

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КРЫЛА, ДВИЖУЩЕГОСЯ НА МАЛЫХ РАССТОЯНИЯХ ОТ ТВЕРДОЙ СТЕНКИ

К. В. РОЖДЕСТВЕНСКИЙ

(Ленинград)

В работе методом сращиваемых разложений получено приближенное решение задачи о нестационарном движении несущей поверхности на малых расстояниях от твердой стенки. Область течения условно разбивается на характерные зоны, где в соответствующих координатах строятся асимптотические разложения для потенциала скорости, которые затем сращиваются в областях общей пригодности. В первом приближении (предельно малые высоты полета) задача сводится к решению уравнения Пуассона в плоской области, ограниченной контуром крыла в плане, с краевыми условиями, устанавливаемыми из сращивания.

Пусть тонкое крыло конечного удлинения с прямой задней кромкой движется над твердой плоской стенкой в идеальной несжимаемой жидкости. Допускаются деформации и колебания крыла относительно стационарного поступательного движения со скоростью U_0 . В дальнейшем все величины приведем к безразмерному виду по скорости U_0 и корневой хорде b . Введем систему координат xuz (оси x и z расположены в плоскости стенки, ось x направлена по скорости U_0 , ось y направлена вверх и проходит через заднюю кромку корневой хорды). Пусть l_1 — передняя и боковые кромки, l_2 — задняя кромка, l_3 — кромки вихревой пелены, S — поверхность крыла, W — поверхность вихревой пелены, h — высота полета по задней кромке, $y_* = y_*(x, z, t)$ — функция, определяющая мгновенное положение крыла относительно стенки; ε — параметр, характеризующий возмущение (например, угол атаки, кривизна, амплитуда колебаний или деформаций и т. п.), а φ_ε — соответствующее возмущение потенциала скоростей. Считая высоту полета весьма малой и ограничиваясь линейной по возмущениям теорией, примем, что

$$\varepsilon \ll h \ll 1, \quad \varphi_\varepsilon = \varepsilon \varphi + O(\varepsilon^2)$$

Представляя уравнение поверхности крыла в виде

$$y_*(x, z, t) = h + \varepsilon f(x, z, t), \quad f(x, z, t) = O(1)$$

сформулируем полную задачу для единичного потенциала φ . Уравнение и граничные условия на крыле, стенке и вихревой пелене имеют вид

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial x} = \alpha_*(x, z, t), \quad (x, z) \in S, \quad y = h \pm$$

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad y = 0 +$$

$$(4) \quad \varphi^+(0, h, z, t^*) - \varphi^-(0, h, z, t^*) = \varphi^+(x, h, z, t) - \\ - \varphi^-(x, h, z, t), \quad (x, z) \in W, \quad y = h, \quad t^* = t + x$$

Условие (4) получено на основе теоремы Томсона и учета связи циркуляции с потенциалом скорости [1] и позволяет найти скачок потенциала $\varphi^+ - \varphi^-$ в произвольной точке пелены, если известна величина скачка в точках задней кромки в любой момент времени.

Постулат Жуковского — Чаплыгина будем понимать как условие непрерывности коэффициента давления p при переходе через заднюю кромку

$$(5) \quad p^+ = p^- \text{ на } l_2$$

$$(6) \quad \text{grad } \varphi \rightarrow 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$$

Для получения асимптотического решения задачи (1)–(6) при $h \rightarrow 0$ используем метод сращиваемых разложений (МСР) [2]. Предварительно произведем условное разбиение поля течения на три области: область над крылом-пеленой и частью стенки вне тени крыла-пелены (D_u), область под крылом-пеленой (D_l) и область вблизи кромок (D_e). В каждой области асимптотическое разложение для потенциала скорости будем искать с учетом характерных для нее масштабов координат. Взаимовлияние отдельных частей потока учтем с помощью асимптотического сращивания решений в зонах общей пригодности, после чего методом аддитивного состояния [2] получим решение, равномерно пригодное во всем потоке. В работе [3] на основе МСР рассмотрен стационарный вариант задачи и получены результаты для пластины бесконечного удлинения и полуэллиптического крыла.

