МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1977

УДК 533.6.011.8

О ЗАВИСИМОСТИ ПУАЗЕЙЛЕВСКОГО СКОЛЬЖЕНИЯ И ТЕПЛОВОГО КРИПА ОТ ЗАКОНА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МОЛЕКУЛ ГАЗА С ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

П. Е. СУЕТИН, В. Г. ЧЕРНЯК

(Свердловск)

Задача скольжения газа на плоской стенке решается на основе линеаризованного кинетического уравнения с модельным столкновительным членом (S-модель, обеспечивающая правильное значение числа Прандтля).

Получены выражения для пуазейлевского скольжения и теплового крипа, содержащие интегралы по полупространству скоростей от ядра рассеяния. Эти выражения конкретизируются для трех частных случаев, соответствующих известным моделям ядра рассеяния.

В настоящее время получены достаточно точные решения кинетических уравнений для задачи о скольжении газа в кнудсеновском слое, например [1–5]. Однако в качестве граничных условий принимались простейшие модели полностью диффузного или, в лучшем случае, зеркально-диффузного рассеяния молекул газа от граничной поверхности. Вместе с тем представляет интерес исследовать влияние закона взаимодействия газ — поверхность на величину скорости скольжения. Такому исследованию посвящена настоящая работа.

Стал уже традиционным следующий подход к постановке граничных задач динамики разреженного газа: во-первых, выбирается кинетическое уравнение, во-вторых, выбирается какая-либо модель взаимодействия молекул газа с обтекаемой поверхностью, после чего записываются граничные условия. Таким образом, уже в самой постановке задачи содержится в явном виде закон взаимодействия газ — поверхность. Недостаток такого подхода очевиден: по мере накопления знаний о законах взаимодействия молекул газа с поверхностью (т. е. по мере усовершенствования граничных условий) для вычисления макроскопических величин необходимо всякий раз заново решать кинетическое уравнение.

В данной работе авторы отошли от традиционной схемы. При постановке граничного условия не используется какая-либо конкретная модель взаимодействия газ — поверхность. Связь между функциями распределения падающих и отраженных от стенки молекул устанавливается интегральным выражением через ядро рассеяния [1]. Таким образом, в окончательное выражение для скорости скольжения закон взаимодействия газа с обтекаемой поверхностью входит в общем виде через ядро рассеяния. Ценность полученного результата в том, что он позволяет вычислять величину скольжения для любой модели взаимодействия газа с граничной поверхностью, не решая при этом всякий раз заново кинетического уравнения.

Рассмотрим движение однокомпонентного одноатомного газа, заполняющего полупространство $x>0$, вдоль граничной поверхности $x=0$ в направлении оси z.

Пусть состояние газа возмущено продольным градиентом температуры dT/dz и движение характеризуется макроскопической скоростью $U(x)$. Если $U(m/2kT)^{1/2}\ll 1$ (m — масса молекулы, T — температура газа, k — постоянная Больцмана), то функция распределения молекул по скоростям незначительно отличается от максвелловской, т. е.

$$f(x, z, \mathbf{v}) = f_0(z, v^2)[1+h(x, \mathbf{v})]$$

(1)

$$f_0(z, v^2) = n(z)\left[\frac{m}{2\pi kT(z)}\right]^{3/2}\exp\left[-\frac{mv^2}{2kT(z)}\right]$$

где n — числовая плотность молекул, $\mathbf{v}$ — скорость молекулы.

Для упрощения расчетов исходное кинетическое уравнение выбирается в виде S-модели [6]. Эта модель обеспечивает правильное значение критерия Прандтля (в отличие от модели БГК) и, следовательно, позволяет корректно описывать процессы тепло- и массопереноса одновременно. После линеаризации и приведения к безразмерному виду модельное кинетическое уравнение преобразуется в интегродифференциальное уравнение для функции возмущения $h(x, \mathbf{v})$

$$c_x\frac{\partial h}{\partial s}+c_z\left(c^2-\frac{5}{2}\right)\tau=2uc_z+Qc_z\left(c^2-\frac{5}{2}\right)-h \tag{2}$$

