

ются капиллярными силами. Исследование вытеснения после прорыва воды требует постановки специального граничного условия на выходе и особого рассмотрения.

Предлагаемый алгоритм может быть использован для исследования процесса вытеснения с детальным описанием распределения фаз на масштабе порядка размера пор. Для этого следует использовать модель капиллярных сетей регулярной структуры типа сеток. Задавая распределение радиусов капилляров, можно вычислить распределение фаз по капиллярам, предполагая, что в капиллярах осуществляется поршневое вытеснение.

Поступила 29 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабалян Г. А.* Вопросы механизма нефтеотдачи. Баку, Азнефтеиздат, 1956.
2. *Курбанов А. К.* Об уравнениях движения двухфазных жидкостей в пористой среде. В сб.: «Теория и практика добычи нефти». М., «Недра», 1968.
3. *Индельман П. В., Кац Р. М., Шейдлер М. И.* Исследование процессов неустойчивого вытеснения с помощью численного моделирования. В сб.: «Численное решение задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости». (Тр. 3 Всес. семинара.) Новосибирск, 1977. (АН СССР. Сиб. отд.-ние. Вычислит. центр).

УДК 533.6.011.8

О МОДЕЛИРОВАНИИ МЕЖМОЛЕКУЛЯРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

А. И. ЕРОФЕЕВ

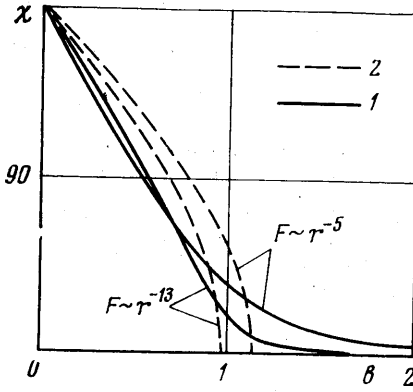
(Москва)

При решении задач обтекания пластины потоком разреженного газа на основе уравнения Больцмана или модельного уравнения в [1-4] проводилось сравнение с экспериментальными данными. При этом отмечалось [3,4], что сравнение не является прямым, поскольку решение уравнений проводилось для одноатомного газа, в то время как в большинстве экспериментов рабочим газом был воздух. В данной работе проведено сопоставление расчетных значений аэродинамических коэффициентов пластины для углов атаки α от 0 до 40° и клина с углом полураствора $\theta=20^\circ$ при нулевом угле атаки с экспериментальными данными, полученными в потоках как одноатомных, так и многоатомных газов [5].

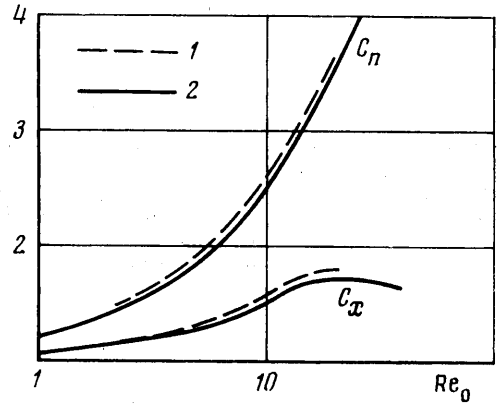
Решение уравнения Больцмана проводилось методом прямого моделирования, подробное описание которого дано в [6-8]. Здесь отметим только, что в этом методе прослеживается движение ансамбля молекул, моделирующих реальный газ. Область течения около тела разбивается на ячейки, размер которых должен быть меньше местной длины свободного пробега молекул. Движение молекул и столкновения между ними рассматриваются последовательно. Столкновения между молекулами проводятся статистически, причем сталкиваться могут те молекулы, которые находятся в одной геометрической ячейке. На каждом шаге по времени часть молекул покидает область течения, а с границ «вбрасывается» определенное число частиц в соответствии с граничной функцией распределения. Задача решается методом установления; по прошествии N шагов в системе устанавливается квазистационарное состояние, после чего расчет ведется до тех пор, пока флуктуации аэродинамических характеристик не станут достаточно малыми.

