

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ШИПА НА МАСЛЯНОЙ ПЛЕНКЕ МЕТОДОМ РАСЧЛЕНЕНИЯ

И. Р. СУССИ, В. М. ФРИДМАН

(Ленинград)

При рассмотрении колебаний валов, опирающихся на подшипники скольжения, необходимо знать зависимость реакции масляного слоя от смещения и скорости движения цапфы — так называемую упругодемпферную характеристику опоры. Поскольку эта зависимость должна использоваться для решения сложной задачи о колебаниях вала, желательно, чтобы она определялась сравнительно просто при достаточной точности. Полезно также иметь аналитическое выражение для реакции масляного слоя. Это, в частности, позволит при изучении малых колебаний относительно положения статического равновесия дифференцировать выражение для реакции по смещениям и скоростям смещения цапфы, определяя таким образом коэффициенты жесткости и демпфирования.

Имеется большое число работ, посвященных определению упругодемпферных характеристик цилиндрического подшипника скольжения. Перечень некоторых работ можно найти, например, в статьях [2, 3].

Отметим работу [2], в которой уравнение гидродинамической смазки в частных производных решается приближенным методом Л. В. Канторовича с последующим численным решением получающихся обыкновенных дифференциальных уравнений.

Одной из задач, возникающих при нахождении упругодемпферных характеристик масляного слоя, является определение границ слоя. В большинстве работ, рассматривающих задачу смазки цилиндрического подшипника скольжения, границы масляного слоя задаются исходя из априорных соображений и удобства вычислений. Во всех известных работах аналитическое выражение для подъемной силы масляного слоя строится при углах охвата цапфы вала масляной пленкой π и 2π .

В настоящей работе для определения упругодемпферных характеристик масляного слоя при решении уравнения гидродинамической смазки используется эффективный приближенный метод «расчленения» [4], при котором уравнение с частными производными заменяется двумя уравнениями с производными по одной переменной и задача сводится к определению так называемой «функции связи». Метод позволяет установить сравнительно простые приближенные формулы для определения характеристик подшипника конечной ширины. Достоинство метода состоит в том, что он дает возможность получить выражение для реакции масляного слоя в замкнутой аналитической форме при любом угле охвата цапфы вала масляной пленкой. Сопоставление величины статической реакции масляного слоя, вычисленной по формуле первого приближения метода расчленения с известным точным решением [1] для квадратного в плане башмака с зазором, меняющимся по линейному закону, показало совпадение с точностью до 1%.

Полагаем сначала границы масляной пленки известными, так что область, занимаемая пленкой (фиг. 1), представляет собой прямоугольник: $0 \leq x \leq a$, $x = R(\theta - \theta_1)$, $a = R(\theta_2 - \theta_1)$, θ_1, θ_2 — углы, определяющие начало и конец пленки, координата y отсчитывается вдоль оси подшипника, $0 \leq y \leq b$.

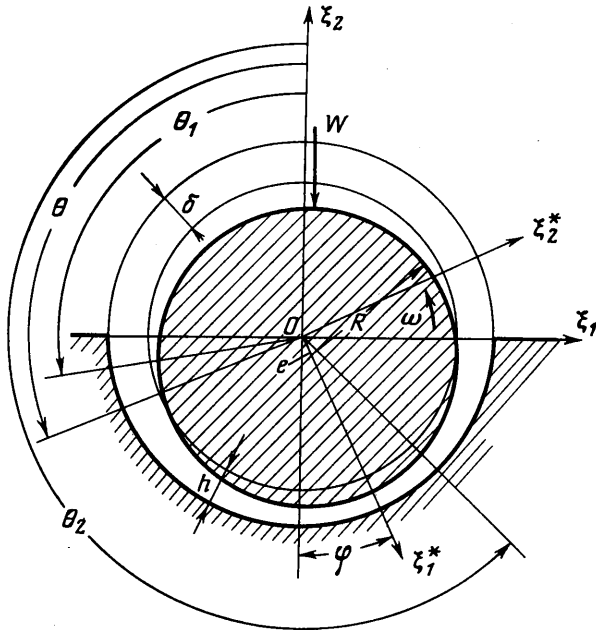
Уравнение гидродинамической смазки вместе с краевыми условиями записывается следующим образом:

