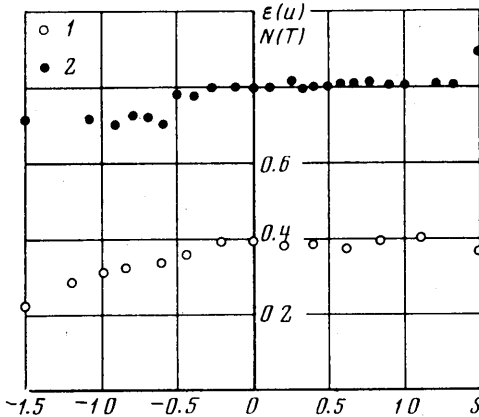
Порядок значений ΔS легко оценить, если в соответствии с теорией локально-однородной турбулентности [4, 5] предположить, что величина $\Delta T = \sigma \Delta S$ определяется только параметрами ϵ , N , ν , a . Тогда из соображений размерности получаем $\Delta T = N^{1/2} (\epsilon/\nu)^{-1/2} f(\nu/a)$, $\Delta S = \sigma^{-1} N^{1/2} (\epsilon/\nu)^{-1/2} f(\nu/a)$. Так как по порядку величины $\epsilon = \sigma_u^3/L$, $N = \sigma^2 \sigma_u/L$, $f \sim 1$ (L — масштаб турбулентности), то отсюда находим $\Delta S = Re^{-1/2}$ ($Re = \sigma_u L/\nu$). Из этой формулы видно, что величина ΔS очень слабо убывает при увеличении числа Рей-

нольдса; ее значение в практически важных случаях может быть достаточно велико.

Оценим величину ΔS для условий проведенных опытов. Примем, что масштаб турбулентности в 5 раз меньше ширины слоя смешения. Воспользовавшись данными о профиле средней температуры, получаем $L=0.1 X=3$ см. Как видно из фиг. 2, в центральной части слоя смешения $\sigma_u=0.2$,

$u_2=160$ см/сек. Тогда $Re=3200$ и, следовательно, $\Delta S=0.13$, т. е. величина ΔS сопоставима с шириной аномальной области ΔS_m (фиг. 4). Таким образом, процессы молекулярного переноса даже при больших числах Re могут оказывать заметное влияние на распределение вероятностей температуры. Этот вывод подтверждается также заключениями, сделанными выше при анализе результатов измерения коэффициента перемежаемости.

Отметим, что процессы молекулярного переноса значительно меньше влияют на распределение



Фиг. 5

вероятностей скорости. Измерения показали, что эти распределения не слишком отличаются от нормального закона. Этот факт легко понять, если учесть, что в нетурбулентной жидкости наблюдаются пульсации скорости, возбуждаемые пульсациями давления.

4. Перейдем к анализу результатов измерений в следе за нагретым цилиндром. Данные измерений средней температуры и пульсаций температуры совпадают с результатами, полученными в [9], и поэтому здесь не приводятся. Распределения вероятностей скорости и температуры в турбулентной части следа (т. е. там, где $\gamma=1$) практически не отличаются от нормального закона и поэтому также не приведены.

Результаты измерения коэффициента перемежаемости близки к результатам работы [10]. Область вполне турбулентной жидкости ($\gamma=1$) располагается в центральной части следа и занимает примерно половину его ширины. Результаты измерения γ первым и вторым способами в этом случае практически совпадают.

Результаты измерений величин $\varepsilon(u)$ и $N(T)$ приведены на фиг. 5. Точки соответствуют: 1 — $\varepsilon(u)$, 2 — $N(T)$. Отложенная по оси абсцисс величина S равна $(u-\langle u \rangle)/\sigma_u$ (для $\varepsilon(u)$) и $(T-\langle T \rangle)/\sigma$ (для $N(T)$). Единицы измерения ε и N произвольны, так что приведенный график иллюстрирует только характер зависимостей, а не численные значения соответствующих величин. Эти измерения проведены в плоскости симметрии следа, там, где отсутствует перемежаемость. Из графика видно, что в турбулентной жидкости величины ε и N не зависят от T и u . Это свидетельствует о статистической независимости величин $a(\partial T/\partial x_1)^2$ и T , а также $v(\partial u_i/\partial x_1)^2$ и u . Гипотеза о статистической независимости этих величин была выдвинута в [1, 2]. Она исходит из теории локально-однородной турбулентности [4, 5], согласно которой величины T и u определяются крупными вихрями, а величины N и ε зависят от мелких вихрей. При большом числе Re в силу каскадного характера передачи энергии по спектру турбулентности характеристики больших и малых вихрей статистически независимы. Следовательно, должны быть статистически независимы величины $a(\partial T/\partial x_1)^2$ и T , а также $v(\partial u_i/\partial x_1)^2$ и u . Из статистической незави-

симости этих величин вытекает независимость функции $N(T)$ от T и функции $\epsilon(u)$ от u .

