

## ОБ ИНДУКЦИИ ДОЗВУКОВЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ТРУБ С МАЛОЙ ПЕРФОРАЦИЕЙ

Н. А. МАРЕВЦЕВА

(Москва)

В отличие от известных решений, в которых условие на границах потока имеет единую форму для всей стенки трубы, в данной постановке границы потока делятся на участки двух типов с различными краевыми условиями.

Эти условия являются общими для любых чисел Маха.

Для случая малых возмущений скорости на границе потока и малого коэффициента перфорации решена в элементарных функциях плоская предельная краевая задача о дозвуковом обтекании диполя. Полученное решение, не совпадающее при коэффициенте перфорации, равном нулю, с решением для случая всюду непроницаемых стенок, дает простое правило учета индукции.

**1. Общая постановка задачи.** Перфорированная стенка рабочей части аэродинамической трубы рассматривается в виде цилиндрической поверхности с весьма малыми по сравнению с размерами трубы отверстиями той или иной формы, площадь которых на единице площади стенки есть коэффициент перфорации  $k$ . Перфорированная стенка с внешней стороны либо окружена камерой постоянного давления  $p_k$ , либо граничит с атмосферным воздухом.

В отличие от [1-3], где на границах потока, всюду совпадающих со стенками перфорированной трубы, ставится единое для всей границы условие, связывающее касательную и нормальную к стенке компоненты возмущенной скорости, в данной работе границы потока делятся на участки двух типов.

На участках первого типа, совпадающих со стенкой, давление газа  $p$  больше давления  $p_k$  в камере и газ перетекает из основного потока в камеру. На этих участках не может быть  $p < p_k$ , ибо в этом случае газ стал бы поступать из камеры внутрь трубы и оттеснил бы основной поток от стенки. При произвольных  $k$  на этих участках стенки в качестве краевого условия следует использовать традиционное соотношение между касательной и нормальной к стенке компонентами возмущенной скорости. Если  $k \rightarrow 0$ , то при конечной разности давлений  $p - p_k > 0$  количество газа, вытесняемого из потока в камеру, тоже стремится к нулю, т. е. на этих участках стенка становится непроницаемой и на ней в предельном случае справедливо краевое условие  $v_n = 0$ , где  $v_n$  — нормальная к стенке скорость.

На участках границы второго типа, которые отстоят от стенок трубы, движущийся газ граничит с покоящимся газом постоянного давления  $p_k$ , заполняющим камеру и объем, заключенный между стенкой и границей потока. На этих участках границы  $p = p_k = \text{const}$ .

Можно сформулировать теперь следующую краевую задачу об обтекании тел дозвуковым потоком идеального газа, ограниченными цилиндрическими стенками, коэффициент перфорации которых стремится к нулю. Эту краевую задачу можно назвать предельной.

Компоненты возмущенной скорости  $u_c' = u - u_h$ ,  $v_c' = v$ ,  $w_c' = w$  вдоль осей  $x_c$ ,  $y_c$  и  $z_c$  соответственно должны удовлетворять линеаризованному уравнению с краевыми условиями на участках границы первого и второго типа соответственно

$$(1.1) \quad (1-M^2) \frac{\partial u_c'}{\partial x_c} + \frac{\partial v_c'}{\partial y_c} + \frac{\partial w_c'}{\partial z_c} = 0$$

$$(1.2) \quad v_n' = 0, \quad p' = p - p_h > 0 \quad (u_c' < 0)$$

$$(1.3) \quad p = p_h = \text{const} \quad (u_c' = 0), \quad \int_{-\infty}^{x_c} v_n' dx < 0$$

Здесь  $u_h$  — скорость, соответствующая по уравнению Бернулли — Сен-Венана давлению  $p_h$ , а  $u$ ,  $v$  и  $w$  — компоненты суммарной скорости потока.