$$Q=\frac{4}{15}\left(\frac{m}{2kT_0}\right)^{1/2}p^{-1}q_z=\frac{4\pi^{-3/2}}{15}\int hc_z\left(c^2-\frac{5}{2}\right)\exp(-c^2)d\mathbf{c}$$

$$u=U\left(\frac{m}{2kT_0}\right)^{1/2}=\pi^{-3/2}\int hc_z\exp(-c^2)d\mathbf{c},\quad c_i=\left(\frac{m}{2kT_0}\right)^{1/2}v_i \tag{3}$$

$$T_0=T(z=0),\quad \tau=\frac{1}{T}\frac{dT}{dz_1},\quad z_1=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{z}{l},\quad s=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{x}{l}$$

Здесь q_z — плотность теплового потока в направлении оси z, p — давление газа, l — средняя длина свободного пробега молекул, вычисленная из коэффициента вязкости $\eta={}^1/_2n_0m(8kT_0/\pi m)^{1/2}l$.

Граничное условие устанавливает связь между функциями распределения отраженных и падающих на стенку молекул [1]

$$f(x=0,\mathbf{v})=\int\limits_{v_x'<0}K(\mathbf{v}',\mathbf{v})f(x=0,\mathbf{v}')d\mathbf{v}',\qquad v_x>0 \tag{4}$$

Здесь ядро рассеяния $K(\mathbf{v}', \mathbf{v})$ с точностью до множителя $-v_x'/v_x$ равно плотности вероятности того, что молекула, падающая на стенку со скоростью $\mathbf{v}'$, отразится от нее со скоростью $\mathbf{v}$.

С учетом линеаризации (1) и принципа детального равновесия [2] выражение (4) принимает следующий вид:

$$\begin{gathered}h^+(0,\mathbf{c})\exp(-c^2)=\int\limits_0^\infty\exp(-c_x'^2)dc_x'\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-c_y'^2-c_z'^2)\times\\ \times R(\mathbf{c}',\mathbf{c})h^-(0,-c_x',c_y',c_z')dc_z'\,dc_y'\\ h={}^1/_2[(1+\operatorname{sign}c_x)h^++(1-\operatorname{sign}c_x)h^-]\end{gathered} \tag{5}$$

$$R(\mathbf{c}',\mathbf{c})=\left(\frac{2kT_0}{m}\right)^{3/2}K(-v_x',v_y',v_z',\mathbf{v}) \tag{6}$$

Если функции $u(s)$, $Q(s)$ временно считать известными, то уравнение (2) можно формально проинтегрировать

$$\begin{gathered}h^+(s,\mathbf{c})=\exp\left(-\frac{s}{c_x}\right)h^+(0,\mathbf{c})+\frac{c_z}{c_x}\int\limits_0\exp\left(-\frac{s-s'}{c_x}\right)\times\\ \times\left\{2u(s')-[\tau-Q(s')]\left(c^2-\frac{5}{2}\right)\right\}ds'\end{gathered} \tag{7}$$

$$h^{-}(s,\mathbf{c})=\frac{c_z}{c_x}\int\limits_{\infty}^{s}\exp\left(-\frac{s-s'}{c_x}\right)\times \tag{8}$$

$$\times\left\{2u(s')-[\tau-Q(s')]\left(c^2-\frac{5}{2}\right)\right\}ds'$$

По определению (3) с учетом граничного условия (5) нетрудно получить систему интегральных уравнений для величин $u(s)$, $Q(s)$

$$u(s)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\left\{u(s')\gamma_{0-1}^{+}(s,s')-\frac{1}{2}[\tau-Q(s')]\beta_{0-1}^{+}(s,s')\right\}ds' \tag{9}$$

$$Q(s)=\frac{4}{15\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\infty}\left\{u(s')\beta_{0-1}^{+}(s,s')-\frac{1}{2}[\tau-Q(s')]l_{0-1}^{+}(s,s')\right\}ds' \tag{10}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\gamma_{mn}^{\pm}(s,s')=J_n(|s-s'|)\pm T_{mn}(s,s')$$