Поток под крылом и вихревой пеленой. Чтобы не потерять при $h \rightarrow 0$ наиболее существенные свойства потока в области D_l , введем в D_l растяжение вертикальной координаты $y_1 = y/h$.

Для потенциала $\varphi_l(x, y, z, t)$ вызванных скоростей под крылом-пеленой из общих соотношений (1)–(6) получим в области D_l следующую задачу:

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial y_1^2} + h^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial z^2} \right) = 0$$

$$(8) \quad \frac{\partial \varphi_l}{\partial y_1} = -h \alpha_s(x, z, t), \quad y_1 = 1 -$$

$$(9) \quad \frac{\partial \varphi_l}{\partial y_1} = 0, \quad y_1 = 0$$

$$(10) \quad \varphi_l(0, 1, z, t^*) - \varphi_l(x, 1, z, t) = \varphi_u(0, h, z, t^*) - \varphi_u(x, h, z, t)$$

где φ_u — потенциал вызванных скоростей над крылом-пеленой.

Условия на задней кромке (5), на верхней стороне крыла и на бесконечности здесь отсутствуют. Эти условия будут введены для потока вблизи задней кромки и потока над крылом-пеленой соответственно и их влияние на φ_l обнаружится при сращивании. Ищем φ_l в виде асимптотического разложения

$$(11) \quad \varphi_l = \frac{1}{h} \Phi + h \Phi^* = \frac{1}{h} \left(\Phi_1 + h \ln \left(\frac{1}{h} \right) \Phi_2 + h \Phi_3 \right) + h \Phi^*$$

где функции Φ и Φ^* имеют порядок $O(1)$.

Такой вид разложения (11), как будет видно из решения, удовлетворяет условию сращивания с кромочными решениями. В данном случае фор-

ма разложения выбрана заранее, однако к такому же результату привело бы почленное сращивание. Подставив (11) в (7)–(10), получим уравнение и граничные условия на крыле и стенке для Φ и Φ^*

$$(12) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

$$(13) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial y_1} = -\alpha_s, \quad (x, z) \in S, \quad y_1 = 1 -$$

$$(14) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial y_1} = 0, \quad y_1 = 0$$

Из соотношений (12)–(14) следует:

$$(15) \quad \Phi = \Phi(x, z, t)$$

$$(16) \quad \Phi^* = -\frac{1}{2} y_1^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) + \chi$$

где $\chi(x, z, t)$ — неизвестная на данном этапе функция.

Согласно (15) поток под крылом и вихревой пеленой с погрешностью порядка $O(h^2)$ имеет двумерное описание в плоскости, параллельной стенке. Дифференцируя выражение (16) по y_1 и используя (13), получим

$$(17) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \alpha_s(x, z, t), \quad (x, z) \in S$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении задача отыскания потенциала Φ сводится к решению уравнения Пуассона относительно функции $\Phi(x, z, t)$ в плоской области S , ограниченной контуром крыла в плане. Краевые условия для S на границе $l_1 + l_2$ области будут получены путем сращивания с верхним потоком через кромки. Для течения под пеленой аналогичным образом получим

$$(18) \quad \alpha_w = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad (x, z) \in W$$

Соотношение (18) — уравнение для нахождения индуктивного скоса α_w в точках вихревой пленки W по известным значениям функции Φ в потоке под пеленой. Из (11) следует:

$$(19) \quad \alpha_w = \alpha_{w_1} + h \ln \left(\frac{1}{h} \right) \alpha_{w_2} + h \alpha_{w_3}$$

