

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯЧЕЙКОВОЙ КОНВЕКЦИИ В РАЗЛИЧНЫХ ЖИДКОСТЯХ

Н. Ф. ВЕЛЬТИЩЕВ, А. А. ЖЕЛНИН

(Москва)

Экспериментальное и теоретическое изучение структуры конвективных течений жидкости при сверхкритических числах Рэлея обнаружило, что между состоянием покоя при  $Ra < Ra_*$  и полностью турбулентным движением при  $Ra \gg Ra_*$  существует ряд переходных состояний, когда конвективные течения могут быть стационарными или осциллирующими.

Экспериментальными исследованиями [1-7] было установлено, что переходы от одной формы конвективных течений к другой происходят при различных числах Рэлея в разных жидкостях и что структура конвективных течений при  $Ra > Ra_*$  определяется, таким образом, числом Прандтля. Теоретические исследования по этому вопросу были выполнены в работах [8-11]. В отмеченных выше работах были получены следующие основные выводы: при малых числах Прандтля ( $Pr \ll 1$ ) конвекция возникает при небольших сверхкритических значениях числа Рэлея как стационарное двумерное течение, а затем движения становятся осциллирующими. При  $Pr \gg 1$  двумерная структура течений сменяется сначала трехмерной и только затем движения становятся осциллирующими. Однако, несмотря на обнаружение этой общей тенденции, до настоящего времени существуют определенные расхождения относительно конкретных значений чисел Рэлея, при которых происходит переход от одной формы течений к другой в различных жидкостях.

В последнее время были предприняты попытки выяснения этой проблемы путем численного моделирования конвективных движений. В рамках двумерной модели конвекции с одновременным расчетом турбулентности процессы перехода изучались в [12], а в рамках трехмерной модели — в [13, 14].

В работах по численному моделированию конвекции, отмеченных выше, были получены сведения о структуре движений в воздухе ( $Pr = 0.7$ ). Целью настоящей работы было изучение конвективных течений при различных числах Прандтля. Так как влияние числа Прандтля оказывается наиболее существенным при переходе от  $Pr < 1$  к  $Pr > 1$ , были проведены эксперименты в интервале чисел Прандтля  $0.025 \leq Pr \leq 6.7$ . Ввиду удобства сопоставления результатов расчетов с экспериментальными данными были проведены численные эксперименты для  $Pr = 0.025$  (ртуть), 0.7 (воздух), 3.7 (ацетон), 6.7 (вода). Для заполнения промежутков между этими значениями числа Прандтля были проведены также расчеты при  $Pr = 0.3$  и 1. В связи с практическими трудностями моделирования трехмерных конвективных течений расчеты проводились в интервале чисел Рэлея  $Ra_* < Ra \leq 44\,000$ .

1. В рассматриваемой модели жидкость характеризуется средней плотностью  $\rho_0$  (за исключением члена с плавучестью), коэффициенты температурного расширения  $\alpha$ , кинематической вязкости  $\nu$  и температуропроводности  $\kappa$  предполагаются постоянными. Слой жидкости толщиной  $h$  неограничен по горизонтали и ограничен сверху и снизу жесткими идеально проводящими тепло стенками. В слое поддерживается отрицательная разница температур  $\Delta T$ . При переходе к безразмерным координатам выбраны масштабы: длины — мощность конвективного слоя  $h$ , температуры —  $\Delta T$ , времени —  $h^2 (\nu \kappa)^{-1/2}$ . Безразмерная система уравнений Буссинеска приобретает в этом случае вид

$$(1.1) \quad \frac{dV}{dt} = -\text{grad } p + Ra T \kappa + \sqrt{Pr} \nabla^2 V$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad \frac{dT}{dt} = w + \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Pr}}} \nabla^2 T$$

Здесь  $\mathbf{V}$  — вектор скорости,  $p$  — давление,  $T$  — отклонение температуры от статического значения,  $w$  — вертикальный компонент скорости,  $k$  — единичный вертикальный вектор,  $\operatorname{Ra} = g\alpha\Delta T h^3 \nu^{-1} \kappa^{-1}$  — число Рэлея,  $\operatorname{Pr} = \nu \kappa^{-1}$  — число Прандтля.

