

Подобный характер изменения осевой составляющей скорости можно качественно объяснить совместным действием сил вязкости и кориолисовых сил.

В средней части канала составляющая по оси  $z$  кориолисовой силы ( $2\omega u$ ) направлена в сторону, противоположную основному движению, в отличие от области, прилегающей к верхней границе. По мере приближения к стенке  $y=1$  тормозящее влияние кориолисовой силы ослабевает, и в некоторой части канала, где ее направление совпадает с направлением основного движения, поток ускоряется. Непосредственно у верхней стенки преимущественное действие оказывают силы вязкости. Отметим, что влияние изменения параметра  $Re$  при постоянном значении числа  $Re_0$  на  $w(0, y)/w_0$  носит аналогичный характер.

Для характеристики течения в поперечном сечении канала на фиг. 4 приведена картина линий тока вторичного течения для значений параметров  $Re=135$  и  $Re_0=200$ . Кривым 1-5 на фигуре соответствуют значения  $\psi=0, -2, -3, -4, -5$ . Влияние изменения  $Re$  и  $Re_0$  сказывается в том, что при их увеличении центр замкнутых линий тока смещается к верхней стенке ( $y=1$ ).

В заключение рассмотрим графики зависимости коэффициента сопротивления вращающегося канала от числа  $Re$  для различных значений параметра  $Re_0$ , показанные на фиг. 5, где кривым 1-5 соответствуют значения 0, 50, 20, 100, 200. Анализ этих результатов дает возможность воспользоваться в исследованном диапазоне параметров  $Re$  и  $Re_0$  ( $Re < 10^3$ ,  $5 < Re_0 < 200$ ) для практических расчетов простой приближенной формулой

$$\lambda/\lambda_0 = 1 + \alpha Re + \beta Re_0, \quad \alpha = 0.75 \cdot 10^{-3}; \quad \beta = 0.467 \cdot 10^{-2}$$

Ограниченный диапазон исследованных параметров  $Re$  и  $Re_0$  связан с тем, что при дальнейшем их увеличении время вычислений значительно возрастает.

Поступила 1 III 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
2. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М., «Наука», 1973.
3. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, «Наука», 1966.
4. Ланс Дж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
5. Тарулин Е. Л. Численное исследование свободной конвекции. Перм. гос. ун-т, Уч. зап., 1968, № 184, вып. 1.
6. Том А., Эйплт К. Д. Числовые расчеты полей в технике и физике. М.-Л., «Энергия», 1964.

УДК 536.25

### КОНВЕКЦИЯ В ПЛОСКОМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ, ПОДОГРЕВАЕМОМ СНИЗУ ЧЕРЕЗ СЛОЙ КОНЕЧНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Б. И. МЫЗНИКОВА

(Пермь)

Изучению надкритических режимов свободной конвекции в плоском горизонтальном слое посвящен ряд работ (например, [1, 2]). В большинстве из них на границах слоя задавалась температура или закон теплоотдачи. В [3] в рамках линейной теории исследовалась устойчивость равновесия горизонтального слоя жидкости с учетом конечной теплопроводности границ. В данной работе, являющейся продолжением [4], рассмотрено влияние конечной теплопроводности пластин, ограничивающих слой, на надкритическое конвективное движение. Подобные задачи иногда называют сопряженными.

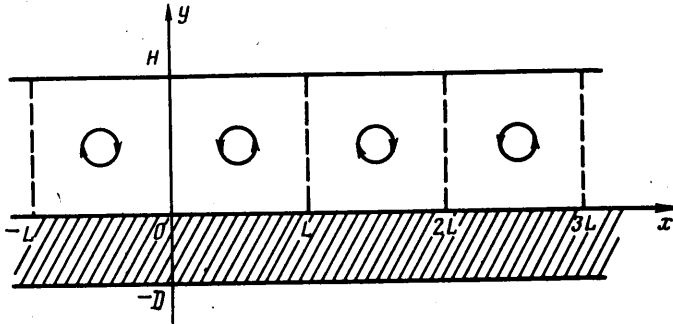
1. Рассмотрим плоское конвективное дыхание вязкой несжимаемой жидкости в подогреваемом снизу горизонтальном слое, ограниченном сверху плоскостью  $y=H$ , а снизу — твердым массивом конечной толщины  $D$ , теплопроводность которого в общем случае отличается от теплопроводности жидкости (фиг. 1). Конвекция возникает за порогом устойчивости равновесия и описывается системой нелинейных уравнений гидродинамики и теплообмена, которая в безразмерной форме имеет вид [5]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \Delta \varphi + G \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$(1.1) \quad \Delta\psi = -\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{P_f} \Delta T$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{P_s} \Delta T$$