Поток над крылом и вихревой пеленой. В области D_u потенциал Φ_u будем искать в виде

$$(20) \quad \Phi_u = \Phi_1(x, z, t) + O(h)$$

Подстановка (20) в (1)–(6) дает следующие уравнение и граничные условия на крыле (сверху), на вихревой пелене (сверху), на стенке вне тени крыла и вихревой пелены и на бесконечности соответственно:

$$(21) \quad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} = 0, \quad (x, y, z) \in D_u$$

$$(22) \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = -\alpha_s(x, z, t), \quad (x, z) \in S, \quad y = 0$$

$$(23) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -\alpha_{w_1}(x, z, t), \quad (x, z) \in W, \quad y=0$$

$$(24) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0, \quad y=0, \quad (x, z) \notin S+W$$

$$(25) \quad \text{grad } \varphi_1 \rightarrow 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty$$

Граничные условия под крылом в данном случае удовлетворить не удастся. Их влияние на φ_1 обнаруживается при сращивании с нижним потоком через кромки. Заметим, что граничное условие на верхней стороне пелены может быть сформулировано как условие непротекания, если в точках пелены известен индуктивный скос α_w . Для определения α_w используем соотношение (4), справедливое на вихревой пленке. Подставив в него асимптотические разложения (11) и (20), получим в первом приближении $\Phi_1(0, z, t^*) = \Phi_1(x, z, t)$, откуда с учетом (18) и (19)

$$\alpha_{w_1} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi_1(x, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi_1(x, z, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi_1(0, z, t^*) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi_1(0, z, t^*)$$

Вспоминая, что для фиксированного момента времени дифференцирование по x согласно определению t^* можно заменить дифференцированием по t^* , получим

$$\alpha_{w_1} = \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} \Phi_1(0, z, t^*) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi_1(0, z, t^*), \quad t^* = t + x$$

Решение для φ_1 строится в виде

$$(26) \quad \varphi_1 = -\frac{1}{4\pi} \int_{l_1+l_3} \frac{Q(l, t) dl}{r} + \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\alpha_s ds}{r} + \frac{1}{2\pi} \iint_W \frac{\alpha_{w_1} ds}{r}$$

Первый член (26) представляет собой потенциал вызванных скоростей от источников (стоков), распределенных по контуру передней и боковых кромок крыла l_1 и кромок следа l_3 , и характеризует влияние нижнего потока на верхний, обусловленное перетеканием через кромки. Мощность $Q(l, t)$ источников (стоков) определяется при сращивании с потоком под крылом-пеленой через кромку l_1 . Последние два члена (26) дают потенциал поверхностного слоя источников (стоков) с мощностью $-2\alpha_s(x, z, t)$ на S и $-2\alpha_{w_1}(x, z, t)$ на W . Решение φ_1 непригодно вблизи кромок l_1, l_2 и l_3 .

Потоки вблизи кромок. Вблизи кромок крыла и вихревой пелены (l_1, l_2 и l_3) требуется построение локальных асимптотических разложений. При радиусе кривизны кромки ρ порядка $O(1)$ течение в окрестности кромки может рассматриваться как двумерное в перпендикулярной к ней плоскости. Рассмотрим поток у кромки l_1 . Введем местную систему координат yOv (v — внешняя нормаль к контуру кромки) и растяжение переменных $v_1 = v/h, y_1 = y/h$.

В комплексной плоскости $Y = v_1 + iy_1$ комплексный потенциал течения вблизи кромки $F_e = \varphi_e + i\psi_e$ и комплексно-сопряженная скорость $dF_e/dY = u_e - iv_e$ — аналитические функции, удовлетворяющие следующим гранич-

ным условиям на крыле $y_1=1\pm$ и на стенке $y_1=0$ соответственно

$$(27) \quad \text{а) } \operatorname{Im} F_e = \psi_e = 1, \quad \text{б) } \operatorname{Im} \frac{dF_e}{dY} = -v_e = h\alpha_s(l, t)$$

$$\text{а) } \operatorname{Im} F_e = \psi_e = 0, \quad \text{б) } \operatorname{Im} dF_e/dY = -v_e = 0$$

Здесь $\alpha_s(l, t)$ — значение функции α_s на контуре l_1 в точке с дуговой координатой l .