Система (1.1) решалась при периодических условиях на боковых границах. Горизонтальный размер области в направлении оси  $X$  был в 2.34, а в направлении оси  $Y$  — в 4.032 раза больше глубины слоя. Начальное состояние задавалось в виде кондуктивного решения и произвольного температурного возмущения.

Для решения системы (1.1) был использован вариант численной схемы с введением искусственной сжимаемости, предложенный в [15], который был обобщен для трехмерного случая. В основе этого метода лежит расщепление, при котором сначала рассчитываются вспомогательные скорости  $u_i^*$  без учета силы давления и уравнения неразрывности. Для расчета вспомогательных скоростей и температуры применяется метод переменных направлений с использованием неявной схемы, дающей первый порядок аппроксимации по времени и второй порядок по пространству

$$(1.2) \quad f^* = f^n + \tau (\nabla^2 f^* - u_i^n \nabla f^* + E)$$

Здесь  $n$  — номер шага,  $\tau$  — шаг по времени,  $f^*$  — вспомогательные скорости или температура,  $E$  — свободный член. Расчет давления и скоростей на  $(n+1)$ -м шаге по времени осуществляется с помощью итерационной процедуры

$$(1.3) \quad u_i^{n+1, m+1} = u_i^* - b \frac{\partial}{\partial x_i} p^m$$

$$(1.4) \quad p^{n+1, m+1} = p^{n+1, m} - \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1, m+1}$$

Здесь  $\lambda$  и  $b$  — параметры,  $m$  — номер итерации. Сходимость итерационного процесса (1.4) свидетельствует о том, что условие  $\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0$  выполняется с заданной точностью.

При расчетах использовалась сетка размером  $25 \times 25 \times 9$  узлов в направлениях  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  соответственно. Детали численного метода и процедуры расчетов описаны в [16, 17].

Так как вычислительная сетка довольно грубая, расчеты проводились лишь до тех пор, пока характерная толщина термического пограничного слоя, определяемая соотношением  $h^* = 1/2\operatorname{Nu}$ , не становилась соизмеримой с шагом сетки по вертикали, или решение не выходило на осциллирующий режим.

2. В связи с тем что провести достаточно полной количественной оценки погрешностей вычислительной схемы не представляется возможным, возникает необходимость сопоставления результатов расчетов с расчетами других авторов, а также с данными экспериментальных измерений. В табл. 1 приведены значения числа Нуссельта, рассчитанные различными авторами при разных числах Прандтля (1 — данные настоящей работы, 2 и 3 — данные, заимствованные из [18], 4 — данные [11], округленные до сотых долей; 5 — данные [19] и 6 — данные [12], которые снимались с рисунков и поэтому приводятся с точностью до десятых долей.

Сопоставление рассчитанных чисел  $\operatorname{Nu}$  с данными других авторов показывает, что применяемая здесь сравнительно грубая сетка дает несколько завышенные значения  $\operatorname{Nu}$  при небольших числах Рэлея, когда движения двумерные, и численное моделирование в рамках двумерной задачи дает лучшие результаты при использовании более тонкой сетки. Однако при  $\operatorname{Ra} > 20\,000$  потоки тепла, рассчитанные по трехмерной модели, становятся меньше потоков, рассчитанных по двумерным схемам. Это связано с тем, что при  $\operatorname{Ra} > 20\,000$  сильны трехмерные эффекты.