$$\beta_{mn}^{\pm}(s,s')=J_{n+2}(|s-s'|)-{}^1/_2J_n(|s-s'|)\pm K_{mn}(s,s')$$

$$l_{mn}^{\pm}(s,s')=J_{n+4}(|s-s'|)-J_{n+2}(|s-s'|)+{}^9/_4J_n(|s-s'|)\pm H_{mn}(s,s'), \tag{11}$$

$$J_n(t)=\int\limits_0^{\infty}\xi^n\exp\left(-\xi^2-\frac{t}{\xi}\right)d\xi$$

$$T_{mn}(s,s')=\frac{2}{\pi}\iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty}c_zc_z'\exp(-c_z'^2-c_y'^2)\,dc_z\,dc_y\,dc_z'\,dc_y'$$

$$\iint\limits_0^{\infty}c_x^mc_x'^n\exp\left(-c_x'^2-\frac{s}{c_x}-\frac{s'}{c_x'}\right)R(\mathbf{c}',\mathbf{c})\,dc_x'\,dc_x$$

$$K_{mn}(s,s')=\frac{2}{\pi}\iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty}c_zc_z'\exp(-c_z'^2-c_y'^2)\,dc_z\,dc_y\,dc_z'\,dc_y'$$

$$\iint\limits_0^{\infty}c_x^mc_x'^n\left(c'^2-\frac{5}{2}\right)\exp\left(-c_x'^2-\frac{s}{c_x}-\frac{s'}{c_x'}\right)R(\mathbf{c}',\mathbf{c})\,dc_x'\,dc_x$$

$$H_{mn}(s,s')=\frac{2}{\pi}\iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty}c_zc_z'\exp(-c_z'^2-c_y'^2)\,dc_z\,dc_y\,dc_z'\,dc_y'$$

$$\iint\limits_0^{\infty}c_x^mc_x'^n\left(c^2-\frac{5}{2}\right)\left(c'^2-\frac{5}{2}\right)\exp\left(-c_x'^2-\frac{s}{c_x}-\frac{s'}{c_x'}\right)\times$$

$$\times R(\mathbf{c}',\mathbf{c})\,dc_x'\,dc_x$$

Интегральное уравнение (9) описывает профиль макроскопической скорости газа во всей области течения. Вместе с тем вдали от граничной поверхности (практически при $x\geqslant 10l$, т. е. $s\geqslant 10$) движение газа описывается уравнением Навье—Стокса. Решение этого уравнения с граничным условием прилипания указывает на линейную зависимость профиля скорости от расстояния, т. е.

$$u_0 = s\frac{du(0)}{ds} \tag{12}$$

Следовательно, можно записать

$$u(s) = \varphi(s) + u_0 \tag{13}$$

Функция $\varphi(s)$ описывает возмущение газового потока, обусловленное наличием кнудсеновского слоя, а величина

$$\mu = \lim_{s\to\infty}\varphi(s) \tag{14}$$

характеризует скорость скольжения газа на стенке.

С учетом выражений (12), (13) уравнения (9), (10) принимают следующий вид:

$$\sqrt{\pi}\,\varphi(s) = \gamma_{01}^{+}(s,0)\frac{du(0)}{ds} + \frac{1}{2}\beta_{00}^{-}(s,0)\tau + \int_0^\infty \left[\varphi(s')\gamma_{0-1}^{\pm}(s,s') + \frac{1}{2}Q(s')\beta_{0-1}^{\pm}(s,s')\right]ds' \tag{15}$$

$$\frac{15\sqrt{\pi}}{4}Q(s) = \beta_{01}^{+}(s,0)\frac{du(0)}{ds} - \frac{1}{2}\left[\frac{5\sqrt{\pi}}{2} - l_{00}^{-}(s,0)\right]\tau + \int_0^\infty \left[\varphi(s')\beta_{0-1}^{\pm}(s,s') + \frac{1}{2}Q(s')l_{0-1}^{\pm}(s,s')\right]ds' \tag{16}$$