Известной заменой переменных задача (1.1)–(1.3) сводится к предельной краевой задаче для несжимаемой жидкости

$$(1.4) \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

$$u' = u_c' \sqrt{1-M^2}, \quad v' = v_c', \quad w' = w_c'$$

$$x = x_c / \sqrt{1-M^2}, \quad y = y_c, \quad z = z_c$$

или для плоского случая

$$(1.5) \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$$

при тех же краевых условиях (1.2) и (1.3).

Рассмотренная задача может представить интерес для теории дозвуковых труб, в которых рабочая часть имеет малый коэффициент перфорации.

**2. Плоская предельная краевая задача.** Рассматривается задача об индукции перфорированной трубы для случая малых возмущений в несжимаемой жидкости. При обтекании безграничным потоком в плоскости  $z = x + iy$  тонкого симметричного профиля под нулевым углом атаки комплексная возмущенная скорость выражается следующим образом [4]:

$$(2.1) \quad \frac{dW'}{dz} = u' - iv' = - \int_a^b \frac{u_\infty h'(x) dx}{2\pi(z-x)}$$

Здесь  $u_\infty$  — скорость невозмущенного потока,  $u'$  и  $v'$  — компоненты возмущенной скорости по осям  $x$  и  $y$ ; профиль расположен на отрезке  $a \leq x \leq b$  оси  $x$ ,  $y = \pm h(x)$  — уравнение контура профиля.

В окрестности бесконечно удаленной точки выражение (2.1) можно разложить в ряд по степеням  $1/z$  и воспользоваться только главным членом этого разложения

$$(2.2) \quad \frac{dW'}{dz} = u' - iv' \approx \frac{u_\infty}{2\pi} \frac{1}{z^2} \int_a^b x h'(x) dx$$

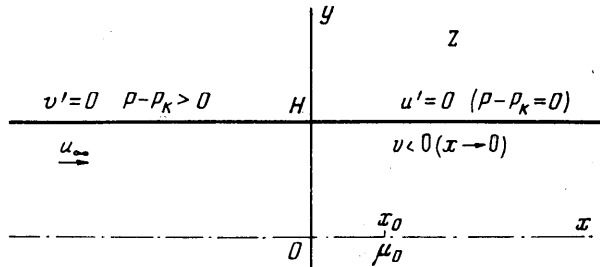
Здесь учтено, что  $\int_a^b h'(x) dx = 0$ . Выражение (2.2) представляет собой

комплексную скорость диполя, расположенного в начале координат с мо-

$$\text{ментом } \mu_0 = u_\infty \int_a^b x h'(x) dx.$$

Поскольку в условия краевой задачи входят лишь возмущенные скорости вблизи стенок трубы, для хорд профиля, значительно меньших ширины трубы, задачу (1.2), (1.3), (1.5) можно свести к задаче об индукции трубы в присутствии диполя.

Следует заметить, что ее решение строится, как решение смешанной задачи, не совпадающее ни с решением для всюду непроницаемой стенки, ни с решением для всюду свободной границы. На всей границе не может оказаться справедливым условие непротекания  $v'=0$ , ибо тогда, как из-



Фиг. 1

вестно, решением задачи было бы поле скоростей от бесконечного ряда периодически расположенных диполей одного знака, а это приводит к наличию на границе областей, в которых  $p' = p - p_k < 0$ , что противоречит условию (1.2). На всей границе не может оказаться справедливым и условие  $u'=0$ , ибо тогда решением задачи было бы поле скоростей от бесконечного ряда периодически расположенных знакопеременных диполей,

что приводит к наличию на границе областей, в которых  $\int_{-\infty}^x v' dx > 0$ .

Это также противоречит данной краевой задаче, требующей, чтобы граница потока не выходила за пределы трубы.

