

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЙ ГАМЕЛЕВСКОГО ТИПА В КАНАЛАХ С ПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

В. М. ПЕРЕКАЛЬСКИЙ

(Москва)

Изучается устойчивость непараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости в расширяющемся канале с проницаемыми стенками. Жидкость подается в канал через стенки с постоянной скоростью v_0 и входное сечение, где задается гамелевский профиль скорости. Результирующее течение в канале зависит от соотношения расходов смешивающихся потоков. Изучение этого течения проводилось путем решения уравнений Навье — Стокса конечно-разностным методом. Показано, что для достаточно большого вдува жидкости через проницаемые стенки и при удалении от начального сечения канала течение приближается к вихревому течению идеальной жидкости, исследованному в [1]. Полученные стационарные решения исследовались на устойчивость в линейном приближении с помощью модифицированного уравнения Орра — Зоммерфельда, в котором учитывалась непараллельность течения и стенок канала. Такой подход при исследовании устойчивости непараллельных течений был применен в [2] для автомодельного течения Бермана в канале и в [3] для неавтомодельных течений, получаемых при численном решении уравнений Навье — Стокса.

Приведены зависимости критических параметров α , R_* , St в точке потери устойчивости от числа Рейнольдса R_0 , характеризующего вдув жидкости через стенки, и параметра γ , характеризующего тип течения Гамеля. Приведено сравнение с результатами работы [4] по устойчивости гамелевских течений при $R_0=0$.

1. Рассматриваются получение и свойства стационарного решения, описывающего течение вязкой несжимаемой жидкости в расширяющемся канале с проницаемыми стенками (фиг. 1).

Используется система координат (ξ, η) , связанная с полярными координатами r и φ следующим образом:

$$r = e^{\varphi_0 \xi} \varphi_0^{-1}, \quad \varphi = \varphi_0 \eta$$

В этих переменных границами канала являются прямые $\eta = \pm 1$. Ось ξ направлена по оси канала, а ось η совпадает с границей Γ_2 .

Система уравнений Навье — Стокса относительно функции тока $\psi(\xi, \eta)$ и вихря $\omega(\xi, \eta)$ имеет вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \frac{1}{R_T} \Delta \omega$$

$$(1.2) \quad \omega = -\Delta \psi / \exp 2\varphi_0 \xi, \quad R_T = \frac{U_T a}{\nu}$$

Здесь R_T — число Рейнольдса, U_T — средняя скорость гамелевского течения на границе Γ_2 , a — полуширина канала в сечении Γ_2 , $\varphi_0 = 5^\circ$ — угол полураствора канала, ν — коэффициент кинематической вязкости, Δ — оператор Лапласа.

Граничные условия для функции $\psi(\xi, \eta)$ и $\omega(\xi, \eta)$ следующие:

$$\begin{aligned} \Gamma_1: \psi(\xi, 1) &= \psi_\Gamma(1) + v_0(\exp \varphi_0 \xi - 1) / U_\Gamma \varphi_0 \\ \Gamma_2: \psi(0, \eta) &= \psi_\Gamma(\eta), \quad \omega(0, \eta) = -\Delta \psi_\Gamma(\eta) \\ (1.3) \quad \Gamma_3: \psi(\xi, -1) &= \psi_\Gamma(-1) - v_0(\exp \varphi_0 \xi - 1) / U_\Gamma \varphi_0 \\ \Gamma_4: \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\psi}{1 + v_0(\exp \varphi_0 \xi - 1) / U_\Gamma \varphi_0} \right] &= \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\omega}{1 + v_0(\exp \varphi_0 \xi - 1) / U_\Gamma \varphi_0} \right] = 0 \end{aligned}$$

Здесь v_0 — скорость вдува жидкости через проницаемые стенки.

Граничные условия для $\omega(\xi, \eta)$ на Γ_1 и Γ_3 определяются в процессе численного счета по формуле Вудса [5]. На границе Γ_4 выставлены «мягкие» условия. Функция $\psi_\Gamma(\eta)$ определяется из решения уравнения Гамеля [4]

$$(1.4) \quad \psi_\Gamma^{IV}(\eta) + 4\varphi_0^2 \psi_\Gamma''(\eta) + 2\gamma \psi_\Gamma'(\eta) \psi_\Gamma''(\eta) = 0$$

с граничными условиями

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \psi_\Gamma(-1) &= -1, \quad \psi_\Gamma(1) = 1, \\ \psi_\Gamma'(-1) &= \psi_\Gamma'(1) = 0 \end{aligned}$$

Здесь $\gamma = \varphi_0 R_\Gamma$ — параметр, характеризующий гамелевское течение. Краевая задача (1.4), (1.5) сводилась к задаче Коши, которая решалась с использованием численных методов Рунге — Кутты и Ньютона. Решение уравнения Гамеля было получено при значениях параметра $\gamma = 1, 3.5, 5.2$. Эти значения параметра γ соответствуют профилям скорости течения без точки перегиба ($\gamma = 1$), с точкой перегиба ($\gamma = 3.5$) и с зоной возвратного течения около стенок канала ($\gamma = 5.2$).