$$(1) \quad (D_1 + D_2)p = q$$

$$(2) \quad D_1 p = \frac{\partial}{\partial x} \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad p(0, y) = p(a, y) = 0$$

$$(3) \quad D_2 p = \frac{\partial}{\partial y} \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad p(x, 0) = p(x, b) = 0$$

Здесь $p=p(x, y)$ — давление в масляной пленке, $q=q(x, y)$ — функция «распределения источников», $h=h(x, y)$ — толщина масляного слоя, μ — коэффициент динамической вязкости смазки, для упрощения записей граничные условия приняты однородными.



Фиг. 1

По методу расчленения вводится «функция связи»

$$(4) \quad \psi = D_1 p$$

Вместо одного уравнения с частными производными (1) получается система двух уравнений с одномерными операторами

$$(5) \quad D_1 p = \psi, \quad D_2 p = q - \psi$$

Функция давления $p=p(x, y)$ с помощью интегральных операторов K_1, K_2 , обратных операторам D_1, D_2 , исключается из (5)

$$(6) \quad p = K_1 \psi, \quad p = K_2 (q - \psi), \quad K_1 = D_1^{-1}, \quad K_2 = D_2^{-1}$$

так что

$$(7) \quad K_1 \psi - K_2 (q - \psi) = 0$$

Далее методом Галеркина строится приближенное решение интегрального уравнения (7)

$$(8) \quad \psi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij} \psi_{ij}, \quad \psi_{ij} = X_i Y_j$$

Здесь системы функций $X_i = X_i(x)$ ($i=1, 2, \dots, n$), $Y_j = Y_j(y)$ ($j=1, 2, \dots, m$) обладают полнотой, необходимой для построения решения. Коэффициенты разложения определяются из условий

$$(9) \quad \int_{\Omega} [K_1 \psi - K_2 (q - \psi)] \psi_{ij} d\Omega = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$$

Здесь Ω — площадь смазки.

Давление в масляной пленке будем находить по первой формуле (6): $p = K_1 \psi$, где $K_1 = D_1^{-1}$. Отсюда в соответствии с (8) получим

$$(10) \quad p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{ij} \Phi_{ij}, \quad \Phi_{ij} = \Phi_i Y_j$$

$$(11) \quad \Phi_i = K_1 X_i$$

Следовательно

$$\Phi_i = \Phi_i(x), \quad \Phi_i(0) = \Phi_i(a) = 0$$

Функции $Y_j = Y_j(y)$ ($j=1, 2, \dots, m$), фигурирующие в (8), (10), подчиним условиям

$$(12) \quad Y_j(0) = Y_j(b) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

и потребуем, чтобы они допускали вычисление операции $D_2 Y_j$.

При этом, очевидно, функция давления $p = p(x, y)$ удовлетворяет край-вым условиям из (2), (3) и допускает проведение операций $D_1 p$, $D_2 p$.

Остановимся на конструировании операторов K_1 и K_2 . Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = \psi, \quad p(0, y) = p(a, y) = 0$$

Отсюда

$$(13) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 12\mu h^{-3} \left(\int_0^x \psi dx - \int_0^a h^{-3} dx \int_0^x \psi dx / \int_0^a h^{-3} dx \right)$$

$$(14) \quad p = p(x, y) = 12\mu \left[\int_0^x \left(\int_0^x \psi dx \right) h^{-3} dx - \int_0^a \left(\int_0^x \psi dx \right) h^{-3} dx \int_0^a h^{-3} dx / \int_0^a h^{-3} dx \right] = K_1 \psi$$

