

3. Ерофеев А. И., Перепухов В. А. Расчет обтекания пластины, расположенной вдоль потока разреженного газа. Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 3.
4. Ерофеев А. И., Перепухов В. А. Расчет обтекания пластины бесконечного размаха потоком разреженного газа. Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 1.
5. Гусев В. Н., Климова Т. В., Рябов В. В. Основные закономерности изменения аэродинамических характеристик в переходной области при гиперзвуковых скоростях потока. Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 3.
6. Bird G. A. Direct simulation and the Boltzmann equation. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 11.
7. Белоцерковский О. М., Яницкий В. Е. Статистический метод частиц в ячейках для решения задач динамики разреженного газа. I. Основы построения метода. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 5.
8. Ерофеев А. И., Перепухов В. А. Расчет поперечного обтекания пластины потоком разреженного газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 4.
9. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.

УДК 533.697

## ЛАМИНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ КАНАЛАХ

С. В. НИКОЛЬСКАЯ

(Ленинград)

Решена задача о стационарном, ламинарном движении вязкой несжимаемой жидкости в канале квадратного поперечного сечения, вращающемся относительно оси, перпендикулярной оси канала, путем численного интегрирования уравнений движения. Построены графики, характеризующие влияние изменения параметров задачи  $Re$  и  $Re_\omega$  на течение в осевом направлении, приведена картина линий тока вторичного течения. Кроме того, получены кривые зависимости коэффициента сопротивления вращающегося канала от числа  $Re$ , параметром которых является  $Re_\omega$ . Анализ этих результатов позволяет составить приближенную формулу вычисления коэффициента сопротивления вращающегося канала в зависимости от параметров  $Re$  и  $Re_\omega$ .

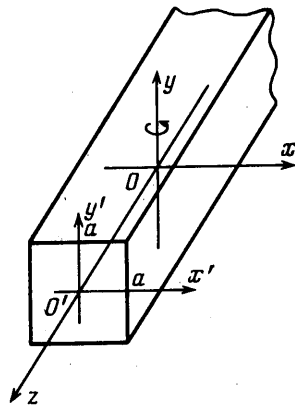
Рассмотрим ламинарное движение жидкости в канале квадратного поперечного сечения, вращающемся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, перпендикулярной оси канала (фиг. 1). Будем считать, что в направлении оси  $z$  движение является установившимся ( $\partial w/\partial z=0$ ). Как известно [1], система уравнений, описывающих движение жидкости в этом случае, в безразмерной форме имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = \\ & = \nabla^2 \varphi + \frac{1}{4} Re_\omega^2 \frac{\partial w_2}{\partial y_1} \\ (1) \quad & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \frac{\partial w_2}{\partial y_1} = \nabla^2 w_2 - S \end{aligned}$$

$$\varphi = -\nabla^2 \psi$$

Здесь в качестве масштабов длины, функции тока  $\psi$  и осевой скорости  $w$  выбраны соответственно половина стороны квадрата  $a$ , коэффициент кинематической вязкости  $\nu$  и величина  $2\omega a$ , имеющая размерность скорости, так что  $x=ax_1$ ,  $y=ay_1$ ,  $\psi=\nu\psi_1$ ,  $w=2\omega aw_1$ .

Функция тока течения в поперечном сечении канала  $\psi$  удовлетворяет соотношениям  $u=\partial\psi/\partial y$ ,  $v=-\partial\psi/\partial x$ ; новая неизвестная функция  $w_2$  введена по формуле  $w_2=w_1-x_1$ . Кроме того, параметр  $Re_\omega$  в системе (1) определяется равенством  $Re_\omega = \omega(2a)^2/\nu$ , а величина  $S$  представляет собой безразмерный комплекс  $S=ac/2\omega\nu$ , где  $c=\partial p^*/\partial z = \text{const}$  — постоянный перепад приведенного давления  $p^*=p^{-1/2}\rho\omega^2(x^2+z^2)$  вдоль оси  $z$ . В дальнейшем индексы, соответствующие безразмерным величинам, опущены.