Заметим, что в задаче а) плоскость комплексного потенциала течения представляет собой горизонтальную полосу $1 \geq \operatorname{Im} F_e = \psi_e \geq 0$. Осуществляя конформное преобразование этой полосы на физическую плоскость [4], приходим к решению задачи а), которое имеет вид

$$(28) \quad \pi Y = 1 + e^{\pi F_{ae}} + \pi F_{ae}$$

Нетрудно проверить, что решение F_{ae} не нарушает условия непротекания на крыле и стенке и описывает циркуляционное перетекание через кромку.

Решение задачи б) получается из (28) при замене F_{ae} на $h\alpha_s(l, t) dF_{be}/dY$, поскольку область течения в плоскости годографа для задачи б) тоже имеет вид полосы, но с шириной $h\alpha_s(l, t)$. На поверхности крыла с учетом условий (27) получим

$$\text{а) } \pi v_1 = 1 - e^{\pi \varphi_{ae}} + \pi \psi_{ae}, \quad \text{б) } u_{be} = h\alpha_s(l, t) \varphi_{ae}$$

Так как $u_{be} = \partial \varphi_{be} / \partial v_1$, то потенциал решения б) найдется интегрированием

$$(29) \quad \varphi_{be} = h\alpha_s(l, t) \int_0^{v_1} \varphi_{ae}(v_1) dv_1 = \frac{h\alpha_s(l, t)}{\pi} \left[v_1 (\pi \varphi_{ae} - 1) - \frac{1}{2} \pi \varphi_{ae}^2 \right]$$

Общее выражение для потенциала у кромки l_1 представляет собой линейную комбинацию решений φ_{ae} , φ_{be} и решения вида $a_3 h v_1 + a_4$.

$$(30) \quad \varphi_e = a_1 \varphi_{ae} + a_2 \varphi_{be} + a_3 h v_1 + a_4$$

В непосредственной близости от кромки l_1 ($v_1 \rightarrow 0$)

$$\varphi_{ae} \simeq \sqrt{-\frac{2v_1}{\pi}}, \quad \varphi_{be} \simeq h\alpha_s(l, t) \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} v_1 \sqrt{-v_1},$$

$$\varphi_e \simeq a_1 \sqrt{-\frac{2v_1}{\pi}} + a_4 + O(v_1)$$

Дифференцирование по v_1 дает

$$\frac{\partial \varphi_{ae}}{\partial v_1} \simeq -\frac{1}{\sqrt{-2\pi v_1}}, \quad \frac{\partial \varphi_{be}}{\partial v_1} \simeq O(\sqrt{-v_1}), \quad \frac{\partial \varphi_e}{\partial v_1} \simeq -\frac{a_1}{\sqrt{-2\pi v_1}} + O(1)$$

Видно, что вызванная скорость на кромке l_1 имеет такую же особенность, как и для крыла в безграничной жидкости, т. е. $1/\sqrt{-v_1}$.

Параметры a_1 , a_2 , a_3 и a_4 будут найдены при сращивании с потоками над и под крылом.

Вблизи задней кромки l_2 потенциал скорости должен удовлетворять не только условию непротекания на крыле и стенке, но и условию на вихревой пелене (4).

Переходя в (4) к переменной v_1 , получим следующее асимптотическое условие на пелене вблизи задней кромки:

$$(31) \quad (\varphi_e^+ - \varphi_e^-)_{v_1} = (\varphi_e^+ - \varphi_e^-)_{0,1} + h v_1 \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_e^+ - \varphi_e^-)_{0,1} + O(h^2)$$

Из (31) видно, что с погрешностью $O(h^2)$ значения потенциалов на верхней и нижней сторонах пелены вблизи задней кромки отличаются на линейную функцию от v_1 . Из вида краевых условий следует, что вблизи задней кромки

$$(32) \quad \varphi_e = b_1 \varphi_{ae} + b_2 h v_1 + b_3$$

Здесь φ_{ae} определяется формулой (29), а параметры b_2 и b_3 принимают в силу (31) разные значения сверху ($y_1=1+$) и снизу ($y_1=1-$), т. е. $b_2^+ \neq b_2^-$, $b_3^+ \neq b_3^-$.