Аналогично, учитывая, что в задаче о гидродинамической смазке подшипника скольжения толщина масляного слоя $h = h(x)$, найдем

$$p = p(x, y) = 12\mu h^{-3} \left[\int_0^y dy \int_0^y (q - \psi) dy - y b^{-1} \int_0^b dy \int_0^y (q - \psi) dy \right] = K_2 (q - \psi)$$

Для цилиндрического подшипника (фиг. 1)

$$(15) \quad h(x) = h(\theta) = h(\gamma) = \delta(1 + \chi \cos \gamma)$$

где $\chi = e\delta^{-1}$, $\gamma = \theta - \varphi$, δ — радиальный зазор в подшипнике; e , φ — полярные координаты центра цапфы вала во вкладыше. Правая часть в уравнении гидродинамической смазки (1) вычисляется по формуле

$$(16) \quad q = q(x) = q(\theta) = 0.5\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{\partial h}{\partial t} = \delta\chi(-0.5\omega + \dot{\varphi}) \sin \gamma + \delta\dot{\chi} \cos \gamma$$

где ω — скорость вращения цапфы вала.

В качестве координатных функций $X_i = X_i(x)$ ($i=1, 2, \dots, n$) возьмем систему

$$(17) \quad X_i(x) = X_i(\gamma) = \begin{cases} \sin k\gamma, & i = 2k - 1 \\ \cos k\gamma, & i = 2k \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots$$

В последовательности (17) элемент $\cos(0\gamma) = 1$ опущен, поскольку функция $\psi = \psi(x, y)$ ему ортогональна. Действительно, имеет место уравнение периодичности по углу θ

$$(18) \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{\partial p}{\partial \theta} \right|_{\theta=2\pi}$$

Из (2), (4) и (18) следует:

$$\frac{h^3}{12\mu} \left(\left. \frac{\partial p}{R\partial \theta} \right|_{\theta=2\pi} - \left. \frac{\partial p}{R\partial \theta} \right|_{\theta=0} \right) = \int_0^{2\pi} \psi R d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \psi 1 d\theta = 0$$

Функции $Y_j = Y_j(y)$ ($j=1, 2, \dots, m$) выберем следующим образом:

$$(19) \quad Y_j(y) = \sin j\pi y b^{-1} \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

При этом выполняются краевые условия (12) и, кроме того, обеспечивается вычисление операции $D_2 Y_j = (h^3/12\mu) \partial^2 Y_j / \partial y^2$ ($j=1, 2, \dots, m$). Выбрав координатные функции (17), (19), можно по формулам (10), (11) вычислить давление $p = p(x, y)$, найдя предварительно коэффициенты разложения b_{ij} ($i=1, 2, \dots, n$; $j=1, 2, \dots, m$) из системы уравнений (9).

Введем систему осей $O\xi_1^* \xi_2^* \xi_3$ (фиг. 1), в которой $\xi_1^* = \delta\chi$ — радиальное, $\xi_2^* = \delta\chi\varphi$ — тангенциальное смещение центра цапфы вала во вкладыше подшипника. Проекция реакции масляной пленки P на оси $O\xi_1^*$, $O\xi_2^*$ могут быть найдены по известному давлению следующим образом:

$$(20) \quad P_1^* = \int_0^b \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} p \cos \gamma R d\gamma dy, \quad P_2^* = \int_0^b \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} p \sin \gamma R d\gamma dy,$$

$$\gamma_1 = \theta_1 - \varphi, \quad \gamma_2 = \theta_2 - \varphi$$

Или из более простых соотношений

$$(21) \quad P_1^* = - \int_0^b \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{\partial p}{\partial \gamma} \sin \gamma R d\gamma dy, \quad P_2^* = \int_0^b \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{\partial p}{\partial \gamma} \cos \gamma R d\gamma dy$$

