МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1977

УДК 532.517.4

ТУРБУЛЕНТНАЯ ДИФФУЗИЯ ПРИ БЫСТРОМ ОДНОРОДНОМ СДВИГЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В. Е. КОЗЛОВ, В. А. САБЕЛЬНИКОВ

(Москва)

Общая постановка задачи о диффузии в турбулентной среде, подвергающейся однородной деформации, приведена в [1]. В данной заметке результаты этой работы используются для определения изменения компонент тензора коэффициентов турбулентной диффузии K_{ij}, входящих в полуэмпирическое уравнение турбулентной диффузии (например, [2]), при быстром однородном сдвиге первоначально изотропной турбулентности, т. е. когда в уравнениях движения можно пренебречь нелинейным инерционным взаимодействием пульсаций скорости самих с собой.

Полученные методом [1] выражения для компонент тензора $K_{ij}(t)$ в прямоугольной декартовой системе координат X_i в рассматриваемом случае поля средней скорости $\mathbf{U}=(E_{12}X_2, 0, 0)$ имеют вид

$$K_{11}=E_{12}\int_0^t (t-\alpha)\langle u_1'(t)u_2'(\alpha)\rangle\,d\alpha+\int_0^t\langle u_1'(t)u_1'(\tau)\rangle\,d\tau$$

$$K_{22}=\int_0^t\langle u_2'(t)u_2'(\tau)\rangle\,d\tau,\qquad K_{33}=\int_0^t\langle u_3'(t)u_3'(\tau)\rangle\,d\tau \tag{1}$$

$$K_{12}=K_{21}=\frac{1}{2}\left\{E_{12}\int_0^t (t-\alpha)\langle u_2'(t)u_2'(\alpha)\rangle\,d\alpha+\right.$$

$$\left.+\int_0^t\langle u_2'(t)u_1'(\tau)\rangle\,d\tau+\int_0^t\langle u_1'(t)u_2'(\tau)\rangle\,d\tau\right\}$$

Здесь $E_{12}=dU_1/dX_2=\text{const}$ – сдвиг средней скорости, $u_i'(\mathbf{X}, t)$ – эйлерово поле пульсаций скорости; для краткости записи принято обозначение $u_i'(t)=u_i'(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t)$, $X_i(\mathbf{x}, t)$ – координата жидкой частицы в момент времени t, $X_i(\mathbf{x}, 0)=x_i$; угловые скобки – символ усреднения.

Наряду с (1) в силу симметрии относительно плоскости X_1X_2 имеет место $K_{13}=K_{31}=K_{23}=K_{32}=0$. При записи (1) принято, что диффузия начинается в момент времени $t=0$.

Если быстрый однородный сдвиг также начинается в момент времени $t=0$, то изменение тензора $K_{ij}(t)$ в процессе сдвига определяется лишь спектральным тензором энергии турбулентности $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ в момент $t=0$. Здесь $\mathbf{k}$ – волновой вектор. Этот результат справедлив и в общем случае быстрой однородной деформации.

Действительно, представим эйлерово поле пульсаций скорости через интеграл Фурье – Стильтьеса [3]

$$u_i'(\mathbf{X}, t)=\int \exp(ik_\alpha X_\alpha)\,dZ_i(\mathbf{k}, t)$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3. Тогда для $u_i'(t)$ получим

$$u_i'(t)=u_i'(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t)=\int \exp[ik_\alpha X_\alpha(\mathbf{x}, t)]\,dZ_i(\mathbf{k}, t)$$

Раскладывая функцию $u_i'(t)=u_i'(\langle\mathbf{X}(\mathbf{x},\ t)\rangle+\mathbf{X}'(\mathbf{x},\ t),\ t)$ в ряд Тейлора и удерживая лишь линейный член, получим