В табл. 2 результаты настоящих расчетов (1) сравниваются с результатами лабораторных экспериментов [20, 3, 5, 8, 21], обозначенными в табли-

Таблица 1

Ra·10 <sup>-3</sup>	Pr=0.025		Pr=0.7			Pr=1			Pr=6.7		
	1	4	1	6	4	1	5	2	1	3	4
2	1.02	1.06	1.35	—	1.21	1.39	1.3	—	1.71	—	—
3	1.05	1.44	1.71	—	1.66	1.73	1.7	—	2.10	—	1.67
4	1.10	—	1.88	—	—	1.95	1.9	—	2.25	1.94	—
5	—	—	2.03	1.90	2.12	2.10	2.1	2.08	2.41	2.12	2.11
6	—	—	2.15	2.00	—	2.22	2.2	—	2.52	2.27	—
8	—	—	2.40	2.10	—	2.39	2.4	—	2.70	2.49	—
10	—	—	2.53	2.25	2.66	2.58	2.6	2.6	2.82	2.65	2.62
12	—	—	2.63	—	—	2.69	2.7	2.76	2.92	2.78	—
14	—	—	2.72	—	—	2.77	2.8	—	3.00	—	—
16	—	—	2.78	—	—	2.84	2.9	—	3.07	—	—
18	—	—	2.84	—	—	2.90	3.0	—	3.12	—	—
20	—	—	2.89	2.68	3.26	2.94	3.1	3.15	3.18	3.15	3.12
24	—	—	2.97	—	—	3.03	3.2	—	3.27	—	—
28	—	—	3.12	—	—	3.18	3.4	—	3.34	—	—
32	—	—	3.18	3.00	—	3.26	3.5	—	3.40	—	—
36	—	—	3.34	—	—	3.36	3.6	—	3.44	—	—
40	—	—	3.37	3.30	—	3.40	3.7	—	3.44	—	—
44	—	—	3.40	—	—	3.43	3.8	—	3.46	—	—

Таблица 2

Ra·10 <sup>-3</sup>	Pr=0.025		Pr=0.7				Pr=6.7		
	1	3	1	2	4	3	1	3	5
2	2.04	2.1	2.7	2.1	—	2.2	2.1	2.5	2.2
3	3.18	3.18	5.0	4.8	5	3.8	6.3	5.0	4.8
4	4.42	4.6	7.6	5.8	6	5.0	9.0	7.5	7.6
6	—	—	12.4	9.4	9	7.7	15.3	13.0	13.2
8	—	—	18.3	13.5	18	11.7	21.6	19.0	18.4
10	—	—	24.0	17.5	21	14.4	28.2	24.5	25.0
12	—	—	29.8	24	26	17.5	35.0	29.5	33.0
14	—	—	37.6	32	32	20.6	42.0	33.0	36.4
16	—	—	44.0	36	38	23.6	49.0	40.0	42.6
18	—	—	50.5	40	44	26.0	56.5	—	48.5
20	—	—	57.0	52	53	—	63.6	—	55.0
24	—	—	70.4	56	64	—	78.5	—	67.3
28	—	—	86.6	76	72	—	93.5	—	79.7
32	—	—	101	92	90	—	109	—	92.7
36	—	—	112	106	110	—	124	—	118
40	—	—	135	117	130	—	137	—	130
44	—	—	150	129	146	—	152	—	145

це номерами 2–5 соответственно. Данные приводятся в виде безразмерного потока тепла  $NuRa$ , так как в большинстве цитируемых экспериментальных работ они представлены в таком виде. Нетрудно заметить, что при всех  $Pr$  (за исключением  $Pr=0.025$ ) рассчитанные потоки тепла выше экспериментально наблюдаемых. Помимо эффекта грубости сетки имеет значение и тот факт, что ограниченный по горизонтали размер области препятствует естественному постепенному росту длины волны, как это имеет место в лабораторных экспериментах. Численные эксперименты, описанные в [22], а также настоящие эксперименты показывают, что увеличение длины волны двумерных возмущений приводит к убыванию потоков тепла. Однако преодолеть эту трудность и реализовать трехмерную модель конвекции в области с большими горизонтальными

размерами в настоящее время весьма сложно из-за необходимости проведения большого объема вычислений.