1. **Модель межмолекулярного взаимодействия.** При исследовании обтекания пластины потоком разреженного газа в [1,4,8] использовались простейшие модели межмолекулярного взаимодействия — твердые сферы и максвелловские сферы. Молекулам — максвелловским сферам, строго говоря, не соответствует какой-либо потенциал взаимодействия. Для этой модели предполагается, что сечение столкновений $\sigma(g)$ пропорционально относительной скорости, т. е. $g\sigma(g)=\sigma_0=\text{const}$, а само столкновение происходит по закону твердых сфер. В этом случае коэффициент вязкости $\mu=2kT\sigma_0^{-1}$ (k — постоянная Больцмана, T — температура газа). Рассмотрение этих двух моделей в задачах обтекания тел позволяет выяснить влияние сечений столкновений (частоты столкновений) в чистом виде, поскольку индикатрисы рассеяния одинаковы.

В этой связи представляется целесообразным выяснить и влияние, обусловленное различием в индикатрисах рассеяния. Это можно сделать, сравнивая результаты расчетов для модели максвелловских сфер с расчетами для «истинных» максвелловских молекул, потенциал взаимодействия которых $U(r) = Br^{-4}$ (r — расстояние между молекулами, B — постоянная). Заметим, что обе эти модели дают одинаковую зависи-



Фиг. 1



Фиг. 2

мость коэффициента вязкости от температуры, а именно $\mu \sim T$. Но прежде чем приводить результаты такого сравнения, обобщим модель максвелловских сфер для произвольного степенного потенциала взаимодействия.

Запишем уравнение Больцмана для одноатомного газа со степенным законом взаимодействия $U(r) = Br^{-\nu+1}$ в виде

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{2B}{m}\right)^{2/(\nu-1)} \int (f'f_1' - ff_1) g^{(\nu-5)/(\nu-1)} b db d\varphi dV_1,$$

$$b = b_1 \left(\frac{mg^2}{2B}\right)^{1/(\nu-1)}$$

Здесь m — масса молекул, b_1 — прицельное расстояние, φ — азимутальный угол. Введем теперь модель псевдостепенных молекул, полагая, что столкновение этих молекул проводится по закону твердых сфер, диаметр которых a определяется соотношением

$$\left(\frac{2B}{m}\right)^{2/(\nu-1)} \int_0^a \int_0^a b db d\varphi = \sigma_0 = \text{const}$$

Тогда для коэффициента вязкости μ получим [9]

$$\mu = \frac{15m \sqrt{\pi} (4RT)^\omega}{16\sigma_0 \Gamma(x)}, \quad \omega = \frac{1}{2} (\nu+3)/(\nu-1), \quad x = (4\nu-6)/(\nu-1).$$

Здесь R — газовая постоянная, $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Заметим, что зависимость μ от T для псевдостепенных молекул имеет тот же вид, что и при рассмотрении степенного закона взаимодействия между молекулами.

Параметр σ_0 в задачах обтекания определим через число Рейнольдса $Re = \rho UL/\mu$ (ρ , U — характерные плотность и скорость газа, L — линейный размер тела). Сравнение результатов расчетов для псевдостепенных молекул и молекул, взаимодействующих по степенному закону, естественно проводить при одном и том же числе Re . Приравнивая коэффициенты вязкости для этих двух случаев, получим для определения диаметра псевдостепенных молекул a соотношение $a = \sqrt{3} A_2(\nu)$. Функция $A_2(\nu)$ заtabулирована в [9].

Что означает замена степенного закона взаимодействия между молекулами на модель псевдостепенных молекул видно из фиг. 1, на которой изображены зависимости угла рассеяния χ от прицельного параметра b для степенного закона $\nu=5$ и 13 (кривая 1) и для эквивалентной модели псевдостепенных молекул (кривая 2). Величи-

на χ при взаимодействии по степенному закону определяется соотношением

$$\chi = \pi - 2 \int_0^{z_0} \left[1 - z^2 - \frac{2}{\nu-1} \left(\frac{z}{b} \right)^{\nu-1} \right]^{-1/2} dz$$

где z_0 — положительный корень уравнения

$$1 - z^2 - \frac{2}{\nu-1} \left(\frac{z}{b} \right)^{\nu-1} = 0$$

Для модели псевдостепенных молекул $\chi = 2 \arcsin \cos(b/a)$.