Фиг. 1

Поскольку из физических соображений ясно, что плоскость  $z, x$  — плоскость симметрии потока, целесообразно искать решение только для половины канала. В этом случае для системы уравнений (1) ставятся граничные условия прилипания жидкости на стенках  $x=\pm 1, y=1$  и условия симметрии на оси  $x$ , т. е.

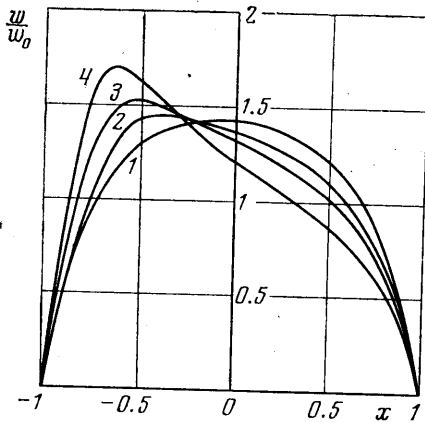
$$(2) \quad \begin{aligned} \psi=0, \quad \partial\psi/\partial x=0, \quad w=1, \quad x=-1 \\ \psi=0, \quad \partial\psi/\partial x=0, \quad w=-1, \quad x=1 \\ \psi=0, \quad \partial\psi/\partial y=0, \quad w=-x, \quad y=1 \\ \psi=0, \quad \partial^2\psi/\partial y^2=0, \quad \partial w/\partial y=0, \quad y=0 \end{aligned}$$

Поставленная задача решается численно методом установления. Для этого система уравнений (1) заменяется формально следующей:

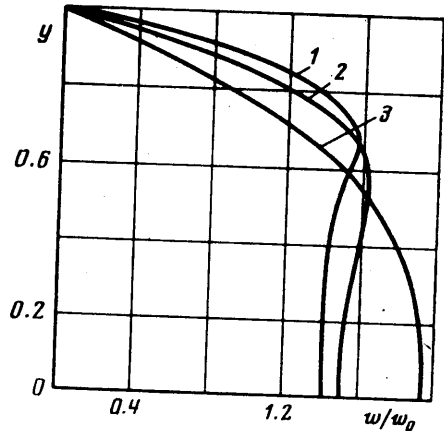
$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} &= \nabla^2\psi + \frac{1}{4} \text{Re}_\omega^2 \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} &= \nabla^2 w - S \\ \varphi &= -\nabla^2\psi \end{aligned}$$

и к граничным условиям добавляются начальные, при этом решение стационарной задачи не должно зависеть от начального распределения завихренности  $\varphi$  и осевой скорости [2].

Дифференциальные уравнения системы (3) аппроксимируются конечно-разностными, в которых все пространственные производные заменяются центральными раз-



Фиг. 2



Фиг. 3

ностями. Первые два уравнения записанной таким образом системы решаются методом дробных шагов [2, 3], а последнее уравнение системы, представляющее собой уравнение Пуассона, — с помощью итерационного процесса Либмана [4]. Для решения системы (3) применяется невязная разностная схема, аналогичная приведенной в работе [5].

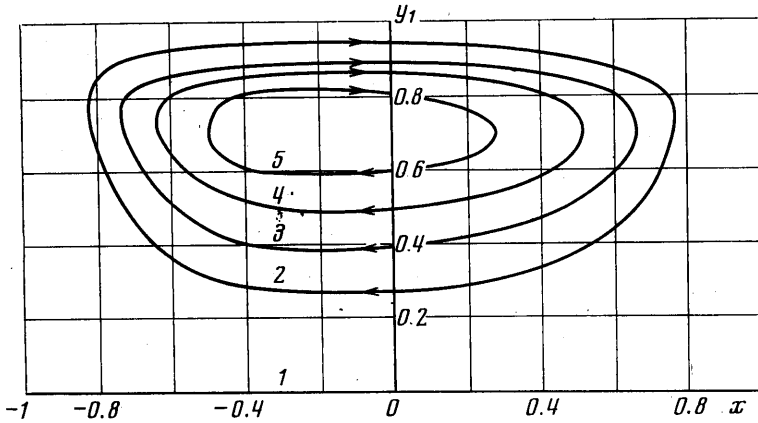
В качестве граничных условий для функции завихренности  $\varphi$  используются условия, предложенные в [6]. В начальный момент времени предполагается, что  $\varphi(x, y, 0)=0$  и  $w(x, y, 0)=-x$ . На каждом шаге по времени функции  $\varphi(x, y, t)$  и  $w(x, y, t)$  определяются с помощью метода прогонки, а функция тока  $\psi(x, y, t)$  находится из решения уравнения Пуассона. Процесс прекращается, когда функции  $\varphi(x, y, t)$ ,  $\psi(x, y, t)$  и  $w(x, y, t)$  становятся независимыми от времени, т. е. перестают изменяться при переходе от одного временного слоя к другому с заданной точностью.