Для решения смешанной задачи (1.2), (1.3) и (1.5) рассматривается диполь с моментом  $\mu_0$ , находящийся на оси  $x$ , совпадающей с осью канала, ограниченного перфорированными стенками  $y = \pm H$ ,  $H = \text{const}$ , на расстоянии  $x_0$  от начала координат комплексной плоскости  $z = x + iy$  (фиг. 1). В силу симметрии относительно оси канала рассматривается течение только в его верхней половине. Задача о нахождении поля возмущенных скоростей  $u'$  и  $v'$  решается в линейном приближении, поэтому краевое условие со свободной границы сносится на стенку. Очевидно, что для случая диполя граница потока при  $y = H$  состоит всего из двух участков: слева она прилегает к перфорированной стенке и является границей первого типа с условием  $v'=0$ , а справа отходит от нее и является границей второго типа с условием  $u'=0$ . Не ограничивая общности, можно положить, что эти границы соприкасаются в точке  $y = H$ ,  $x = 0$ , а положение диполя, характеризующее величиной  $x_0$ , считать искомым.

Преобразованием

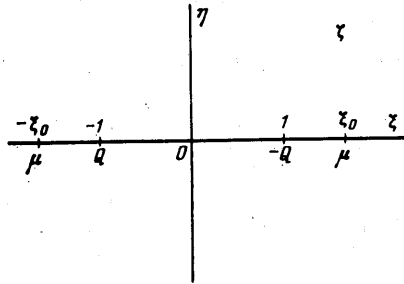
$$(2.3) \quad \xi = \sqrt{1 + \exp(\pi z / H)}$$

полоса плоскости  $z$ , ограниченная на фиг. 1 прямыми  $y=0$ ,  $y=H$ , отображается на квадрант плоскости  $\xi = \xi + i\eta$  (фиг. 2), причем так, что бесконечно удаленная точка ( $x = -\infty$ ) переходит в точку (1,0) плоскости  $\xi$ , точ-

ка  $x_0$  переходит в точку  $\xi_0$ , участок границы, где  $u'=0$ , переходит в верхнюю полуось ординат, а участок границы, где  $v'=0$ , и ось  $x$  переходят в правую полуось абсцисс. Точка соприкасания границ переходит в начало координат плоскости  $\zeta$ .

Легко показать, что при любом конформном отображении  $\zeta(z)$  твердая граница переходит в твердую, свободная — в свободную, а диполь интенсивности  $\mu_0$ , расположенный в точке  $z_0$ , переходит в диполь интенсивности  $\mu = -\mu_0 d\zeta/dz|_{z_0}$ . Таким образом, правая полуось плоскости  $\zeta$  является твердой границей, верхняя полуось — свободной границей, а интенсивность диполя равна

$$(2.4) \quad \mu = \pi/2H \cdot ((\xi_0^2 - 1)/\xi_0) \mu_0$$



Фиг. 2

Для выполнения краевого условия — равенства нулю возмущенной скорости вдоль вертикальной оси плоскости  $\zeta$ , как свободной границы, следует рассмотреть всю плоскость  $\zeta$  и в симметричной точке  $(-\xi_0, 0)$  разместить второй диполь, той же интенсивности и того же направления, что и первый.

В точке соприкасания границ в соответствии с постановкой задачи требуется одновременное выполнение условий (1.2) и (1.3), что означает равенство нулю возмущенной скорости в этой точке

$$(2.5) \quad \left. \frac{dW'}{dz} \right|_{z=iH} = \left( \left. \frac{dW'}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} \right) \left( \left. \frac{d\zeta}{dz} \right|_{z=iH} \right) = 0$$

Так как в этой точке производная  $d\zeta/dz$  бесконечна, отсюда вытекает необходимое условие

$$(2.6) \quad \left. \frac{dW'}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} = 0$$

Однако поток, создаваемый рассматриваемой парой диполей, имеет в точке  $\zeta=0$  скорость, отличную от нулевой, что должно соответствовать бесконечной скорости в точке  $z=iH$ . Для выполнения условий (1.3) и (2.6) в точку (1.0) плоскости  $\zeta$  помещается особенность типа источника, а в симметричную точку  $(-1, 0)$  — аналогичная особенность другого знака. Следует заметить, что из всех возможных особенностей выбор источника и стока в точках  $(-1, 0)$  и  $(1, 0)$  является единственно возможным для формирования однородного потока в плоскости  $\zeta$ . Интенсивности  $Q$  этих особенностей находятся из условия (2.6).