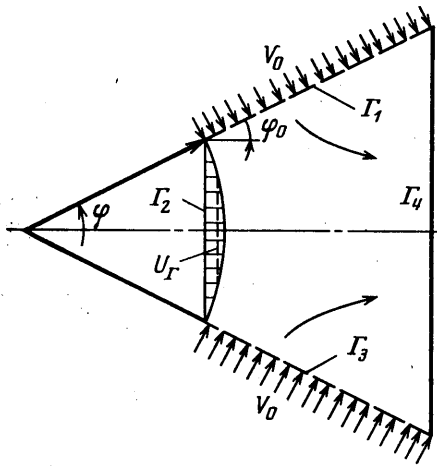
Система уравнений (1.1), (1.2) с граничными условиями (1.3) решалась численными методами [5, 6].

Отметим некоторые из полученных результатов. На фиг. 2 показано изменение осевого значения скорости $U(\xi, \eta)$ в фиксированном сечении канала $\xi = 5.0$ в зависимости от значений $\gamma = 1; 3.5; 5.2$ (обозначены цифрами 3, 2, 1 соответственно) и R_0 ($R_0 = v_0 a / \nu$ — число Рейнольдса вдува). Значение $U(\xi, \eta)$ отнесено к среднерасходному значению скорости (в том же сечении). Здесь же пунктирной линией нанесено изменение осевого значения скорости течения идеальной жидкости, изучаемого в работе [1].

Характерной является слабая зависимость $U(\xi, \eta)$ на оси от граничных условий на Γ_2 при $R_0 \geq 200$ и $\xi \geq 2$.

Исследовалось также изменение вихря $\omega(\xi, \eta)$ вдоль стенки канала в зависимости от γ и R_0 . При этом также обращает на себя внимание независимость полученных результатов от параметра γ при $R_0 \geq 200$.

Исследуемое течение по мере продвижения вниз по каналу при $R_0 > 150 \div 200$ стремится по своим характеристикам к вихревому течению идеальной жидкости [1].



Фиг. 1

2. При исследовании устойчивости течения использовалось модифицированное уравнение Орра — Зоммерфельда

$$(2.1) \quad \varphi^{IV} - 2\alpha\varphi'' + \alpha^4\varphi = i\alpha R \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta} - \bar{c} \right) (\varphi'' - \alpha^2\varphi) - \frac{\partial}{\partial\eta} \Delta\psi\varphi - R_0 \left[\frac{\partial\psi}{\partial\xi} (\varphi''' - \alpha^2\varphi') - \frac{\partial}{\partial\xi} \Delta\psi\varphi' \right] - 2\gamma \frac{R}{R_\Gamma} \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} (\varphi'' - \alpha^2\varphi) + \Delta\psi\varphi' \right] \right]$$

с граничным условием

$$(2.2) \quad \varphi(\pm 1) = \varphi'(\pm 1) = 0$$

Здесь R — локальное число Рейнольдса, $R = Ul/\nu$ — определенное по средней скорости U в данном сечении $l = a \exp \varphi_0 \xi$.

В правой части уравнения (2.1) члены при коэффициенте R_0 отнесены к скорости v_0 , остальные — к скорости U .

Отметим связь между R , R_Γ , R_0

$$(2.3) \quad R = R_\Gamma + R_0 (\exp \varphi_0 \xi - 1) / \varphi_0$$

Уравнение (2.1) получено с использованием обычной процедуры линеаризации и представления функции тока возмущенного движения $\psi_0(\xi, \eta, t)$ в виде

$$\psi_0(\xi, \eta, t) = \varphi(\eta) \exp(i\alpha(\xi - c^*t))$$

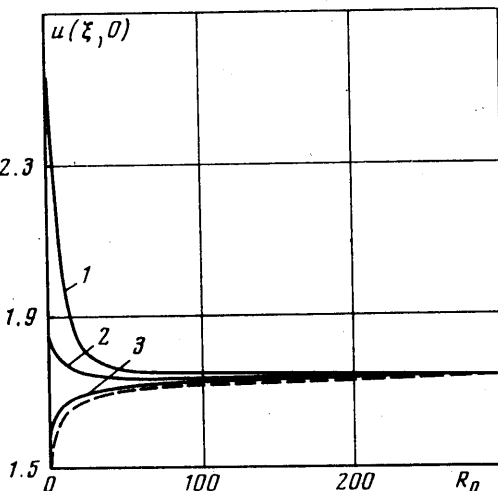
Здесь α — волновое число, $c^* = Cr + iCi$ — комплексная волновая скорость распространения возмущений.