Решение типа φ_{ae} в (35) отсутствует, так как оно не удовлетворяет постулату Жуковского — Чаплыгина. Величины b_1 , b_2^+ , b_3^+ найдутся при сращивании с потоком над крылом. Связь параметров (b_2^- , b_3^-) с (b_2^+ , b_3^+) будет определена с помощью условия на задней кромке.

Сращивание. Для определения неизвестных параметров, входящих в асимптотические решения, найденные в различных зонах потока, а также условий для функции Φ на контуре области S проведем сращивание в областях общей пригодности.

На первом шаге срастим потенциал потока над крылом-пеленой φ_u с потенциалом потока у кромки l_1 . Вблизи кромки l_1 ($v \rightarrow 0-$) функция φ_u имеет следующее асимптотическое представление:

$$(33) \quad \varphi_u \simeq \varphi_1 \simeq \frac{Q(l, t)}{2\pi} \ln v + \frac{1}{\pi} \left[\alpha_s(l, t) - \frac{Q(l, t)}{\rho} \right] v \ln v + \\ + \frac{A_1(l, t)}{\pi} v + \frac{A_2(l, t)}{\pi} + O(v^2)$$

Здесь $\rho(l)$ — местный радиус кривизны контура кромки (в плане); величины A_1 и A_2 характеризуют влияние удаленных от рассматриваемой точки кромки l_1 источников-стоков. Выражения для A_1 и A_2 в общем случае громоздки и здесь не приводятся.

С другой стороны, при $v_1 \rightarrow -\infty$ над крылом ($y_1=1+$) потенциал кромочного течения φ_e имеет вид

$$(34) \quad \varphi_e^+ \simeq \frac{a_1}{\pi} \ln(\pi v_1) + \frac{a_2}{\pi} \alpha_s(l, t) h v_1 (\ln(\pi v_1) - 1) + a_3 h v_1 + a_4$$

Сравнивая (33) и (34) в одной и той же переменной (v или v_1), получим

$$a_1 = \frac{1}{2} Q(l, t), \quad a_2 = \left[\alpha_s(l, t) - \frac{Q(l, t)}{\rho} \right] / \alpha_s(l, t) \\ a_3 = \frac{1}{\pi} \left\{ A_1 + \left(1 - \ln \left(\frac{\pi}{h} \right) \right) \left[\alpha_s(l, t) - \frac{Q(l, t)}{\rho} \right] \right\} \\ a_4 = \frac{1}{\pi} \left[A_2 - \frac{1}{2} Q(l, t) \ln \left(\frac{\pi}{h} \right) \right]$$

На втором шаге сращивания сравним выражение для потенциала φ_e (30), записанное при $v_1 \rightarrow -\infty$ под крылом ($y_1=1-$), с выражением для φ_l ,

взятым при $v \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\varphi_e^- &\simeq a_1 \left(v_1 - \frac{1}{\pi} \right) + a_2 \alpha_s(l, t) h \left(\frac{v_1^2}{2} - v_1 \right) + a_3 h v_1 + a_4 = \\ &= a_1 \left(\frac{v}{h} - \frac{1}{\pi} \right) + a_2 \alpha_s(l, t) \left(\frac{v^2}{2h} - \frac{v}{\pi} \right) + a_3 v + a_4 = \\ &= \varphi_l |_{v \rightarrow 0} = \frac{1}{h} \Phi |_{v \rightarrow 0}\end{aligned}$$

Устремляя v к нулю, получим

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \Big|_{v=0} = \frac{1}{2} Q(l, t) \\ (35) \quad \Phi &= \Phi_1 + h \ln \left(\frac{1}{h} \right) \Phi_2 + h \Phi_3 = h \left(a_1 - \frac{a_1}{\pi} \right) = \\ &= -\frac{h}{\pi} \left(1 + \ln \frac{\pi}{h} \right) \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \Big|_{v=0} + \frac{h A_2}{\pi} \text{ на } l_2\end{aligned}$$