Здесь  $\psi(x, y, t)$  — функция тока,  $\varphi(x, y, t)$  — вихрь скорости,  $T(x, y, t)$  — температура. В качестве единиц измерения расстояния, времени, функции тока и температуры выбраны соответственно:  $H$  — высота слоя  $H^2/\nu$  ( $\nu$  — коэффициент кинематической



Фиг. 1

вязкости жидкости),  $\nu, \theta$  — разность температур на нижней и верхней границах слоя жидкости, соответствующая равновесной ситуации.

Уравнения (1.1) описывают поведение жидкости, уравнение (1.2) относится к твердому массиву. На твердой изотермической границе  $y=1$  для составляющих скорости заданы условия прилипания; температура этой границы принята за начало отсчета

$$(1.3) \quad y=1, \quad \psi = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \quad T=0$$

На границе жидкий слой — твердый массив также задаются условия прилипания и требуется непрерывность температуры и тепловых потоков

$$(1.4) \quad y=0, \quad \psi = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{-0} = \gamma \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{+0}$$

Нижняя граница подложки изотермическая

$$(1.5) \quad y=-d, \quad T=1+\gamma d$$

Безразмерными параметрами задачи являются отношение толщины подложки к толщине слоя жидкости  $d$ , отношение коэффициентов теплопроводности жидкости и твердого массива  $\gamma$ , числа Грасгофа  $G$ , Прандтля  $P_f$  и коэффициент  $P_s$ .

$$d = \frac{D}{H}, \quad \gamma = \frac{\chi_f}{\chi_s}, \quad G = \frac{g\beta\theta H^3}{\nu^2}, \quad P_f = \frac{\nu}{\chi_f}, \quad P_s = \frac{\nu}{\chi_s}$$

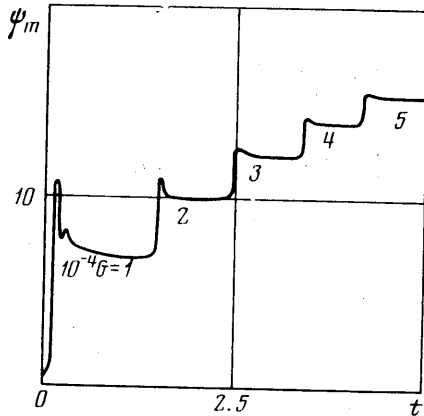
При расчетах предполагалось, что все величины являются периодическими функциями горизонтальной координаты с периодом  $2L$ . При такой постановке задачи рассматриваемая область содержит два вихря разного знака. Как показывают расчеты, поля искоемых функций примерно симметричны относительно вертикали, проходящей через середину ячейки. Так, отличие максимального значения функции тока, полученного при решении с ячейкой длиной  $2L$ , от значения, рассчитанного по половине ячейки, менее 0.5% ( $d=0.5, \gamma=2, G/G_* \approx 6$ ).

Поэтому часть результатов получена при исследовании половины ячейки шириной  $L$ . Подобный прием сокращения вычислений использовался, например, в [2]. В этом случае на вертикальных границах  $x=0, L$  требуется выполнение условий симметрии и непротекания — обращения в нуль теплового потока, нормальной к границе компоненты скорости и касательных напряжений.