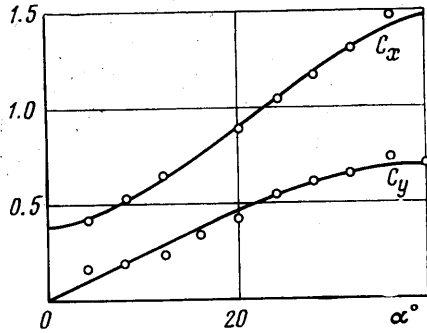
Как видно из фиг. 1, различие между моделями в индикатрисах рассеяния достаточно сильное. Для выяснения влияния этого различия на аэродинамические характеристики тел были проведены расчеты обтекания пластины под нулевым углом атаки при $M_\infty = 10$ и $T_w = T_0$ (T_w — температура пластины, T_0 — температура торможения). При расчетах столкновений по степенному закону максимальная величина прицельного параметра принималась равной $\nu = 5 - b_{\max} = 2.38$, что соответствует углу рассеяния $\chi_{\min} = 2^\circ$; $\nu = 13 - b_{\max} = 1.38$, $\chi_{\min} = 0.85^\circ$.

На фиг. 2 представлены результаты расчетов коэффициентов сопротивления C_x и нормальной силы C_n , отнесенных к свободномолекулярным значениям, как функции числа $Re_0 = \rho_\infty U_\infty L / \mu(T_0)$ для $\nu = 5$ (кривые 1 — взаимодействие по степенному закону, кривые 2 — модель псевдостепенных молекул; ρ_∞ , U_∞ — плотность и скорость газа в набегающем потоке). Как видно, расхождение в величинах C_x и C_n невелико — для C_x различие не превышает 6%. При $\nu = 13$ расхождение несколько меньше. Эти результаты дают основание при решении задач обтекания тел разреженным газом использовать модель псевдостепенных молекул как более простую по сравнению с описанием взаимодействия между молекулами через потенциальную функцию.

Действительно, расчеты столкновений молекул, взаимодействие между которыми описывается потенциалом, усложняется, во-первых, из-за сложности определения угла рассеяния; во-вторых, из-за более громоздких (по сравнению с твердыми сферами) выражений для определения скорости молекул после столкновения; в-третьих, из-за того, что прицельный параметр должен быть конечным, необходимо либо исследовать зависимость решения от величины b_{\max} , либо брать b_{\max} достаточно большим, что приводит к увеличению частоты столкновений. Первая трудность легко преодолевается, если угол рассеяния не вычислять в каждом акте столкновений, решая динамическую задачу, а заранее затабулировать зависимость угла рассеяния от прицельного параметра. Два других обстоятельства приводят к увеличению расчетного времени.

В качестве примера расчета с моделью псевдостепенных молекул и сравнения с экспериментальными данными [5] была решена задача об обтекании пластины конечной толщины (относительное утолщение $\delta = 0.06$). Поскольку рабочим газом в эксперименте был гелий, для которого в широком интервале температур $\mu \sim T^{0.64}$, расчет проводился для псевдостепенных молекул с $\nu = 13$, так что $\mu \sim T^{0.67}$. Расчетные параметры были выбраны следующими: $M_\infty = 9$, $T_w = T_0$, отражение молекул от поверхности диффузное с коэффициентом аккомодации, равным единице. Число Re_0 и в расчетах, и в эксперименте было одинаковым ($Re_0 = 2.46$). На фиг. 3 приведены зависимости аэродинамических коэффициентов от угла атаки α (точками обозначены экспериментальные данные). Как видно, согласие между экспериментальными и расчетными результатами оказалось достаточно хорошим.