На третьем шаге срастим асимптотическое представление потенциала φ_u вблизи задней кромки (l_3) с асимптотическим выражением потенциала φ_e потока у задней кромки (32) при $v_1 \rightarrow -\infty$ над крылом ($y_1 = 1 +$)

$$(36) \quad \varphi_u \simeq \varphi_1 \simeq \frac{\Delta \alpha}{\pi} v \ln v + \frac{1}{\pi} B_1(l, t) v + \frac{1}{\pi} B_2(l, t)$$

$$(37) \quad \varphi_e^+ \simeq \frac{b_1 \alpha_s(l, t) h v_1}{\pi} (\ln(\pi v_1) - 1) + b_2^+ v_1 h + b_3^+$$

Здесь $\Delta \alpha = \alpha_s(l, t) - \alpha_{u_1}(l, t)$, а B_1 и B_2 имеют тот же смысл, что и A_1, A_2 .

Переходя в (37) к переменной v и сравнивая с (36), имеем

$$\begin{aligned}(38) \quad b_1 &= \Delta \alpha / \alpha_s(l, t), \quad b_2^+ = \frac{B_1(l, t)}{\pi} + \frac{\Delta \alpha}{\pi} \left(1 - \ln \left(\frac{\pi}{h} \right) \right), \\ b_3^+ &= \frac{B_2(l, t)}{\pi}\end{aligned}$$

Преобразуем выражение для коэффициента давления

$$(39) \quad p = 2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -2 \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \varphi}{\partial v_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

Постулат Жуковского — Чаплыгина запишем с учетом (39) в виде

$$(40) \quad -2 \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \varphi_e^+}{\partial v_1} + \frac{\partial \varphi_e^+}{\partial t} \right) = -2 \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \varphi_e^-}{\partial v_1} + \frac{\partial \varphi_e^-}{\partial t} \right), \quad v_1 = 0$$

Учитывая, что в непосредственной близости от задней кромки ($v_1 \rightarrow 0 -$) потенциал потока удовлетворяет оценкам

$$(41) \quad \varphi_e^+ \simeq b_3^+ + b_2^+ h v_1 + O(v_1^{3/2}), \quad \varphi_e^- \simeq b_3^- + b_2^- h v_1 + O(v_1^{3/2})$$

и подставляя (41) в (40), приходим к уравнению

$$(42) \quad b_3^+ + \frac{\partial b_3^+}{\partial t} = b_3^- + \frac{\partial b_3^-}{\partial t}$$

Таким образом, применение постулата Жуковского — Чаплыгина (6) дает связь между параметрами (b_2^-, b_3^-) и (b_2^+, b_3^+) , причем величина последних известна (38).

На последнем шаге срачивания запишем асимптотическое выражение для коэффициента давления в потоке под задней кромкой при $v_1 \rightarrow -\infty$, $y_1 = 1 -$

$$(43) \quad p_s^- = -2 \left(\frac{1}{h} \frac{\partial \Phi_s^-}{\partial v_1} + \frac{\partial \Phi_s^-}{\partial t} \right) = -2 \left\{ b_1 \alpha_s(l, t) \left(v_1 - \frac{1}{\pi} \right) + b_2^- + \right. \\ \left. + \left(\frac{h v_1^2}{2} - \frac{h v_1}{\pi} \right) \frac{\partial}{\partial t} (b_1 \alpha_s(l, t)) + h v_1 \frac{\partial b_2^-}{\partial t} + \frac{\partial b_3^-}{\partial t} \right\}$$

Переходя в (43) к переменной v и устремляя v к нулю, имеем

$$p_l = 2 \left(\frac{\partial \Phi_l}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_l}{\partial t} \right) \simeq \frac{2}{h} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \\ = 2 \left[\frac{b_1 \alpha_s(l, t)}{\pi} - b_2^- - \frac{\partial b_3^-}{\partial t} \right]$$