Рассматриваемый вопрос играет важную роль при замыкании уравнений для распределений вероятностей различных характеристик турбулентности. Известно, что эти уравнения могут быть записаны в различной форме. Одна форма записи использовалась в [1, 2, 11]. В этой форме члены, которые в уравнении движения и теплопроводности описывают молекулярные процессы (соответственно $\nu \Delta u_i$ и $a \Delta T$), в уравнении для распределения вероятностей преобразуются к виду $\nu \partial^2 P / \partial x_i^2 - \partial^2 \epsilon(u) P / \partial u_i^2$ или $a \partial^2 P / \partial x_i^2 - \partial^2 N(T) P / \partial T^2$. Другая форма записи использовалась в [12-14]. В этой форме рассматриваемые члены приобретают вид $\partial \delta_i(u) P / \partial u_i$ или $\partial \delta(T) P / \partial T$. Здесь $\delta_i(u)$ — значение величины $\nu \Delta u_i$, осредненное по таким промежуткам времени, когда скорость равна u ; $\delta(T)$ — значение величины $a \Delta T$, осредненное по таким промежуткам времени, когда температура равна T . Очевидно, что если гипотеза, выдвинутая в [1, 2], справедлива, то замыкание уравнений для распределений вероятностей, записанных в первой форме, существенно упрощается.

Результаты проведенных опытов свидетельствуют о том, что для турбулентной жидкости выдвинутая гипотеза справедлива. Эти результаты носят предварительный характер и нуждаются в дальнейшей проверке. Следует заметить, что в слое смешения данные измерений свидетельствуют о том, что функции $N(T)$ и $\epsilon(u)$ меняются нерегулярно (примерно в 2 раза). В этом случае, как свидетельствует проведенный в п. 3 анализ, существенную роль играют перемежаемость и процессы молекулярного переноса. Гипотеза, выдвинутая в [1, 2], справедлива лишь для турбулентной жидкости при очень больших числах Рейнольдса.

Поступила 21 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В. Р. О плотности вероятности разности скоростей в двух точках однородного, изотропного турбулентного потока. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
2. Кузнецов В. Р. Вероятность концентрации пассивной примеси в турбулентных потоках с поперечным сдвигом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 5.
3. Кузнецов В. Р. Распространение пламени в турбулентном потоке горючей смеси. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 5.
4. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. Докл. АН СССР, 1941, т. 30, № 4.
5. Обухов А. М. Структура температурного поля в турбулентном потоке. Изв. АН СССР, Сер. геогр. и геофиз., 1949, т. 13, № 1.
6. Sunyach M., Mathieu J. Zone de melange d'un jet plan. Fluctuations induites dans le cone a potential — intermittent. Intern. J. Heat and Mass Transfer, 1969, vol. 12, No. 12.
7. Brown G. L., Roshko A. On density effects and large structure in turbulent mixing layers. J. Fluid Mech., 1974, vol. 64, pt 4.
8. La Rue J. C., Libby P. A. Temperature and intermittency in turbulent wake of a heated cylinder. Phys. Fluids, 1974, vol. 17, No. 5.
9. Freymuth P., Uberoi M. S. Structure of temperature fluctuations in the turbulent wake behind a heated cylinder. Phys. Fluids, 1971, vol. 14, No. 12.
10. Thomas R. M. Conditional sampling and other measurements in a plane turbulent wake. J. Fluid Mech., 1973, vol. 57, pt 3.
11. Кузнецов В. Р. Распределение вероятностей разности скоростей в инерционном интервале спектра турбулентности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 3.
12. Монин А. С. Уравнения турбулентного движения. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
13. Иевлев В. М. Приближенные уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.
14. Dorazo C. Probability density function approach for a turbulent axisymmetric heated jet. Phys. Fluids, 1975, vol. 18, No. 4.