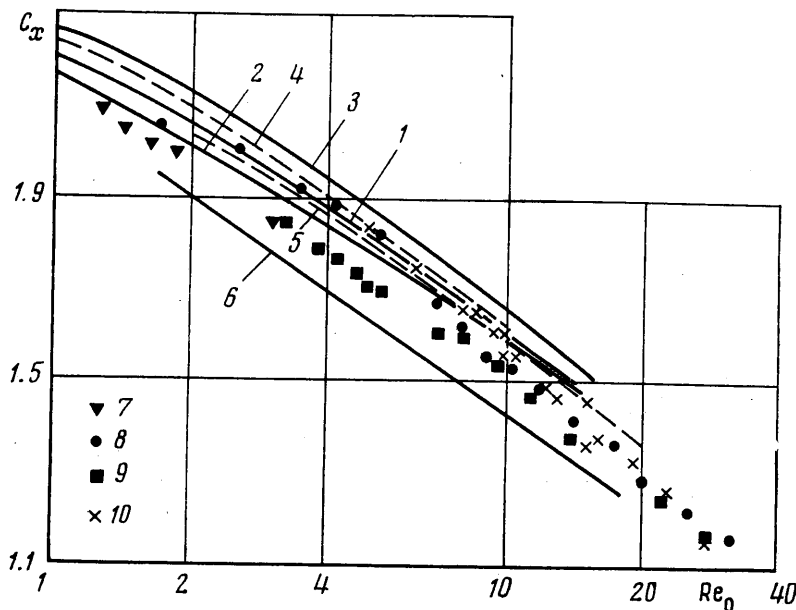
2. Обтекание клина с углом раствора $2\theta = 40^\circ$ под нулевым углом атаки. В этом примере для прямого сопоставления результатов расчетов с экспериментальными данными в расчетах использовалась описанная выше модель псевдостепенных молекул, причем параметр ν выбирался равным $\nu = 13$ для моделирования гелия ($\mu \sim T^{0.67}$) и $\nu = 7$ для моделирования аргона ($\mu \sim T^{0.83}$). Кроме того, расчеты проводились для максвелловских сфер ($\nu = 5$, $\mu \sim T$) и шероховатых максвелловских сфер, позволяющих учесть влияние внутренних степеней свободы молекул. Подробное описание этой модели дано в [3]. Здесь отметим только, что для молекул — шероховатых максвелловских сфер — зависимость коэффициента вязкости от температуры линейна, моле-



Фиг. 3

кулы имеют три вращательные степени свободы, поэтому для них отношение удельных теплоемкостей $\gamma=4/3$. Далее, эффективность обмена энергией между поступательными и вращательными степенями свободы зависит от параметра $\epsilon=4I/ma^2$, где m — масса молекул, d — диаметр, I — момент инерции относительно диаметра. При малых значениях ϵ среднее число столкновений z_R , необходимых для установления равновесия между вращательными и поступательными степенями свободы, определяется следующим образом: $z_R=6/5\epsilon$. Для установления качественного эффекта от влияния внутренних степеней свободы принималось, что $\epsilon=2/3$, т. е. $z_R \approx 1$.

Результаты расчетов и экспериментальные данные работы [5] представлены на фиг. 4: кривые 1, 2 — шероховатые максвелловские сферы $S_\infty=5,5$ и 10, соответственно; 3 — $\nu=5$, $S_\infty=5,5$; 4 — $\nu=13$, $M_\infty=8$; 5 — $\nu=7$, $M_\infty=10 \div 20$; 6 — $\nu=7$, $M_\infty=10-17$,



Фиг. 4

$T_w=0.32 T_0$; 7—10 — экспериментальные данные для рабочих газов — гелия, аргона, воздуха, углекислого газа соответственно ($S_\infty=U_\infty/\sqrt{2RT_\infty}$). Все расчеты проводились при диффузном отражении молекул от поверхности и коэффициенте аккомодации, равном единице; за исключением случая 6 $T_w=T_0$. При вычислении C_x и Re_0 в качестве характерных размеров принимались площадь мишени и длина клина.

Прежде всего необходимо отметить, что качественное влияние параметров — числа M_∞ или S_∞ , γ , показателя степени ω в зависимости $\mu \sim T_w^\omega$ — более соответствует обтеканию пластины при $\alpha=90^\circ$ [8], чем при малых углах атаки [4] или $\alpha=0$ [3]. Действительно, сравнение кривых 1 и 2 показывает, что влияние числа M_∞ или S_∞ достаточно слабое при $S_\infty \geq 5$, т. е. гиперзвуковая стабилизация наступает уже при умеренных числах M_∞ . Как и в случае поперечного обтекания пластины, расчеты для клина свидетельствуют о незначительном влиянии на коэффициент сопротивления параметра ω и внутренних степеней свободы молекул. При изменении перечисленных выше параметров коэффициент сопротивления изменяется не более чем на 6%. Наиболее сильное влияние на C_x оказывает температурный фактор $t_w=T_w/T_0$. Как и в случае обтекания пластины под углом атаки (фиг. 3), можно отметить достаточно хорошее согласие между расчетными и экспериментальными данными.