Для дальнейшего анализа удобно ввести функцию

$$\psi(s) = \varphi(s) - \mu \tag{17}$$

Подстановка (17) в (15) приводит к следующему уравнению для $\psi(s)$:

$$\sqrt{\pi}\,\psi(s) = \gamma_{01}^{+}(s,0)\frac{du(0)}{ds} + \frac{1}{2}\beta_{00}^{-}(s,0)\tau - \gamma_{00}^{-}(s,0)\mu + \int_0^\infty \left[\psi(s')\gamma_{0-1}^{\pm}(s,s') + \frac{1}{2}Q(s')\beta_{0-1}^{\pm}(s,s')\right]ds' \tag{18}$$

Если уравнение (18) дважды проинтегрировать по s в пределах от s до ∞, то нетрудно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned}\mu[J_2(s) - T_{20}(s,0)] &= [J_3(s) + T_{21}(s,0)]\frac{du(0)}{ds} + \\ &+ \frac{1}{2}\left[J_4(s) - \frac{1}{2}J_2(s) - K_{20}(s,0)\right]\tau + \\ &+ \int_0^\infty \Big\{\psi(s')[J_1(|s-s'|) + T_{2-1}(s,s')] + \\ &+ \frac{1}{2}Q(s')\left[J_3(|s-s'|) - \frac{1}{2}J_1(|s-s'|) + K_{2-1}(s,s')\right]\Big\}ds'\end{aligned} \tag{19}$$

Чтобы установить связь между величиной скольжения μ и функциями $\varphi(s)$, $Q(s)$, достаточно в уравнении (19) положить $s=0$ и воспользоваться выражением (17); результат имеет вид

(20)
$$\mu=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}+A_{21}\right)\frac{du(0)}{ds}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}-B_{20}\right)\tau+$$
$$+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\Big\{\varphi(s')\left[J_1(s')+T_{2-1}(0,s')\right]+\frac{1}{2}Q(s')\times$$
$$\times\left[J_3(s')-\frac{1}{2}J_1(s')+K_{2-1}(0,s')\right]\Big\}ds'$$

(21) $$A_{mn}\equiv T_{mn}(0,0),\quad B_{mn}\equiv K_{mn}(0,0)$$

Таким образом, для вычисления скорости скольжения необходимо определить функции $\varphi(s)$ и $Q(s)$, которые являются решением системы интегральных уравнений (15), (16). Такое решение может быть получено методом Бубнова — Галеркина [7].

Пусть пробным функциями будут некоторые постоянные величины

(22) $$\varphi(s)\simeq F_1,\quad Q(s)\simeq F_2$$

Подстановка аппроксимации (22) в уравнения (15), (16) определяет невязки следующего вида:

(23)
$$\Phi_1=\sqrt{\pi}F_1-\gamma_{01}^+(s,0)\frac{du(0)}{ds}-\frac{1}{2}\beta_{00}^-(s,0)\tau-$$
$$-\int_0^\infty\left[F_1\gamma_{0-1}^{+}(s,s')+\frac{1}{2}F_2\beta_{0-1}^{+}(s,s')\right]ds'$$
$$\Phi_2=\frac{15\sqrt{\pi}}{4}F_2-\beta_{01}^+(s,0)\frac{du(0)}{ds}+\frac{1}{2}\left[\frac{5\sqrt{\pi}}{2}-l_{00}^-(s,0)\right]\tau-$$
$$-\int_0^\infty\left[F_1\beta_{0-1}^{+}(s,s')+\frac{1}{2}F_2l_{0-1}^{+}(s,s')\right]ds'$$

Условия минимального значения невязок

(24) $$\int_0^\infty\Phi_1(s)\,ds=0,\qquad\int_0^\infty\Phi_2(s)\,ds=0$$

задают систему алгебраических уравнений для определения величин F_1 и F_2.