Проведенные вычисления позволили оценить характер течения во вращающемся перпендикулярно своей оси канале, определить коэффициент сопротивления канала для разных значений, характерных для данной задачи параметров

$$\text{Re} = w_0 2a/\nu, \quad \text{Re}_\omega = \omega(2a)^2/\nu$$

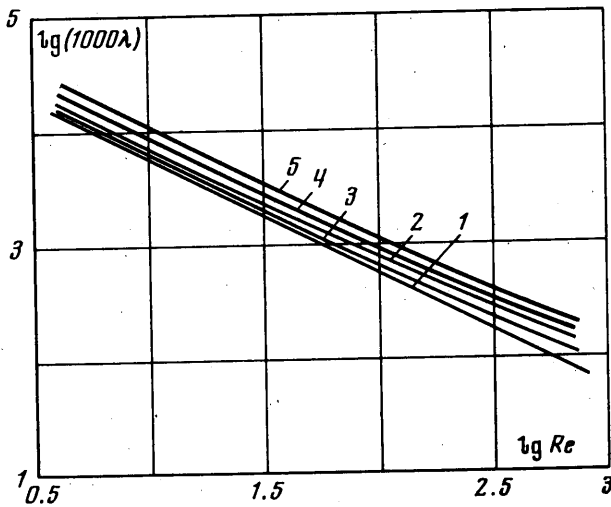
Здесь  $w_0$  — среднее значение  $w$ .

На фиг. 2 и 3 построены графики безразмерной осевой скорости  $w(x, y)/w_{\text{ср}}$  в центральных сечениях канала  $y=0$  и  $x=0$  соответственно, которые показывают, как меняется характер течения при изменении чисел  $Re$  и  $Re_0$ . График зависимости  $w(x, 0)/w_0$ , представленный на фиг. 2, на котором кривые 1—4 соответствуют значениям  $Re=14, 70, 135, 370$ , позволяет судить о влиянии числа  $Re$  на основной поток при постоянном значении параметра  $Re_0=200$ . Отчетливо прослеживается смещение точки, где скорость  $w$  достигает максимального значения, к стороне давления ( $x=-1$ ) с уве-



Фиг. 4

личением числа  $Re$ , а также изменение формы профиля скорости от симметричного профиля типа Пуазейля при малых значениях  $Re$  до линейного в средней части канала (приблизительно для  $-0,5 < x < 0,5$ ) при достаточно больших числах  $Re$ . При этом ширина области канала, где зависимость  $w(x)$  близка к линейной, возрастает с увеличением  $Re$ . Эти явления объясняются возрастающим (при увеличении числа  $Re$ ) действием кориолисовой силы на течение в осевом направлении.



Фиг. 5

Влияние изменения параметра  $Re_0$  при постоянном значении числа  $Re$  ясно наблюдается при рассмотрении графиков зависимости  $w(0, y)/w_0$ , показанных на фиг. 3 для  $Re=10$  (кривым 1—3 соответствуют значения  $Re_0=20, 100, 200$ ). С увеличением числа  $Re_0$  профиль осевой составляющей скорости изменяется от параболического до почти плоского в средней части канала. Следует заметить также, что область канала, где величину скорости  $w$  можно считать почти постоянной, увеличивается по мере возрастания параметра  $Re_0$ . Кроме того, максимум  $w(y)$  смещается к верхней стенке ( $y=1$ ) и возрастает его величина по сравнению со значением скорости на оси.