Из данных, приведенных в табл. 2, можно увидеть также, что относительные различия в рассчитанных и наблюдаемых потоках тепла с увеличением  $Ra$  монотонно убывают, что свидетельствует о достаточной репрезентативности расчетов. Таким образом, с помощью представляемой здесь модели можно получить результаты, вполне сопоставимые с экспериментальными данными, и сделать некоторый шаг вперед по изучению переходов от двумерных к трехмерным или осциллирующим движениям, чего, по-видимому, невозможно сделать в рамках двумерных численных моделей конвекции.

На фиг. 1 приведены данные о зависимости структуры конвективных течений от числа Рэлея и числа Прандтля. Сплошные линии на фиг. 1 разграничивают области существования стационарных двумерных течений (I), стационарных трехмерных течений (II) и нестационарных течений (III). (Кривые построены по результатам настоящих расчетов.) Для сравнения приводятся области существования двумерных (Ia), трехмерных (IIa) и нестационарных (IIIa) течений, полученные в экспериментах [3]. Эти области разграничены штрихпунктирными линиями.

При сопоставлении рассчитанных и экспериментально наблюдавшихся переходов в структуре конвективных течений сразу же бросается в глаза, что общие закономерности переходов аналогичны: при  $Pg \ll 1$  происходит непосредственный переход от двумерных стационарных течений к осциллирующим, а при  $Pg > 1$  двумерные стационарные течения сменяются трехмерными. Однако все переходы в численных экспериментах смещены в сторону больших чисел Рэлея и меньших чисел Прандтля.

Эти различия могут быть обусловлены тремя основными причинами: погрешностями вычислительного метода, погрешностями лабораторных экспериментов и различными подходами к моделированию процесса конвекции в бесконечном слое жидкости.

При численном моделировании погрешности в определении переходов от одной формы движений к другой могут возникать вследствие ошибок аппроксимации, а также вследствие того, что разрешается лишь дискретный выбор небольшого числа длин волн.

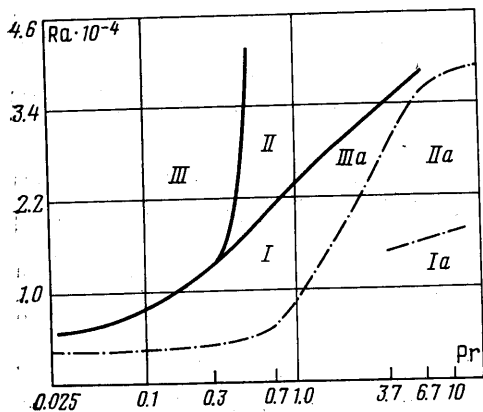
При проведении лабораторного эксперимента значительно сложнее контролировать состояние полного установления, что имеет немаловажное значение для оценки чисел Рэлея, при которых происходит переход от одной формы движения к другой. Влияние этого фактора можно проиллюстрировать результатами настоящих вычислений. В эксперименте с  $Pg=1$ , когда движение считалось полностью установившимся и двумерным при  $|u|_{\max}/|w|_{\max} \approx 2 \cdot 10^{-2}$  ( $u$  — компонент скорости вдоль оси валика) в интервале чисел Рэлея  $Ra \leq 10\,000$ , движения стали полностью трехмерными уже при  $Ra \approx 18\,000$ . При повторении этого эксперимента с гораздо более жесткими требованиями к установлению ( $|u|_{\max}/|w|_{\max} \approx 10^{-3}$ ) переход к трехмерной структуре течений произошел лишь при  $Ra \approx 26\,000$ .

Источником различий между лабораторными и численными экспериментами является также различная формулировка условий на боковых границах (периодические при численном моделировании, жесткие и теплоизолированные при лабораторном).