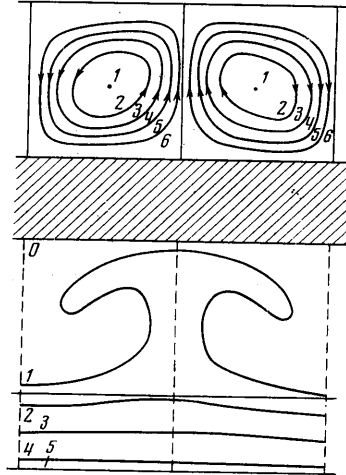
Учет конечной толщины и теплопроводности ограничивающей пластины приводит к уменьшению волнового числа, соответствующего минимуму нейтральной кри-

вой устойчивости равновесия [5, 6]. Числовые расчеты с различными значениями горизонтальных размеров конвективной ячейки показали, что минимум нейтральной кривой смещается от  $L=1$  менее чем на 15%. Поэтому во всех дальнейших расчетах полагалось  $L=1$ . Такой горизонтальный масштаб ячейки с точки зрения линейной теории конвективной устойчивости примерно соответствует минимальному критическому значению числа Рэлея для конвекции в горизонтальном слое жидкости с твердыми изотермическими границами [5].

2. Стационарные решения системы (1.1), (1.2) за порогом устойчивости равновесия получены методом установления; использовался способ продолжения по пара-



Фиг. 2



Фиг. 3

метру  $G$ . Первое решение определялось в результате развития начального возмущения вихря скорости в центре ячейки на фоне покоящейся жидкости с равновесным распределением температуры

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \psi(x, y, 0) &= 0, \\ \varphi(0.5, 0.5, 0) &= 0, \\ T(x, y, 0) &= \begin{cases} 1-y, & y \geq 0 \\ 1-\gamma y, & -d \leq y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Численный метод решения уравнений (1.1), (1.2) с условиями (1.3)–(1.5) аналогичен изложенному в [4]. В расчетах использовалась явная двухслойная конечно-разностная схема с порядком аппроксимации  $\tau+h^2$ . Граничные значения вихря скорости  $\psi$  вычислялись по формуле Тома [5]. Уравнение Пуассона для функции тока  $\psi$  на каждом шаге по времени итерировалось методом последовательной верхней релаксации. Шаг сетки для жидкой области обычно равнялся  $1/16$ ; шаг в твердом массиве менялся от  $1/40$  до  $1/10$  в зависимости от его толщины.

Расчеты проводились для фиксированных значений  $P_f=1$ ,  $P_s=4$ .

3. Результаты вычислений представлены на фиг. 2–4. На фиг. 2 показан процесс установления начальных возмущений для максимального значения функции тока  $\psi_m$  при  $d=0.5$ ,  $\gamma=2$ . Как видно, характерное время установления составляет  $\sim 0.2 \div 1.5$  единиц безразмерного времени. По сравнению со случаем изотермических границ оно увеличивается в 2–3 раза в зависимости от толщины подложки. Вблизи порога устойчивости равновесия, как и в обычном случае [1, 2], время установления наибольшее.

Структура полей скорости и температуры в стационарном режиме приведена на фиг. 3 (единица на карте линий тока соответствует максимальному значению функции тока  $\psi_m = \pm 22.719$ , линиям 2–6 в верхней части фигуры соответствуют значения  $\pm 0.8$ ,  $\pm 0.6$ ,  $\pm 0.4$ ,  $\pm 0.2$ , 0, линиям 1–5 в нижней части фигуры соответствуют значения 0.2, 0.6, 1.2, 1.8, 2.0). Здесь  $G=120\,000$ ,  $d=0.5$ ,  $\gamma=2$ . В равновесии изотермы представляют собой горизонтальные прямые. С ростом  $G$  интенсивное конвективное движение за порогом устойчивости приводит к значительному искривлению изотерм. Возле горизонтальных границ ячейки формируется температурный пограничный слой. На вертикалях  $x=0$ ,  $L$  и  $2L$  с хорошей степенью точности выполняются условия теплоизоляции половины ячейки.

Экстраполяция зависимости  $\psi_m(G)$  на нулевое значение  $\psi_m$  позволяет определить критическое значение числа Грасгофа, выше которого существует стационарное движение.