Поступила 2 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. И. Расчет обтекания пластины под углом атаки потоком разреженного газа. Уч. зап. ЦАГИ, 1973, т. 4, № 1.
2. Шахов Е. М. Обтекание пластины потоком разреженного газа. В сб. «Численные методы в динамике разреженных газов». вып. 1, М., ВП АН СССР, 1973.

3. Ерофеев А. И., Перепухов В. А. Расчет обтекания пластины, расположенной вдоль потока разреженного газа. Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 3.
4. Ерофеев А. И., Перепухов В. А. Расчет обтекания пластины бесконечного размаха потоком разреженного газа. Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 1.
5. Гусев В. Н., Климова Т. В., Рябов В. В. Основные закономерности изменения аэродинамических характеристик в переходной области при гиперзвуковых скоростях потока. Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 3.
6. Bird G. A. Direct simulation and the Boltzmann equation. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 11.
7. Белоцерковский О. М., Яницкий В. Е. Статистический метод частиц в ячейках для решения задач динамики разреженного газа. I. Основы построения метода. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 5.
8. Ерофеев А. И., Перепухов В. А. Расчет поперечного обтекания пластины потоком разреженного газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 4.
9. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.

УДК 533.697

ЛАМИНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ КАНАЛАХ

С. В. НИКОЛЬСКАЯ

(Ленинград)

Решена задача о стационарном, ламинарном движении вязкой несжимаемой жидкости в канале квадратного поперечного сечения, вращающемся относительно оси, перпендикулярной оси канала, путем численного интегрирования уравнений движения. Построены графики, характеризующие влияние изменения параметров задачи Re и Re_ω на течение в осевом направлении, приведена картина линий тока вторичного течения. Кроме того, получены кривые зависимости коэффициента сопротивления вращающегося канала от числа Re , параметром которых является Re_ω . Анализ этих результатов позволяет составить приближенную формулу вычисления коэффициента сопротивления вращающегося канала в зависимости от параметров Re и Re_ω .

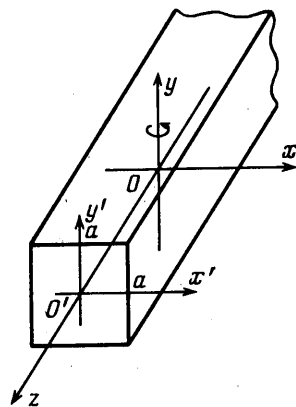
Рассмотрим ламинарное движение жидкости в канале квадратного поперечного сечения, вращающемся с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной оси канала (фиг. 1). Будем считать, что в направлении оси z движение является установившимся ($\partial w/\partial z=0$). Как известно [1], система уравнений, описывающих движение жидкости в этом случае, в безразмерной форме имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = \\ & = \nabla^2 \varphi + \frac{1}{4} Re_\omega^2 \frac{\partial w_2}{\partial y_1} \\ (1) \quad & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \frac{\partial w_2}{\partial y_1} = \nabla^2 w_2 - S \end{aligned}$$

$$\varphi = -\nabla^2 \psi$$

Здесь в качестве масштабов длины, функции тока ψ и осевой скорости w выбраны соответственно половина стороны квадрата a , коэффициент кинематической вязкости ν и величина $2\omega a$, имеющая размерность скорости, так что $x=ax_1$, $y=ay_1$, $\psi=\nu\psi_1$, $w=2\omega aw_1$.

Функция тока течения в поперечном сечении канала ψ удовлетворяет соотношениям $u=\partial\psi/\partial y$, $v=-\partial\psi/\partial x$; новая неизвестная функция w_2 введена по формуле $w_2=w_1-x_1$. Кроме того, параметр Re_ω в системе (1) определяется равенством $Re_\omega = \omega(2a)^2/\nu$, а величина S представляет собой безразмерный комплекс $S=ac/2\omega\nu$, где $c=\partial p^*/\partial z = \text{const}$ — постоянный перепад приведенного давления $p^*=p^{-1/2}\rho\omega^2(x^2+z^2)$ вдоль оси z . В дальнейшем индексы, соответствующие безразмерным величинам, опущены.



Фиг. 1