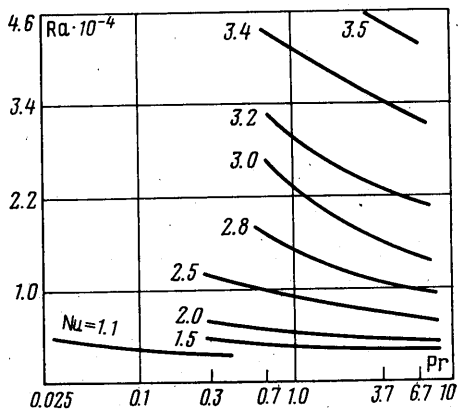
Перечисленные выше обстоятельства неизбежно приводят к различиям получаемых результатов, и трудно ожидать их полного совпадения в ближайшем будущем.

В связи с имеющими место различиями в переходах от одной формы движения к другой становятся более понятными и различия в измеряемых и моделируемых потоках тепла. Действительно, если сравнить результаты

настоящих расчетов  $NuRa$  в табл. 2 с данными [6] для воздуха, то можно заметить, что при  $Ra < 8000$  эти различия невелики, так как в обоих случаях реализуются двумерные валы. На отрезке  $10\,000 \leq Ra \leq 28\,000$  различия в потоках тепла максимальны, так как в условиях лабораторного эксперимента увеличивается длина волны и уже присутствует элемент трехмерности, в то время как переход к бимодальной структуре в числен-



Фиг. 1



Фиг. 2

ной модели начинается при  $Ra = 24\,000$ . После того как движение по результатам численного эксперимента становится полностью трехмерным ( $Ra > 28\,000$ ), различия в потоках тепла снова выравниваются и остаются на уровне, объяснимом погрешностями аппроксимации и измерений.

Аналогичную дивергенцию в потоках тепла на отрезке  $18\,000 \leq Ra \leq 32\,000$  можно проследить, сопоставляя результаты расчетов и измерения [21] для воды. Как только структура моделируемых численно и лабораторно движений приходит в соответствие при  $Ra \geq 36\,000$ , различия в потоках тепла резко уменьшаются.

В заключение этой части работы отметим, что переход от двумерной структуры течений к трехмерной сопровождается переходами в потоках тепла. Для  $Pr = 0.7$  этот вопрос подробно обсуждался в [14]. В данной работе аналогичные переходы были обнаружены для  $Pr = 1$  при  $Ra \approx 28\,000$  и для  $Pr = 6.7$  при  $Ra \approx 38\,000$ . Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными [4, 6, 20], а также с результатами численного моделирования [12].

Параллельные расчеты кинетической энергии ( $E_k$ ) позволили обнаружить следующую интересную деталь в экспериментах с  $Pr = 1$ , когда в интервале  $10\,000 \leq Ra \leq 40\,000$  были реализованы двумерные течения с  $L = 2.34, 4.032$  или трехмерные течения.

Оказалось, что при  $Ra \geq 24\,000$  трехмерные течения дают максимум отношения  $Nu/E_k$ . Поскольку двумерные течения в этих экспериментах поддерживались искусственно, а трехмерное движение реализовалось самостоятельно, возникает предположение, что в неустойчиво стратифицированном слое жидкости возникает такая структура течений, которая обеспечивает при данном числе Рэлея максимальный перенос тепла с наименьшими затратами кинетической энергии. Этот вывод необходимо, однако, проверить с помощью дополнительных экспериментов.

Вторым аспектом проблемы ячейковой конвекции является зависимость потоков тепла от числа Прандтля. По этому поводу существуют весьма разноречивые мнения. Так, в [18] делается вывод, что при фиксиро-

ванном  $Ra$  число Нуссельта максимально при  $Pr=1$ . В [23] по результатам двумерного численного моделирования конвективных течений при свободных граничных условиях получены выводы о том, что в интервале  $0.01 \leq Pr \leq 0.1$   $Nu$  не зависит от  $Pr$ , а в интервале  $1 \leq Pr \leq 6.7$   $Nu$  убывает с ростом числа Прандтля. В лабораторных экспериментах [3, 5, 21], напротив, отчетливо прослеживается увеличение  $Nu$  с ростом  $Pr$  в интервале  $0.025 \leq Pr \leq 6.7$ . Проведенные численные эксперименты также указывают на то, что при фиксированном  $Ra$  поток тепла возрастает с ростом числа Прандтля (см. положение изолиний  $Nu$  на фиг. 2), причем при малых  $Ra$  эти различия невелики.