Как и следовало ожидать, учет конечной теплопроводности подложки приводит к уменьшению  $G_*$ . В случае  $\gamma=2$  по результатам расчетов была найдена зависимость критического числа Грасгофа от толщины подложки, описываемая следующей приближенной формулой:

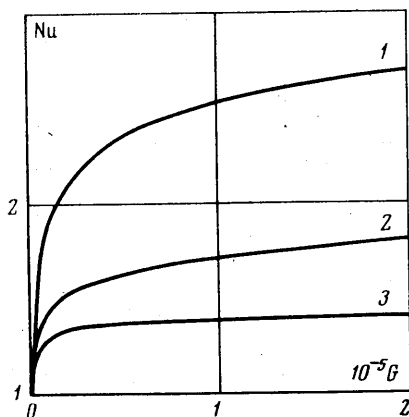
$$(3.1) \quad G_* = 1708 - 280[1 - \exp(-2.2d)]$$

Формула (3.1) описывает численные результаты с погрешностью менее 3,5%.

По распределению температуры определяется тепловой поток через ячейку, который характеризуется безразмерным параметром теплопередачи — число Нуссельта  $Nu$ . (Значение  $Nu=1$  соответствует переносу тепла за счет теплопроводности.) Аналогично [4] в данной задаче существует предельное значение числа Нуссельта, обусловленное тепловым сопротивлением подложки

$$(3.2) \quad Nu - 1 < 1/\gamma d$$

На фиг. 4 приведены найденные в счете зависимости  $Nu(G)$  для  $\gamma=2$  и толщин подложки  $d=0.125, 0.5, 1.0$  (кривые 1–3 соответственно). Как видно, ограничение (3.2)



Фиг. 4

нельзя не учитывать в случае толстых подложек с малым коэффициентом теплопроводности. В случае же металлической подложки, например медной ( $\gamma \sim 10^{-3}$ ), это ограничение не обременительно и результаты расчетов согласуются с экспериментальными данными [7] — для  $d=0.8$  и  $G=10\ 700$  разница в значениях числа Нуссельта составляет  $\approx 10\%$ .

В случае твердых изотермических границ колебательные режимы конвекции обнаружены согласно [2] при  $G > 140 G_*$ . В надкритической области увеличение  $\gamma$  приводит к уменьшению градиентов температуры и интенсивности течения, а следовательно, к расширению диапазонов чисел Грасгофа, при которых осуществляют стационарные режимы.

Расчеты показывают, что параметры  $\gamma$  и  $d$  в рассматриваемой области значений не являются независимыми. Поведение интегральных характеристик при  $\gamma d = \text{const}$  практически одинаково. Так, например, для двух подслоек с параметрами  $\gamma=2, d=0.125$  и  $\gamma=0.5, d=0.5$  (в обоих вариантах  $\gamma d=0.25$ ) отличие в значениях  $\psi_m$  и  $Nu$  не превышает 0,3%.

Установление этого факта сокращает число независимых параметров. Напомним, что в этой задаче пять определяющих параметров; в случае изотермических граничных условий их только два.

Проведенные расчеты показывают, что влияние конечной толщины и теплопроводности ограничивающей пластины на надкритические конвективные движения значительно при  $\gamma d > 1$ . При  $\gamma d < 0.1$  границы с хорошей степенью точности можно считать изотермическими.

Автор благодарит Е. Л. Тарунину за руководство работой.

Поступила 27 XII 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Fromm J. F. Numerical solutions of the nonlinear equations for a heated fluid layer. Phys. Fluids, 1965, vol. 8, No. 10.
2. Власюк М. П., Полежаев В. И. Численное исследование конвективных движений в горизонтальном слое газа, подогреваемом снизу. М., Препринт ИПМ АН СССР, 1970, № 37.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Семакин И. Г. О конвективной неустойчивости жидкости в горизонтальном слое, разделяющем массивы разной теплопроводности. Уч. зап. Пермск. ун-та, 1971, № 248, Гидродинамика, вып. 3.
4. Мызникова Б. И., Тарунин Е. Л. Конвекция в плоском горизонтальном слое, подогреваемом снизу через слой с конечной теплопроводностью. Тезисы докладов II Всесоюзной конференции «Современные проблемы тепловой конвекции», Пермь, 1975.
5. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
6. Nield D. A. The Rayleigh — Jeffreys problem with boundary slab of finite conductivity. J. Fluid Mech., 1968, vol. 32, No. 2.
7. Silveston P. L. Wärmedurchgang in waagerechten Flüssigkeitsschichten, Forsch. Ing.—Wes., 1958, Bd 24, H. 1.