Единственное решение этой системы, соответствующее конечным значениям макроскопической скорости и теплового потока, имеет вид

(25)
$$\varphi\simeq F_1=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}+4A_{11}}{1-2A_{10}}\frac{du(0)}{ds}+\frac{3}{8}\frac{1-4B_{10}}{1-2A_{10}}\tau,\qquad Q\simeq F_2=-\frac{1}{2}\tau$$

Подставляя (25) в уравнение (20), нетрудно получить следующее выражение для скорости скольжения:

(26) $$\mu=\mu_p\frac{du(0)}{ds}+\mu_T\tau$$

(27) $$\mu_p=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}+A_{21}\right)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}+A_{20}\right)\frac{\sqrt{\pi}+4A_{11}}{1-2A_{10}}$$

$$\mu_T=\frac{3}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}-B_{20}\right)+\frac{3}{4\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}+A_{20}\right)\frac{1-4B_{10}}{1-2A_{10}}$$

Чтобы записать окончательный результат для скольжения, необходимо в (26) перейти к размерным величинам

(28) $$\sigma=\left(\frac{2kT_0}{m}\right)^{1/2}\mu=\sigma_p l\frac{dU(0)}{dx}+\sigma_T l\left(\frac{2kT_0}{m}\right)^{1/2}\frac{1}{T}\frac{dT}{dz}$$

$$\sigma_p=2\mu_p/\sqrt{\pi},\quad \sigma_T=2\mu_T/\sqrt{\pi}$$

Постоянные σ_p и σ_T характеризуют величины пуазейлевского скольжения и теплового крипа соответственно.

Закон взаимодействия молекул газа с граничной поверхностью входит в σ_p и σ_T в виде интегралов от ядра рассеяния, определяемых соотношениями (11) и (21). Следовательно, коэффициенты A_{mn} и B_{mn}, входящие в выражения (27), могут быть вычислены, если известен явный вид ядра рассеяния $K(\mathbf{v}', \mathbf{v})$.

К сожалению, в настоящее время не существует строго обоснованной модели $K(\mathbf{v}', \mathbf{v})$, что связано со сложностью физических процессов, происходящих при взаимодействии газ – поверхность. Задача значительно упростилась после того, как ввели понятие аккомодации газа на граничной поверхности. Это позволило записать ряд простых моделей для $K(\mathbf{v}', \mathbf{v})$ [8], при помощи которых удалось описать многие экспериментальные данные.

Ниже вычисляются постоянные скольжения σ_p, σ_T для некоторых наиболее распространенных моделей $K(\mathbf{v}', \mathbf{v})$.

1. Диффузное рассеяние молекул стенкой описывается функцией вида [1, 2, 8]

(29) $$R(\mathbf{c}', \mathbf{c})=\frac{2}{\pi}\exp(-c^2)c_x'$$

В этом приближении удалось описать многие экспериментальные данные по движению тяжелых газов (Xe, Kr, Ar) при малых градиентах.

В данной задаче использование выражения (29) при вычислении коэффициентов A_{mn} и B_{mn}, определенных в (21), дает

$$A_{21}=A_{20}=A_{11}=A_{10}=B_{20}=B_{10}=0$$

поскольку подынтегральные функции в соотношениях (11) оказываются нечетными по c_z и c_z'.

Тогда из (27) и (28) следует, что

(30) $$\sigma_p=2/\pi+{}^1/_2\approx 1.137,\qquad \sigma_T=9/8\sqrt{\pi}\approx 0.6347$$

Эти результаты были получены ранее из модельного уравнения БГК; в частности, значение σ_p приведено в [2], а σ_T – в работе [4].

Интересно отметить, что величина скольжения не зависит от выбора статистической модели столкновительного члена кинетического уравнения. Кроме того, удовлетворительное согласие с результатами работ [3–5], в которых использовался больцмановский оператор межмолекулярных столкновений, свидетельствует либо о слабой зависимости величины скольжения от вида столкновительного члена в кинетическом уравнении, либо об удовлетворительной аппроксимации этого члена статистическими моделями.

2. Зеркально-диффузная схема граничных условий, предложенная Максвеллом, заключается в том, что доля ε молекул рассеивается поверхностью диффузно, а доля $(1-\varepsilon)$ отражается зеркально.

В этом случае функция рассеяния имеет следующий вид [1, 2, 8]:

$$R(\mathbf{c}',\mathbf{c})=(1-\varepsilon)\delta(\mathbf{c}'-\mathbf{c})+\varepsilon\frac{2}{\pi}\exp(-c^2)c_x' \tag{31}$$

Коэффициент диффузности ε характеризует аккомодационные свойства газов на граничной поверхности.