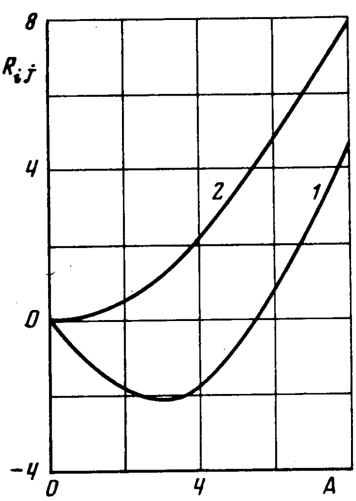
$$u_i'(t)\approx u_i'(\langle\mathbf{X}(\mathbf{x},\ t)\rangle,\ t)$$

Поэтому с точностью до линейных членов имеем

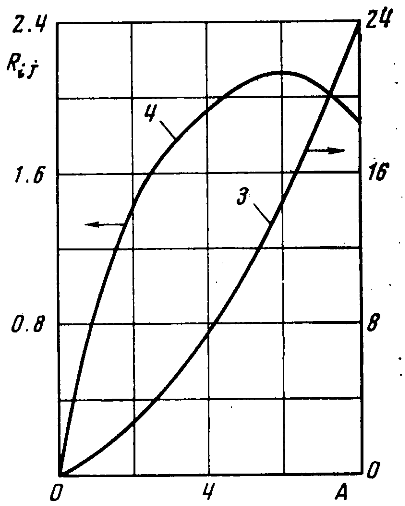
$$u_i'(t)=\int\exp[ik_\alpha\langle X_\alpha(\mathbf{x},t)\rangle]dZ_i(\mathbf{k},t)$$

Функции $\langle X_i(\mathbf{x},\ t)\rangle$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ при однородной деформации среды удовлетворяют уравнениям (например, [1])

$$\frac{d\langle X_i(\mathbf{x},t)\rangle}{dt}=E_{i\alpha}\langle X_\alpha(\mathbf{x},t)\rangle,\qquad E_{ij}(t)=\frac{\partial U_i}{\partial X_j},\qquad \langle X_i(\mathbf{x},0)\rangle=x_i \tag{2}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Уравнения, описывающие изменение волнового вектора $\mathbf{k}$ в процессе однородной деформации, приведены в работах [4, 5]. Они имеют вид

$$\frac{dk_i}{dt}=-E_{\alpha i}k_\alpha \tag{3}$$

Умножая (2) на k_i, (3) на $X_i(\mathbf{x},\ t)$, складывая полученные уравнения и суммируя по i от 1 до 3, получаем

$$k_\alpha\langle X_\alpha(\mathbf{x},\ t)\rangle=k_\alpha(\tau)\langle X_\alpha(\mathbf{x},\ \tau)\rangle;\qquad \tau,\ t>0$$

В результате для корреляций $\langle u_i'(t)u_j'(\tau)\rangle$, входящих в выражения для K_{ij} (1), имеем

$$\langle u_i'(t)u_j'(\tau)\rangle=\int\langle dZ_i(\mathbf{k}(t))dZ_j^*(\mathbf{k}(\tau))\rangle=\int L_{i\alpha}(\mathbf{k}_0,t)L_{j\beta}(\mathbf{k}_0,\tau)\,\Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_0)\,d^3k_0$$

$$\langle dZ_i(k_0)dZ_j^*(k_0)\rangle=\Phi_{ij}(k_0)\,d^3k_0$$

Здесь использовано, что $dZ_i(\mathbf{k},\ t)=L_{i\alpha}(\mathbf{k}_0,\ t)\,dZ_\alpha(\mathbf{k}_0)$, где $L_{ij}(\mathbf{k}_0,\ t)$ – функции, имеющие вид [4, 5]

$$L_{11}=1,\qquad L_{12}=-\frac{k_0^2k_3^2}{k_1m^3}\varphi-\frac{k_0^2k_1}{m^2}\left(\frac{k_2}{k^2}-\frac{k_{20}}{k_0^2}\right)$$