Подобный характер изменения осевой составляющей скорости можно качественно объяснить совместным действием сил вязкости и кориолисовых сил.

В средней части канала составляющая по оси  $z$  кориолисовой силы ( $2\omega u$ ) направлена в сторону, противоположную основному движению, в отличие от области, прилегающей к верхней границе. По мере приближения к стенке  $y=1$  тормозящее влияние кориолисовой силы ослабевает, и в некоторой части канала, где ее направление совпадает с направлением основного движения, поток ускоряется. Непосредственно у верхней стенки преимущественное действие оказывают силы вязкости. Отметим, что влияние изменения параметра  $Re$  при постоянном значении числа  $Re_0$  на  $w(0, y)/w_0$  носит аналогичный характер.

Для характеристики течения в поперечном сечении канала на фиг. 4 приведена картина линий тока вторичного течения для значений параметров  $Re=135$  и  $Re_0=200$ . Кривым 1-5 на фигуре соответствуют значения  $\psi=0, -2, -3, -4, -5$ . Влияние изменения  $Re$  и  $Re_0$  сказывается в том, что при их увеличении центр замкнутых линий тока смещается к верхней стенке ( $y=1$ ).

В заключение рассмотрим графики зависимости коэффициента сопротивления вращающегося канала от числа  $Re$  для различных значений параметра  $Re_0$ , показанные на фиг. 5, где кривым 1-5 соответствуют значения 0, 50, 20, 100, 200. Анализ этих результатов дает возможность воспользоваться в исследованном диапазоне параметров  $Re$  и  $Re_0$  ( $Re < 10^3$ ,  $5 < Re_0 < 200$ ) для практических расчетов простой приближенной формулой

$$\lambda/\lambda_0 = 1 + \alpha Re + \beta Re_0, \quad \alpha = 0.75 \cdot 10^{-3}; \quad \beta = 0.467 \cdot 10^{-2}$$

Ограниченный диапазон исследованных параметров  $Re$  и  $Re_0$  связан с тем, что при дальнейшем их увеличении время вычислений значительно возрастает.

Поступила 1 III 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
2. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М., «Наука», 1973.
3. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, «Наука», 1966.
4. Ланс Дж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
5. Тарулин Е. Л. Численное исследование свободной конвекции. Перм. гос. ун-т, Уч. зап., 1968, № 184, вып. 1.
6. Том А., Эйплт К. Д. Числовые расчеты полей в технике и физике. М.-Л., «Энергия», 1964.

УДК 536.25

### КОНВЕКЦИЯ В ПЛОСКОМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ, ПОДОГРЕВАЕМОМ СНИЗУ ЧЕРЕЗ СЛОЙ КОНЕЧНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Б. И. МЫЗНИКОВА

(Пермь)

Изучению надкритических режимов свободной конвекции в плоском горизонтальном слое посвящен ряд работ (например, [1, 2]). В большинстве из них на границах слоя задавалась температура или закон теплоотдачи. В [3] в рамках линейной теории исследовалась устойчивость равновесия горизонтального слоя жидкости с учетом конечной теплопроводности границ. В данной работе, являющейся продолжением [4], рассмотрено влияние конечной теплопроводности пластин, ограничивающих слой, на надкритическое конвективное движение. Подобные задачи иногда называют сопряженными.

1. Рассмотрим плоское конвективное дыхание вязкой несжимаемой жидкости в подогреваемом снизу горизонтальном слое, ограниченном сверху плоскостью  $y=H$ , а снизу — твердым массивом конечной толщины  $D$ , теплопроводность которого в общем случае отличается от теплопроводности жидкости (фиг. 1). Конвекция возникает за порогом устойчивости равновесия и описывается системой нелинейных уравнений гидродинамики и теплообмена, которая в безразмерной форме имеет вид [5]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \Delta \varphi + G \frac{\partial T}{\partial x}$$