Из последнего соотношения с учетом уравнения связи (42) получим недостающее условие для функции Φ на задней кромке

$$(44) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{h}{\pi} \left[B_1(l, t) - \Delta \alpha \ln \left(\frac{\pi}{h} \right) + \frac{\partial B_2(l, t)}{\partial t} \right] \text{ на } l_2$$

Равномерно пригодные выражения для потенциалов потока на верхней и нижней сторонах крыла найдем по правилу аддитивного составления [2]

$$\Phi^+ = \Phi_1 + (\Phi_s^+ - \Phi_s^+|_{v_1 \rightarrow -\infty})_{l_1} + (\Phi_s^+ - \Phi_s^+|_{v_1 \rightarrow -\infty})_{l_2} \\ \Phi^- = \frac{1}{h} \Phi + (\Phi_s^- - \Phi_s^-|_{v_1 \rightarrow -\infty})_{l_1} + (\Phi_s^- - \Phi_s^-|_{v_1 \rightarrow -\infty})_{l_2}$$

Коэффициенты подъемной силы и момента относительно задней кромки вычисляются по формулам

$$c_y = \frac{e}{S} \iint_S (p^- - p^+) ds, \quad m_z = \frac{e}{S} \iint_S (p^- - p^+) x ds$$

В первом приближении (предельно малые высоты полета) задача принимает очень простой вид

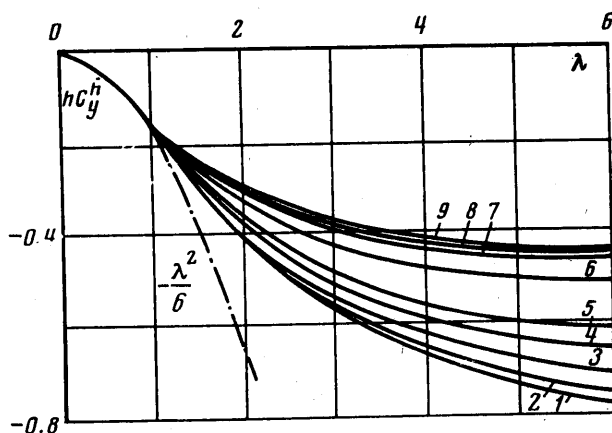
$$\Phi^- \simeq \frac{1}{h} \Phi_1 + O \left(\ln \left(\frac{1}{h} \right) \right), \quad \Phi^+ = O(1)$$

где Φ_1 удовлетворяет следующему уравнению и краевым условиям:

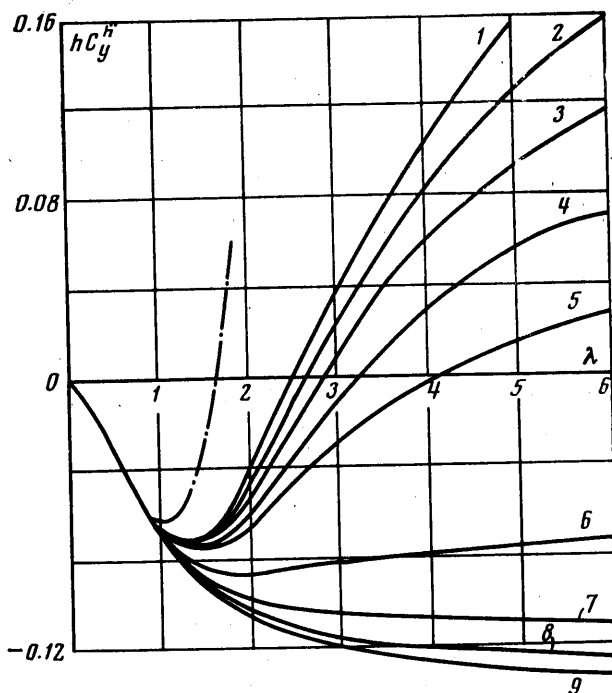
$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} = \alpha_s(x, z, t), \quad (x, z) \in S \\ \Phi_1 = 0 \text{ на } l_1, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = 0 \text{ на } l_2$$

Основные упрощения математической модели первого приближения связаны со следующими обстоятельствами.