*Возмущенная скорость.* Комплексный потенциал возмущенного потока, образованного упомянутыми выше парами диполей и особенностей типа источника (фиг. 2), удовлетворяющего условию непротекания вдоль оси абсцисс и условию постоянства возмущенной скорости вдоль оси ординат плоскости  $\zeta$ , и соответствующая ему комплексная скорость, запишутся в виде

$$(2.7) \quad W' = \frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{(\zeta - \xi_0)} + \frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{(\zeta + \xi_0)} + \frac{Q}{2\pi} \ln(\zeta - 1) - \frac{Q}{2\pi} \ln(\zeta + 1)$$

$$(2.8) \quad \frac{dW'}{d\zeta} = -\frac{\mu}{\pi} \frac{(\zeta^2 + \xi_0^2)}{(\zeta^2 - \xi_0^2)^2} + \frac{Q}{\pi} \frac{1}{(\zeta^2 - 1)}$$

Условие (2.6) приводит к равенству

$$(2.9) \quad Q = -\mu/\xi_0^2$$

Из (2.9) следует, что в точке (1.0) плоскости  $\xi$  расположен сток. В плоскости  $z$  эта особенность в бесконечно удаленной точке обуславливает отличие скорости набегающего потока от скорости на границе свободной струи. Эта скорость меньше скорости на свободной границе на величину

$$(2.10) \quad u_\infty' = Q/2H = -\mu/2\xi_0^2 H$$

что также следует из (2.3) и (2.8).

Соотношения (2.7) и (2.8) после подстановки в них (2.9) приобретают вид

$$(2.11) \quad W' = \frac{\mu}{2\pi} \left[ \frac{1}{\xi - \xi_0} + \frac{1}{\xi + \xi_0} - \frac{1}{\xi_0^2} \ln \left( \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \right) \right]$$

$$(2.12) \quad \frac{dW'}{d\xi} = -\frac{\mu}{\pi} \frac{(\xi_0^2 + 1)\xi^2 [\xi^2 + \xi_0^2(\xi_0^2 - 3)] / (\xi_0^2 + 1)}{\xi_0^2(\xi^2 - 1)(\xi^2 - \xi_0^2)^2}$$

Из условия (1.2) следует, что на границе первого типа ( $v' = 0$ ) компонента возмущенной скорости  $u'$  в плоскости  $z$  должна быть отрицательной ( $p' > 0$ ). Согласно преобразованию (2.3) в плоскости  $\xi$  соответствующая величина должна быть положительной

$$(2.13) \quad \left. \frac{dW'}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_0} = -\frac{\mu}{\pi} \frac{(\xi_0^2 + 1)\xi_0^2 [\xi_0^2 + \xi_0^2(\xi_0^2 - 3)] / (\xi_0^2 + 1)}{\xi_0^2(\xi_0^2 - 1)(\xi_0^2 - \xi_0^2)^2} \geq 0$$

С другой стороны, на участках границы второго типа ( $u' = 0$ ) компонента  $v'$  в плоскости  $z$  не должна быть положительной в окрестности точки соприкосновения границ, так как эта граница должна лежать внутри трубы. В плоскости  $\xi$  это условие выразится соотношением

$$(2.14) \quad \left. \frac{dW'}{d\xi} \right|_{\xi=i\eta} = \frac{\mu}{\pi} \frac{(\xi_0^2 + 1)\eta^2 [\eta^2 - \xi_0^2(\xi_0^2 - 3)] / (\xi_0^2 + 1)}{\xi_0^2(\eta^2 + 1)(\eta^2 + \xi_0^2)^2} \geq 0, \quad \eta \rightarrow 0$$

Одновременное выполнение неравенств (2.13) и (2.14) имеет место при единственном значении

$$(2.15) \quad \xi_0 = \sqrt{3} \quad (x_0 = H \ln 2/\pi)$$

При помощи соотношений (2.3), (2.4), (2.12) и (2.15) получается окончательное выражение для комплексной скорости потока в плоскости  $z$ , компоненты  $u'$  и  $v'$  которой являются решением поставленной задачи

$$(2.16) \quad \frac{dW'}{dz} = u' - iv' = -\frac{\mu_0}{H^2} \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \left( \exp \left( \frac{\pi z}{H} \right) + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \exp \left( \frac{\pi z}{H} \right) - 2 \right)^{-2}$$