Формулы (21) получаются из (20) путем вычисления интегралов по частям с учетом граничных условий по (2). Входящая в формулы (21) производная от давления $\partial p / \partial \gamma$ дается формулой (13), причем $dx = R d\theta = R d\gamma$. В свою очередь уравнение (1) относительно давления содержит в правой части (16) значения радиального смещения, а также производных от радиального и тангенциального смещений. Поэтому от этих же величин будут зависеть и составляющие реакции масляной пленки, най-

денные по формулам (21)

$$(22) \quad P_i^* = P_i^*(\xi, \xi), \quad \xi = (\xi_1^*, \xi_2^*) \quad (i=1, 2)$$

Наряду с системой осей $O\xi_1^*\xi_2^*\xi_3$ введем систему горизонтальных и вертикальных осей $O\xi_1\xi_2\xi_3$, образованную из первой поворотом вокруг оси $O\xi_3$ против часовой стрелки на угол $\pi/2 - \varphi$. Проекция P на оси старой и новой систем P_i^* и P_j связаны соотношением

$$(23) \quad P_j = P_i^* \alpha_{ij} \quad (i, j=1, 2)$$

$$(24) \quad \alpha_{ij} = \frac{\partial \xi_i^*}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \xi_i^*}{\partial \xi_j} \quad (i, j=1, 2)$$

где α_{ij} — косинусы углов между осями $O\xi_i^*$ и $O\xi_j$.

Здесь и далее знак суммирования по повторяющемуся индексу будет опускаться.

Координаты центра цапфы в рассматриваемых системах координат связываются с помощью прямой и обратной зависимостей

$$(25) \quad \xi_i = \xi_i^* \alpha_{ii} \quad (i=1, 2)$$

$$(26) \quad \xi_1^* = \sqrt{\xi_1^2 a_{11}}, \quad \xi_2^* = -\delta \chi \operatorname{arctg} \xi_1 / \xi_2, \quad a_{11} = 1 \quad (i=1, 2)$$

Используя соотношения (23), (26), нетрудно от формул (22) перейти к формулам для горизонтальной и вертикальной составляющих реакции масляной пленки

$$(27) \quad P_i = P_i(\xi, \xi), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \quad (i=1, 2)$$

В положении статического равновесия вращающегося вала имеют место соотношения

$$(28) \quad P_1 = 0, \quad P_2 = -W$$

где W — постоянная вертикальная нагрузка на подшипниках.

Формулы (28) позволяют определить координаты стационарного положения центра цапфы $\xi^0 = (\xi_1^0, \xi_2^0)$.

При изучении малых колебаний цапфы относительно положения статического равновесия используются понятия коэффициентов жесткости и коэффициентов демпфирования масляной пленки

$$(29) \quad c_{ij} = - \left. \frac{\partial P_i}{\partial \xi_j} \right|_{\xi=\xi^0, \dot{\xi}=0}, \quad \kappa_{ij} = - \left. \frac{\partial P_i}{\partial \dot{\xi}_j} \right|_{\xi=\xi^0, \dot{\xi}=0} \quad (i, j=1, 2)$$

Дифференцирование (29) удобно выполнять следующим образом. Производная от горизонтальной и вертикальной составляющих реакции масляной пленки рассматривается как производная сложной функции переменных $\xi_j, \dot{\xi}_j$ ($j=1, 2$)

$$(30) \quad c_{ij} = - \left. \frac{\partial P_i}{\partial \xi_m^*} \frac{\partial \xi_m^*}{\partial \xi_j} a_{m1} \right|_{\xi=\xi^0, \dot{\xi}=0}, \quad \kappa_{ij} = - \left. \frac{\partial P_i}{\partial \dot{\xi}_m^*} \frac{\partial \dot{\xi}_m^*}{\partial \dot{\xi}_j} a_{m1} \right|_{\xi=\xi^0, \dot{\xi}=0},$$

$$a_{m1} = 1 \quad (i, j, m=1, 2)$$

Затем в (30) подставляются соотношения (23)

$$c_{ij} = - \left. \frac{\partial (P_k^* \alpha_{ki})}{\partial \xi_m^*} \frac{\partial \xi_m^*}{\partial \xi_j} a_{m1} \right|_{\xi=\xi^0, \dot{\xi}=0},$$

$$\kappa_{ij} = - \left. \frac{\partial (P_k^* \alpha_{ki})}{\partial \dot{\xi}_m^*} \frac{\partial \dot{\xi}_m^*}{\partial \dot{\xi}_j} a_{m1} \right|_{\xi=\xi^0, \dot{\xi}=0}, \quad (i, j, k, m=1, 2)$$