Использование выражения (31) приводит к следующим результатам:

$$A_{21}=A_{10}=\frac{1}{2}(1-\varepsilon),\quad A_{20}=A_{11}=B_{20}=\frac{\sqrt{\pi}}{4}(1-\varepsilon),\quad B_{10}=\frac{1}{4}(1-\varepsilon)$$

следовательно

$$\sigma_p=\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\left(\frac{2\varepsilon}{\pi}+\frac{2-\varepsilon}{2}\right),\quad \sigma_T=\frac{3}{4\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{32}$$

Приведенный результат для σ_T полностью совпадает со значением, полученным в работах [9, 10].

3. Модель, предложенная в работе [11], имеет вид

$$R(\mathbf{c}',\mathbf{c})=\frac{2}{\pi}\frac{c_x'}{\alpha(2-\alpha)}\exp\left\{-c_x^2-\frac{[c_y-(1-\alpha)c_y']^2}{\alpha(2-\alpha)}-\right.$$
$$\left.-\frac{[c_z-(1-\alpha)c_z']^2}{\alpha-(2-\alpha)}\right\} \tag{33}$$

Здесь параметр α является коэффициентом аккомодации тангенциального импульса молекул газа на стенке.

Модель (33), усложненная введением еще одного параметра (коэффициентом аккомодации нормального импульса), позволила описать экспериментальные данные по отражению молекулярных пучков от плоской поверхности [11].

Если в данной работе принять модель функции рассеяния (33), то после простых вычислений получаются следующие результаты:

$$A_{21}=\frac{\pi}{8}(1-\alpha),\quad A_{20}=A_{11}=\frac{\sqrt{\pi}}{4}(1-\alpha),\quad A_{10}=\frac{1}{2}(1-\alpha)$$

$$B_{20}=\frac{\sqrt{\pi}}{8}(1-\alpha),\quad B_{10}=\frac{1}{4}(1-\alpha)$$

Следовательно

$$\sigma_p=\frac{2}{\pi}+\frac{4-3\alpha}{2\alpha},\quad \sigma_T=\frac{9}{8\sqrt{\pi}} \tag{34}$$

т. е. величина теплового крипа σ_T не зависит от α.

Таким образом, если ядро рассеяния известно, то величины пуазейлевского скольжения и теплового крипа могут быть вычислены из соотношений (11), (21), (27) и (28). Если же поставить вопрос о том, какой из существующих моделей ядра рассеяния следует отдать предпочтение, то однозначно ответить на него в общем случае пока невозможно. Поскольку законы взаимодействия газ — поверхность изучены мало, то единственным критерием при выборе той или иной модели ядра рассеяния является согласие теоретических и экспериментальных результатов.

Поступила 3 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
2. *Черчиньяни К.* Математические методы в кинетической теории газов. М., «Мир», 1973.
3. *Loyalka S. K., Ferziger J. H.* Model dependence of the slip coefficient. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 8.
4. *Loyalka S. K.* Slip in the thermal creep flow. Phys. Fluids, 1971, vol. 14, No. 1.
5. *Горелов С. Л., Коган М. Н.* Течение разреженного газа между двумя параллельными пластинами. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 6.
6. *Шахов Е. М.* О приближенных кинетических уравнениях в теории разреженных газов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1.
7. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
8. *Баранцев Р. Г.* Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. М., «Наука», 1975.
9. *Абрамов Ю. Ю.* Приближенный метод решения кинетического уравнения вблизи границы. Теплофизика высоких температур, 1970, т. 8, № 4.
10. *Черняк В. Г., Маргилевский А. Е., Породнов Б. Т., Суетин П. Е.* К вопросу о влиянии взаимодействия газов с поверхностью на тепловой крип в плоском канале. Инж.-физ. ж., 1975, т. 28, № 4.
11. *Cercignani C., Lampis M.* Kinetic models for gas-surface interactions. Transp. Theory and Statist. Phys., 1971, vol. 1, No. 2.