При выводе уравнения (2.1) отброшены члены с коэффициентами порядка φ_0^2 .

Использование уравнения (2.1) для исследования устойчивости непараллельного течения возможно в предположении локальной автомодельности основного потока. Это означает, что изменение характеристик основного потока мало на длине волны возмущенного движения. Апостериорная оценка подтвердила выполнимость указанного предположения, особенно для сечений, расположенных вниз по потоку.

В уравнении (2.1) член в правой части при R_0 учитывает непараллельность течения. Такой учет непараллельности течения помимо учета через профиль продольно-составляющей скорости использовался в [2] и показал хорошее совпадение с результатами экспериментов. Член с коэффициентом 2γ в правой части этого же уравнения учитывает непараллельность стенок канала. Исследование устойчивости проводилось как с учетом этого члена, так и без него.

Заметим, что такой учет непараллельности стенок канала в уравнении устойчивости требует дальнейшего теоретического и экспериментального исследования.

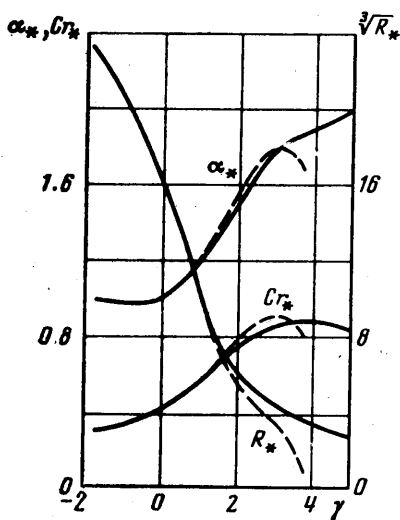


Фиг. 2

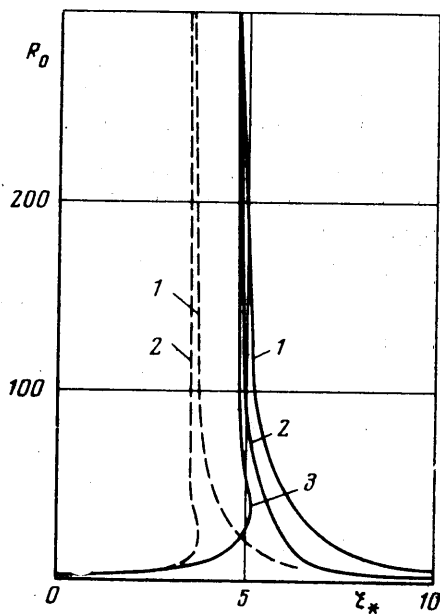
Собственные значения задачи (2.1), (2.2) определены с помощью метода [7].

Отметим, что случай $R_0=0$ соответствует течению Гамеля. Приведем результаты исследования устойчивости течений при $R_0=0$ и $R_0 \neq 0$.

Исследование устойчивости течения Гамеля ($R_0=0$) при $\gamma > 0$ и без учета влияния φ_0^2 на профиль скорости и вихрь основного течения проводилось в [4]. В данной работе исследовалось влияние учета члена с коэффициентом 2γ на критические параметры α_* , R_* , St_* в точке нейтральной кривой $Si=0$, где впервые наступала неустойчивость при $\gamma > 0$ (диффузор) и $\gamma < 0$ (конфузор). Проводилось сравнение критических параметров, характеризующих устойчивость течения Гамеля, которое задавалось из решения уравнения (1.4) методом Рунге — Кутта и из решения краевой



Фиг. 3



Фиг. 4

задачи (1.1), (1.2) методом сеток. Установлено, что при использовании сетки с шагом 0.05 расхождение полученных значений R_* не превышало 3–4%. Остальные критические параметры имели еще меньшее различие.

На фиг. 3 показано влияние параметра γ на критические параметры α_* , R_* , St_* . Здесь и ниже результаты, полученные с учетом непараллельности стенок канала в уравнении (2.1), отмечены пунктирной линией.