$$L_{22}=\frac{k_0^2}{k^2},\qquad L_{33}=1,\qquad L_{32}=\frac{k_0^2k_3}{m^3}\left\{\varphi-m\left(\frac{k_2}{k^2}-\frac{k_{20}}{k_0^2}\right)\right\}$$

$$L_{13}=L_{21}=L_{23}=L_{31}=0$$

$$k_1=k_{10}, \quad k_2=k_{20}-Ak_{10}, \quad k_3=k_{30}, \quad A=E_{12}t$$

$$m^2=k_{10}^2+k_{20}^2, \quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{k_{20}}{m}-\operatorname{arctg}\frac{k_2}{m}$$

Звездочка сверху обозначает комплексно-сопряженное число.

На фиг. 1 и 2 приведены результаты расчетов изменения обезразмеренных компонент тензора $R_{ij}=K_{ij}E_{12}/u_0^2$ по безразмерному времени $A=E_{12}t$, если при $t=0$ турбулентность была изотропной

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}_0)=E_0(k_0)(k_0^2\delta_{ij}-k_{0i}k_{0j})/4\pi k_0^4$$

$$u_0^2=\frac{2}{3}\int_0^\infty E_0(x)\,dx$$

где E_0 – спектральная функция, δ_{ij} – символ Кронекера, u_0^2 – средний квадрат проекции вектора пульсационной скорости в момент времени $t=0$ на какое-либо направление. Кривые *1–4* соответствуют данным для $-R_{11}$, $-R_{12}$, R_{33} и R_{22}.

Результат при этом не зависит от функционального вида $E_0(k_0)$.

Полученные точные результаты для идеализированного турбулентного течения с поперечным сдвигом качественно согласуются с полуэмпирическими предположениями относительно учета возможного отклонения главных осей тензора коэффициентов диффузии от осей X_i при турбулентной диффузии в атмосфере ([2], стр. 581).

Поступила 15 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зимонт В. Л., Сабельников В. А.* О турбулентной диффузии в среде, подвергающейся действию однородной деформации. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 6.
2. *Монин А. С., Яглом А. М.* «Статистическая гидромеханика». Ч. 1. М., «Наука», 1965.
3. *Бэтчелор Дж.* Теория однородной турбулентности. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
4. *Сабельников В. А.* Некоторые линейные задачи теории деформации однородной турбулентности. Тр. ЦАГИ, 1975, вып. 1702.
5. *Сабельников В. А.* О поведении однородной турбулентности в магнитном поле при однородной деформации среды. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 3.

УДК 532.517.013.4

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЭЛЕЯ К ЗАДАЧЕ ГЕНЕРАЦИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА ГЛУБОКОЙ ВОДЕ ВЕТРОМ

ЧАН ВАН ЧАН

(Москва)

Проблема генерации поверхностных волн на глубокой воде рассматривается как задача о гидродинамической устойчивости поверхности раздела двух фаз: воздуха и воды. Проблема была сформулирована Кельвином в 1871 г., который, рассмотрев неустойчивость однородного невязкого потока воздуха над поверхностью воды, получил критическую скорость, равную 640 *см/сек*. В [1] вода рассмотрена как вязкая, тяжелая жидкость, взаимодействие ветра с водой – как заданное поле касательных напряжений. Показано, что неустойчивость имеет место при всех скоростях ветра. В настоящей работе к задаче о генерации волн применяется метод Рэлея [2]. При этом профиль скорости в жидкости и газе берется в виде трехзвенной ломаной. Результаты вычислений хорошо согласуются с экспериментом [3].

Введем декартову систему координат так, что ось y направлена вверх, ось x – вдоль невозмущенной поверхности раздела по направлению ветра. Параметры, относящиеся к газу отмечаются индексом 1, к воде – индексом 2. Пусть вода занимает часть $y\leqslant 0$. Под действием ветра, дующего над ней, слой воды, прилегающий к по-