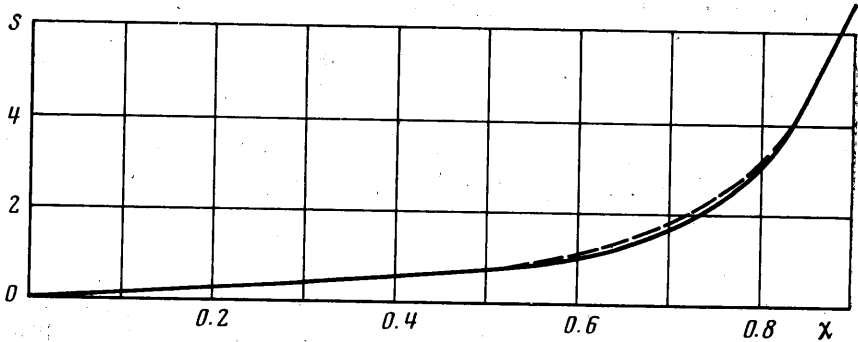
В результате с учетом (24) получим

$$(31) \quad c_{ij} = c_{k1}^* \alpha_{ki} \alpha_{1j} + v_i \alpha_{2j}$$

$$c_{k1}^* = \frac{\partial P_k^*}{\partial \xi_1^*}, \quad v_i = \frac{\partial P_i^*}{\partial \xi_2^*} \Big|_{\xi=\xi^0, \dot{\xi}=0} = P_k^* \frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial \xi_2^*} \Big|_{\xi=\xi^0, \dot{\xi}=0} \quad (i, j, k = 1, 2)$$

$$v_1 = -\frac{P_2}{\delta \chi} \Big|_{\xi=\xi^0, \dot{\xi}=0} = -\frac{W}{\delta \chi^0}, \quad v_2 = \frac{P_1}{\delta \chi} \Big|_{\xi=\xi^0, \dot{\xi}=0} = 0$$

$$(32) \quad \kappa_{ij} = \kappa_{k1}^* \alpha_{ki} \alpha_{1j} + \kappa_{k2}^* \alpha_{ki} \alpha_{2j} \quad (i, j, k=1, 2), \quad \kappa_{kj}^* = \partial P_k^* / \partial \xi_j^*$$



Фиг. 2

Выпишем формулы второго приближения. Формулы первого приближения будут их частным случаем. В соответствии с (8), (17), (19) имеем

$$(33) \quad \psi = b_{11} \psi_{11} + b_{21} \psi_{21}, \quad \psi_{11} = \sin \gamma \sin \frac{\pi y}{b}, \quad \psi_{21} = \cos \gamma \sin \frac{\pi y}{b}$$

Условия Галеркина запишутся в виде

$$(34) \quad \int_0^b \int_{\tau_1}^{\tau_2} [K_1 \psi - K_2 (q - \psi)] \psi_{11} R d\gamma dy = 0,$$

$$\int_0^b \int_{\tau_1}^{\tau_2} [K_1 \psi - K_2 (q - \psi)] \psi_{21} R d\gamma dy = 0$$

Или

$$(35) \quad B_{11} b_{11} + B_{12} b_{21} = f_1, \quad B_{21} b_{11} + B_{22} b_{21} = f_2$$

Здесь $B_{ij} = B_{ij}(\xi)$, $f_i = f_i(\xi, \dot{\xi})$, $i, j = 1, 2$, причем зависимость f_i от ξ линейная.