При $R_0 \neq 0$ исследовалось изменение значения критического числа Рейнольдса R_* вдоль по каналу при фиксированных значениях γ и R_0 .

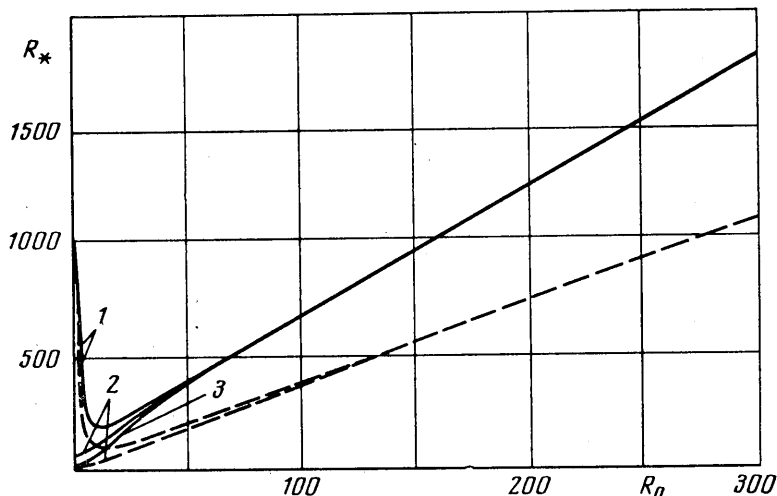
Пересечение кривых, характеризующих изменение вдоль канала значений критического R_* и расходного R чисел Рейнольдса, вычисленных по формуле (2.3), определяет сечение $\xi = \xi_*$, где наступает неустойчивость потока. Было выяснено, что длина ламинарного участка в канале при увеличении вдува (увеличение R_0) уменьшается до некоторой предельной длины, после чего не зависит от значений R_0 . Этот результат показан на фиг. 4 для $\gamma = 1, 3.5, 5.2$ (обозначены цифрами 1, 2, 3 соответственно).

После достижения ламинарным участком некоторой предельной длины критическое число Рейнольдса R_* , при котором поток в канале теряет устойчивость, может быть определено по формуле (2.3).

На фиг. 5 приведены результаты исследования влияния вдува R_0 на значение критического числа Рейнольдса в сечении канала $\xi=5$ и $\gamma=1$, 3.5, 5.2 (обозначены 1, 2, 3 соответственно).

Значение R_* при больших вдувах ($R_0 > 150$) изменяется пропорционально увеличению R_0 . Характерным является отличие поведения R_* при малых вдувах ($R_0 < 100$) в зависимости от типа течения Гамеля на входе в область.

Так, при $\gamma=1$ наблюдается двойственное влияние вдува R_0 на критические значения R_* . Результаты исследования свидетельствуют о том, что при $R_0 > 150$ на длине канала больше 2–3 калибров наблюдается почти идеальное течение.



Фиг. 5

Использование полученных результатов исследования устойчивости при $R_0 > 200$ представляется полезным для исследования устойчивости идеального течения [1].

Заметим также, что учет непараллельности стенок канала в уравнении (2.1) приводит к уменьшению значений критических чисел Рейнольдса.

Автор благодарен Г. И. Петрову за обсуждение результатов работ на семинаре в Институте механики МГУ.

Поступила 14 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Теленин Г. Ф., Шитова Л. Д. Гидродинамика каналов с проницаемыми стенками. Теория исчезающей вязкости. Науч. тр. Ин-та механ. МГУ, 1973, № 30.
2. Варпаев В. Н., Ягодкин В. И. Об устойчивости течения в канале с проницаемыми стенками. Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 5.
3. Варпаев В. Н., Курильская Н. А., Свириденков А. А., Ягодкин В. И. Об устойчивости неавтономных течений в канале с проницаемыми стенками. В сб. «Математическое программирование и расчет строительных конструкций». М., 1972 (Моск. инж.-строит. ин-т. Сб. тр. № 102).
4. Eagles P. M. The stability of family of Jeffery — Hamel solutions for divergent channel flow. J. Fluid Mech., 1966, vol. 24, pt 1.
5. Госмен А. Д., Пан В. М., Ранчел А. К., Сполдинг Д. Б., Вольфштейн М. Численные методы исследования течений вязкой жидкости. М., «Мир», 1972.
6. Берковский В. М., Ногогов Е. Ф. Численное исследование свободной конвекции при нагреве сверху. Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 2.
7. Сапожников В. А. Решение задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений методом прогонки. Тр. Всес. семинара по числ. методам мех. вязкой жидкости. Новосибирск, 1969. «Наука».