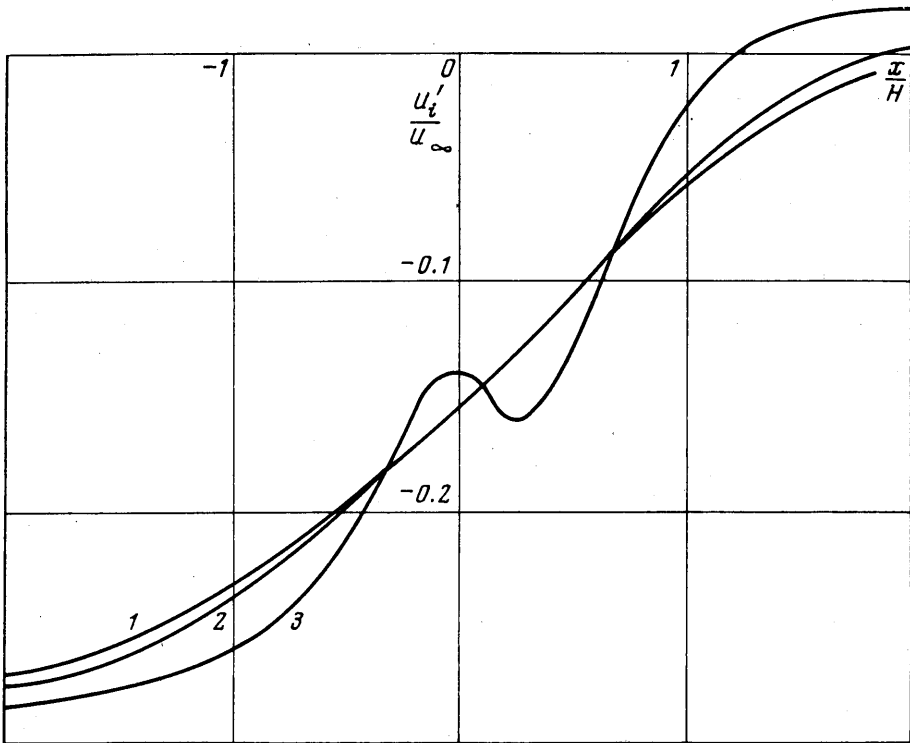
Можно отметить, что при  $z \rightarrow +\infty$  скорость возмущенного потока стремится к нулю, а следовательно, давление жидкости стремится к  $p_\infty$ .

*Индуктивная скорость.* Комплексным потенциалом индуктивной скорости потока будем называть разность между потенциалом возмущенного потока и потенциалом диполя в плоскости  $z$ . Индуктивная комплексная

скорость равна

$$(2.17) \quad \frac{dW_i}{dz} = u_i' - iv_i' = -\frac{\mu_0}{H^2} \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \left( \exp\left(\frac{\pi z}{H}\right) + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left( \exp\left(\frac{\pi z}{H}\right) - 2 \right)^{-2} + \frac{\mu_0}{H^2} \frac{\pi}{2} \frac{1}{(\pi z/H - \ln 2)^2}$$

Разделив действительную и мнимую части выражения (2.17), нетрудно получить формулы для компонент скорости  $u_i'$  и  $v_i'$ . На фиг. 3 и 4 приведены результаты вычислений безразмерных компонент индуктивной скорости  $u_i'$  и  $v_i'$ , отнесенных к скорости  $u_\infty$ , при единичном значении без-



Фиг. 3

размерного параметра  $\mu_0/(u_\infty H^2)$ . Индуктивные скорости построены в зависимости от  $x/H$  для различных положений по ширине канала  $y/H$ , равных 0 (кривые 1), 0,5 (кривые 2) и 1 (кривые 3). Расчеты показывают, что в средней части компонента  $u_i'$  индуктивной скорости почти не зависит от поперечной координаты и меняется только вблизи стенки.