Во-первых, как следует из решения, при $h \rightarrow 0$ потенциал потока под крылом имеет величину порядка $O(1/h)$, в то время как сверху он имеет



Фиг. 1



Фиг. 2

порядок $O(1)$. Физически это означает, что в зоне сильного влияния стенки основной вклад в подъемную силу дает течение под крылом.

Во-вторых, при $h \rightarrow 0$ индукция свободных вихрей (как стационарных, так и нестационарных), расположенных на расстояниях порядка $O(1)$ за задней кромкой, компенсируется влиянием зеркально отображенных вихрей. Поэтому эффекты конечности размаха (поперечное протекание) и нестационарности (сдвиг по фазе и т. п.) обусловлены на предельно малых высотах только влиянием свободных вихрей, расположенных в пределах крыла.

Основные результаты применения изложенного подхода к решению конкретных задач будут опубликованы отдельно. В качестве примера приведем выражение для коэффициента подъемной силы прямоугольного крыла при вертикальных колебаниях на предельно малых высотах (первое приближение)

$$(45) \quad c_y = \dot{h} c_y^{\dot{h}} + \ddot{h} c_y^{\ddot{h}}$$

$$c_y^{\dot{h}} = -\frac{16}{h\lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\operatorname{th} \kappa \operatorname{th} (\kappa/2)}{\kappa^4}$$

$$(46) \quad c_y^{\ddot{h}} = \frac{16}{h\lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\kappa^4} \left[\frac{\operatorname{th} \kappa}{\kappa} \left(c_n \operatorname{th} \kappa \operatorname{th} \left(\frac{\kappa}{2} \right) + 1 \right) - 1 \right]$$

$$\kappa = \frac{\pi}{\lambda} (2n+1), \quad c_n = \frac{1+k^2 \operatorname{th} \kappa \operatorname{th} (\kappa/2) / \kappa^2}{1+k^2 \operatorname{th}^2 \kappa / \kappa^2}$$

Здесь λ — удлинение, $k = \omega b / U_0$ — число Струхала, $\dot{h} = h_0 k \cos kt$, $\ddot{h} = -h_0 k^2 \sin kt$ — мгновенные значения скорости и ускорения при вертикальных колебаниях, h_0 — амплитуда колебаний.

Можно получить

$$(47) \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad c_y^{\dot{h}} = -\frac{1}{h} \frac{1+0.5k^2}{1+k^2}, \quad c_y^{\ddot{h}} = \frac{1-0.5k^2}{3h(1+k^2)}$$

$$\lambda \rightarrow 0, \quad c_y^{\dot{h}} = -\frac{\lambda^2}{6h}, \quad c_y^{\ddot{h}} = -\frac{\lambda^2}{6h} \left(1 - \frac{192\lambda}{\pi^5} \right)$$

Результаты расчетов по формулам (45), (46) приведены на фиг. 1, 2 в виде зависимостей величин $\dot{h} c_y^{\dot{h}}$ и $\ddot{h} c_y^{\ddot{h}}$ от удлинения и числа Струхала. Цифры 1–9 на фиг. 1 и 2 соответствуют значениям числа Струхала $k=0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 2, 3, 4, 5$. Штрихпунктирные кривые соответствуют формулам (47).

Нелинейный подход к решению плоской стационарной задачи развит в [5].

Рассмотренный подход можно распространить и на случай крыла с малой толщиной. Особенности геометрии крыла (наличие шайб, закрылков, щелей и т. п.) учитываются путем построения соответствующих локальных течений и сращивания с основным решением.

Поступила 11 IV 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М., «Наука», 1971.
2. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
3. Widnall S. E., Barrows T. M. An analytic solution for two and three-dimensional wings in ground effect. J. Fluid Mech., 1970, vol. 41, pt 4.
4. Лаврентьев М. А., Шабар Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965.
5. Рождественский Р. В. Нелинейная теория слабоизогнутого крыла на малых расстояниях от твердой границы. Тр. ЛКЙ, 1976, вып. 104.