Определив из системы (35) коэффициенты b_{ij} ($i, j = 1, 2$), по формулам (8), (13), (17), (19), (21) строим выражения для радиальной и тангенциальной составляющих реакции масляной пленки

$$(36) \quad P_1^* = \alpha_{11} \dot{\chi} + \alpha_{12} (-\omega/2 + \phi), \quad P_2^* = \alpha_{21} \dot{\chi} + \alpha_{22} (-\omega/2 + \phi),$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(\chi), \quad \alpha_{12} = \chi \alpha_{21}$$

Формулы первого приближения

$$(37) \quad P_1^* = \alpha_{12} (-\omega/2 + \phi) + \alpha_{11} \dot{\chi}, \quad P_2^* = -P_1^* f^*(\chi),$$

$$\alpha_{ii}^* = \alpha_{ii}^*(\chi) \quad (i=1, 2)$$

Следует заметить, что при нахождении коэффициентов b_{ij} ($i, j=1, 2$) приходится вычислять интегралы вида

$$I_n^{lm} = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \sin^l \gamma \cos^m \gamma d\gamma / (1 + \chi \cos \gamma)^n, \quad \text{где } l, m, n - \text{целые числа, } 0 < \chi^2 < 1,$$

значения которых можно найти в таблице.

Если, как часто делается, принять, что угол охвата цапфы вала масляной пленкой $\theta_2 - \theta_1 = \pi$ и $\theta_1 = \varphi$, то в первом приближении

$$P_1^* = \mu\omega b\delta\psi^{-3}f(\chi) [1 - 2\varphi\omega^{-1} + 2.548(1 - \chi^2)^{-0.5}\chi\omega^{-1}],$$

$$P_2^* = -1.57\chi^{-1}(1 - \chi^2)^{0.5}P_1^*$$

$$c_{11}^* = -\mu\omega b\psi^{-3}\chi^{-3}0.103f^2(\chi) [2(1 - \chi^4) + (2 + \chi^4)\alpha^{-2}], \quad \alpha = \pi Rb^{-1}$$

$$c_{21}^* = -1.57\chi^{-1}(1 - \chi^2)^{0.5}c_{11}^*,$$

$$f(\chi) = -9.7\chi^{(2)}(1 - \chi^2) [2 + \chi^2 + 2\alpha^2(1 - \chi^2)]$$

Порядок вычислений здесь следующий. Имея (23), (36) при $\chi = \varphi = 0$ из условий (28) сначала определяются координаты χ^0 , φ^0 стационарного положения центра цапфы. Затем по (31), (32), (36) находятся динамические характеристики масляной пленки в точке χ^0 , φ^0 .

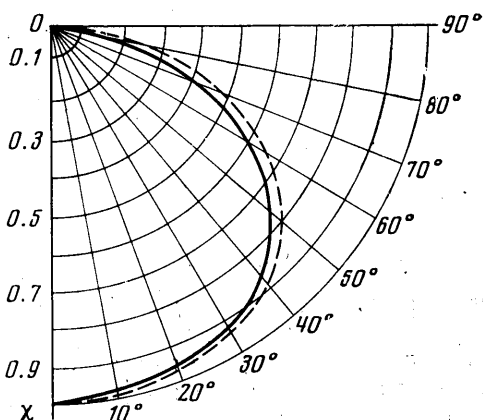
Приведенные формулы позволяют не только определить характеристики подшипника при заданных границах масляной пленки, но и определить эти границы. Координата начала масляной пленки γ_1 обычно известна (γ_1 — координата щели, через которую подается смазка). Координата конца пленки γ_2 для прямоугольной области смазки находится из условия