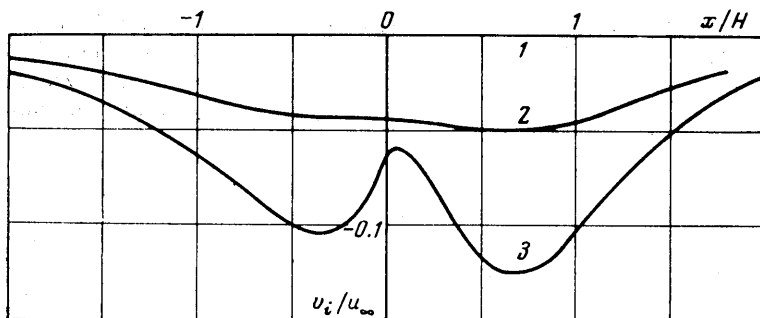
Для малого по сравнению с шириной канала тела представляет интерес индукция в точке расположения диполя  $z=x_0$ . Раскрыв особенность в (2.17), для этой точки нетрудно получить

$$(2.18) \quad dW_i/dz|_{z=x_0} = u_i|_{z=x_0} = -\mu_0\pi/24H^2$$

или согласно (2.4), (2.10) и (2.15)

$$(2.19) \quad u_i|_{z=x_0} = u_\infty' \sqrt{3}/4 = (u_\infty - u_k) \sqrt{3}/4$$

Следовательно, индуктивная скорость в точке  $z=x_0$  пропорциональна разности скоростей в бесконечно удаленной точке вверх по потоку и на свободной границе независимо от интенсивности диполя, т. е. от размеров тела. В рамках поставленной задачи, а именно при условиях малости размеров тела по сравнению с шириной канала и малости коэффициента перфорации, формула (2.19) дает возможность получить весьма простое правило учета индукции рассматриваемого канала.



Фиг. 4

Чтобы считать обтекание безграничным, следует вычесть индуктивную скорость (2.19) из скорости  $u_k$ , т. е. считать скорость набегающего потока равной

$$(2.20) \quad u = u_k - (u_k - u_\infty) \sqrt{3}/4$$

где  $u_\infty$  и  $u_k$  известны.

При известных давлениях  $p_\infty$  и  $p_k$ , воспользовавшись линеаризованным уравнением Бернулли, нетрудно получить формулу для давления в точке  $x_0$ , которое соответствовало бы невозмущенному потоку безграничной несжимаемой жидкости

$$(2.21) \quad p = p_k + (p_\infty - p_k) \sqrt{3}/4$$

Для сжимаемого газа ( $M < 1$ ) формулы скоростей (2.20) и давлений (2.21) не изменятся, в то время как соотношения между ними будут определяться уравнением Бернулли — Сен-Венана.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что при рассмотрении весьма малой перфорации, когда  $k \rightarrow 0$ , решение предельной краевой задачи существует единственно и не совпадает с решением задачи для случая всюду непроницаемой стенки. Это решение дает простое правило учета индукции канала с помощью соотношений (2.20) и (2.21).

В заключение автор выражает глубокую и трагически запоздавшую благодарность своему научному руководителю, давшему тему этой работы, талантливому ученому Александру Александровичу Никольскому.

Поступила 16 VIII 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гродзовский Г. Л., Никольский А. А., Свищев Г. П., Таганов Г. И. Сверхзвуковые течения газа в перфорированных границах. М., «Машиностроение», 1967.
2. Lo C. F., Oliver R. H. Subsonic lift interference in a wind tunnel with perforated walls. J. Aircraft, 1970, vol. 7, No. 3.
3. Мокру М. А wake-blockage paradox in a perforated wall wind tunnel. AIAA Journal, 1971, vol. 9, No. 12. (Рус. перев.: Парадокс загромождения аэродинамической трубы, имеющей перфорированные стенки, следом профиля. Ракетная техника и космонавтика, 1971, т. 9, № 12).
4. Эшли Х., Лэндал М. Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов. М., «Машиностроение», 1969.