Поступила 11 X 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Willis G. E., Deardorff J. W. Development of short-period temperature fluctuations in thermal convection. *Phys. Fluids*, 1967, vol. 10, No. 5.
2. Willis G. E., Deardorff J. W. The oscillatory motions of Rayleigh convection. *J. Fluid Mech.*, 1970, vol. 44, pt 4.
3. Krishnamurti R. On the transition to turbulent convection, pt. 1. The transition from two- to three-dimensional flow. *J. Fluid Mech.*, 1970, vol. 42, pt 2.
4. Krishnamurti R. On the transition to turbulent convection, pt 2. The transition to time-dependent flow. *J. Fluid Mech.*, 1970, vol. 42, pt 2.
5. Krishnamurti R. Some further studies on the transition to turbulent convection. *J. Fluid Mech.*, 1973, vol. 60, pt 2.
6. Brown W. Heat-flux transitions at a low Rayleigh number. *J. Fluid Mech.*, 1973, vol. 60, pt 3.
7. Busse F. H., Whitehead J. A. Oscillatory and collective instabilities in large Prandtl number convection. *J. Fluid Mech.*, 1974, vol. 66, pt 1.
8. Schlüter A., Lortz D., Busse F. On the stability of steady finite amplitude convection. *J. Fluid Mech.*, 1965, vol. 23, pt 1.
9. Busse F. H. On the stability of two-dimensional convection in a layer heated from below. *J. Math. and Phys.*, 1967, vol. 46, No. 2.
10. Busse F. H. The oscillatory instability of convection rolls in a low Prandtl number fluid. *J. Fluid Mech.*, 1972, vol. 52, pt 1.
11. Clever R. M., Busse F. H. Transition to time-dependent convection. *J. Fluid Mech.*, 1974, vol. 65, pt 4.
12. Daly B. J. A numerical study of turbulence transitions in convective flow. *J. Fluid Mech.*, 1974, vol. 64, pt 1.
13. Somerville R. C. J. Numerical simulation of small-scale thermal convection in the atmosphere. *Nect. Notes Phys.*, 1973, No. 19.
14. Veltishchev N. F., Zelnin A. A. Numerical simulation of cellular convection in air. *J. Fluid Mech.*, 1975, vol. 68, pt 2.
15. Chorin A. J. Numerical solution of the Navier — Stokes equations. *Math. Comput.*, 1968, vol. 22, No. 104.
16. Вельтищев Н. Ф., Желнин А. А. Численная модель конвекции в потоке с вертикальным сдвигом. *Тр. Гидрометцентра СССР*, 1973, вып. 110.
17. Вельтищев Н. Ф., Желнин А. А. Влияние нестационарности поля средней температуры на структуру конвективных движений. *Тр. Гидрометцентра СССР*, 1974, вып. 148.
18. Schneck P., Veronis V. Comparison of some recent experimental and numerical results in Benard convection. *Phys. Fluids*, 1967, vol. 10, No. 5.
19. Власюк М. П., Полежаев В. И. Численное исследование конвективных движений в горизонтальном слое газа, подогреваемом снизу. *Препринт ИПМ АН СССР*, 1970, № 37.
20. Willis G. E., Deardorff J. W. Confirmation and renumbering of the discrete heat flux transitions of Malkus. *Phys. Fluids*, 1967, vol. 10, No. 9.
21. Rossby H. T. A study of Benard convection with and without rotation. *J. Fluid Mech.*, 1969, vol. 36, No. 2.
22. Willis G. E., Deardorff J. W., Somerville R. C. J. Roll-diameter dependence in Rayleigh convection and its effect upon the heat flux. *J. Fluid Mech.*, 1972, vol. 54, pt 2.
23. Moore D. R., Weiss N. O. Two-dimensional Rayleigh — Benard convection. *J. Fluid Mech.*, 1973, vol. 58, pt 2.