$$(38) \quad \partial p / \partial \gamma |_{\gamma=\gamma_2} = 0$$

В силу (13), (38) приходим к трансцендентному уравнению

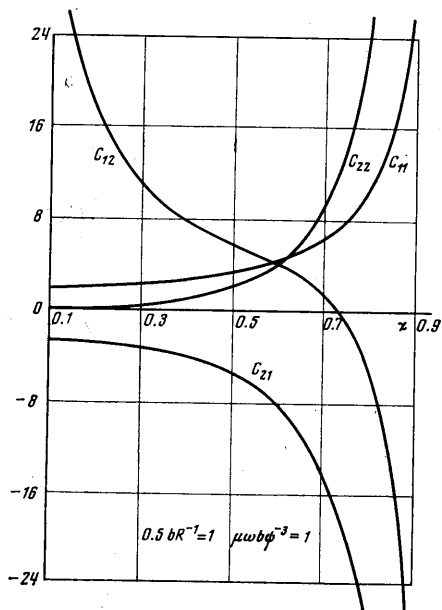
$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} h^{-3} \left(\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \psi d\gamma \right) d\gamma - \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} h^{-3} \left(\int_{\gamma_1}^{\gamma} \psi d\gamma \right) d\gamma = \\ & = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \left(\int_{\gamma_1}^{\gamma} h^{-3} d\gamma \right) \psi d\gamma = (b_{11} \cos \gamma_2 - b_{21} \sin \gamma_2) I_3^{00} - b_{11} I_3^{01} + b_{21} I_3^{10} = 0 \end{aligned}$$

Приведем результаты расчета статических и динамических характеристик подшипника скольжения по методу расчленения. На фиг. 2, 4, 5 построены зависимости коэффициента нагруженности $\xi = q\Psi^2(\mu\omega)^{-1}$, $q = W(2Rb)^{-1}$, коэффициентов жесткости и демпфирования от относительного эксцентриситета подшипника скольжения. Для косвенной оценки точности на фиг. 2 помещены одновременно зависимости коэффициента нагруженности от относительного эксцентриситета, подсчитанные в первом и втором приближениях (пунктирная и сплошная кривые соответственно). На фиг. 3 изображена кривая, по которой располагаются центры цапф при статическом нагружении подшипника, подсчитанные в первом и втором приближениях (пунктирная и сплошная кривые).

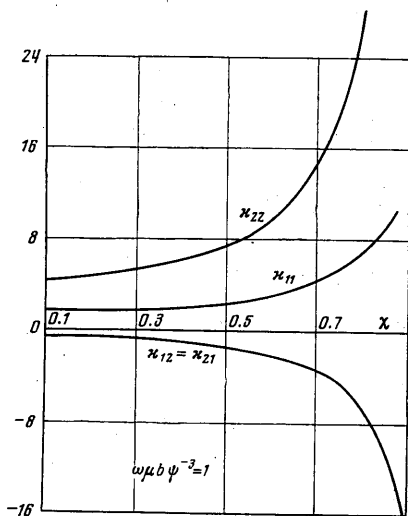


Фиг. 3

Из графиков видно, что формулы первого и второго приближений дают весьма близкие результаты при расчете статической задачи и здесь можно пользоваться формулами первого приближения. По той же причине для расчета коэффициентов жесткости пригодны формулы первого приближе-



Фиг. 4



Фиг. 5

ния, а коэффициенты демпфирования следует вычислять по формулам второго приближения, поскольку начиная только со второго приближения выполняется равенство $\kappa_{12} = \kappa_{21}$, справедливость которого имеет место для точных значений κ_{12} и κ_{21} [2]. В первом же приближении это равенство не обеспечивается.

Поступила 23 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Гидродинамическая теория смазки. М.—Л., Гостехиздат, 1934.
2. Позняк Э. Л. Упрощенный численный метод расчета характеристик подшипников скольжения произвольной формы. Машиноведение, 1966, № 2.
3. Позняк Э. Л. Динамические свойства масляной пленки в подшипниках скольжения. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 6.
4. Розин Л. А. Метод расчленения в теории оболочек. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.