

## ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЗАРЯДКА ТЕЛ ВСЛЕДСТВИЕ ВЫНОСА ИЗ НИХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИМ ПОТОКОМ

В. А. БУЧИН, А. Б. ВАТАЖИН, М. Б. ПУДОВ

(Москва)

Исследован нестационарный процесс электрической зарядки тел вследствие выноса из них заряженных частиц гидродинамическим потоком. Анализ проведен применительно к задаче двигательной электризации летательных аппаратов, обусловленной истечением в окружающее пространство электрически заряженных реактивных струй. Сформулирована соответствующая система нестационарных уравнений электрогазодинамики. Показано, что во многих приложениях зарядка электрически изолированного тела состоит из двух последовательных переходных процессов. Первый представляет собой накопление на теле заряда  $Q_\infty$  за характерное время  $T_1$ . Второй процесс заключается в изменении потенциала тела (с постоянным зарядом  $Q_\infty$ ) вследствие движения в окружающем пространстве ранее вышедших из тела заряженных частиц. В конце второго процесса (с продолжительностью  $T_2$ ) на теле вырабатывается плавающий потенциал  $\varphi_\infty$ .

Рассмотрена задача о зарядке сферического гидродинамического и электрического источника нейтральных и заряженных частиц. С помощью полученного аналитического решения найдены величины  $Q_\infty$  и  $\varphi_\infty$  и характерные времена  $T_1$  и  $T_2$ . Показано, что время  $T_2$  может на несколько порядков превышать  $T_1$ .

Сформулированы задачи о нестационарных электрических полях при выносе из тела нескольких сортов заряженных частиц.

**1. Приближенный анализ проблемы.** Рассмотрим тело, через поверхность которого (или часть поверхности) в окружающее пространство истекает среда, представляющая собой смесь нейтральной жидкости (или газа) и электрически заряженной компоненты. Будем считать, что заряженными частицами являются ионы или микрочастицы достаточно малого размера (порядка  $10^{-5} \div 10^{-4}$  см). Телами-источниками заряженных частиц в практических приложениях являются лабораторные коронные источники (с заряженными частицами-ионами), обдуваемые струями воздуха [1, 2], и летательные аппараты, струи реактивных двигателей которых выносят в окружающее пространство заряженные частицы несгоревшего топлива [3, 4].

В общем случае эффект выноса заряженных частиц в окружающее пространство можно связать с наличием внутри тел «источников ионизации», которые работают в течение заданного времени. Источниками ионизации могут быть микрочастицы, которые попадают в гидродинамический поток и в нем электризуются, специальные химические компоненты, которые способствуют образованию в потоке ионных примесей, и коронный разряд в газе. Так как суммарный заряд при работе источников ионизации в электрически изолированном теле не изменяется, то при отсутствии условий истечения из тела зарядов какого-либо одного знака тело электрически не заряжается. Однако при наличии гидродинамического потока внутри тела создается условия, когда вследствие разной подвижности положительно и отрицательно заряженных частиц или вследствие специфических особенностей источников ионизации в окружающее простран-

во истекают заряженные частицы только одного знака, и тело приобретает нескомпенсированный электрический заряд  $Q_s$  противоположного знака. Вынос электрических зарядов не может продолжаться неограниченное время, так как накапливающийся заряд  $Q_s$  создает электрическое поле, препятствующее дальнейшему выходу из тела заряженных частиц. При достижении некоторой величины  $Q_s = Q_\infty$  заряды практически не выносятся в окружающее пространство. В конце нестационарного процесса тело приобретает (относительно окружающего пространства) плавающий потенциал  $\varphi_\infty$ . Эта предельная ситуация аналогична режиму «холодного хода» ЭГД генератора.

Характерными параметрами ЭГД потока, истекающего из лабораторного источника заряженных частиц, являются: концентрация заряженных частиц (ионов)  $n \sim 10^8 \div 10^{10} \text{ см}^{-3}$ , объемная плотность электрического заряда  $q \sim 1 \text{ ег CGSE см}^{-3}$ , подвижность заряженных частиц  $b \sim 1 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{сек}$ , скорость гидродинамического обдува  $v \sim 5 \cdot 10^3 \div 10^4 \text{ см/сек}$ . Вследствие относительно малой концентрации заряженных частиц (концентрация нейтральной компоненты порядка  $10^{19} \text{ см}^{-3}$ ) можно не учитывать столкновения заряженных частиц между собой. (Их взаимное влияние проявляется лишь через создаваемые ими электрические поля.) При указанных условиях в большинстве случаев несущественны инерционные и диффузионные эффекты [1, 5]. Распределения гидродинамических параметров вследствие слабого ЭГД взаимодействия не возмущаются наличием заряженных частиц. Таким образом, система уравнений, описывающая распределения электрического поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и плотностей электрического тока и заряда  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  и  $q(\mathbf{r}, t)$  в окружающем тело пространстве, имеет следующий вид:

$$(1.1) \quad \mathbf{j} = q\mathbf{V}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{v} + b\mathbf{E} \quad (b = \text{const})$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial q}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} q \quad (\epsilon = \text{const})$$

Здесь  $\mathbf{r}$  и  $t$  — радиус-вектор точки и время,  $\mathbf{v}$  — гидродинамическая скорость,  $\mathbf{V}$  — скорость заряженных частиц,  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость пространства, величины  $\mathbf{v}$  и  $b$  считаются известными.

Изменение заряда  $Q_s(t)$  электрически изолированного тела при истечении из него заряженных частиц определяется следующими соотношениями (являющимися интегральными аналогами уравнений (1.2) для тела):

$$(1.3) \quad \frac{dQ_s}{dt} = -J_s, \quad Q_s = \frac{\epsilon}{4\pi} \oint_{\Sigma} E_s d\Sigma$$

$$J_s = \oint_{\Sigma} j_s d\Sigma, \quad j_s = q_s(v_s + bE_s)$$

В (1.3) величина  $J_s(t)$  является током с поверхности тела, обусловленным выносом заряженных частиц, нижний индекс  $s$  соответствует поверхности тела  $\Sigma$ , величины  $E_s$ ,  $j_s$  и  $v_s$  представляют собой нормальные составляющие соответствующих векторов на поверхности

Из (1.3) находим

$$(1.4) \quad \oint_{\Sigma} F d\Sigma = 0, \quad F = F\left(\frac{\partial E_s}{\partial t}, E_s, \mathbf{r}_s, t\right) = \frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{4\pi q_s b}{\epsilon} E_s + \frac{4\pi q_s v_s}{\epsilon}$$

Из равенства нулю поверхностного интеграла в общем случае не следует условия  $F = 0$ , что связано с зависимостью электрических и гидро-

динамических параметров на  $\Sigma$  от координаты  $r_2$  точек поверхности. Однако для приближенных оценок можно принять, что  $F=0$ , а величины  $E_s$ ,  $q_s$ ,  $v_s$  в полученном таким путем уравнении представляют собой некоторые средние значения на поверхности (зависящие от времени). Соотношение  $F=0$  можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно  $E_s(t)$ . Скорость истечения  $v_s(t)$  определяется динамикой гидродинамического потока, а  $q_s(t)$  следует рассматривать как известную функцию, моделирующую «производительность» источников заряженных частиц внутри тела. Из уравнения  $F=0$  следует, что если функции  $v_s(t)$  и  $q_s(t)$  стремятся к постоянным значениям  $v_{s\infty}$  и  $q_{s\infty}$  при  $t \rightarrow \infty$ , то асимптотическое значение  $E_s(t)$  равно величине  $E_{s\infty} = -v_{s\infty}/b$ , асимптотика определяется экспоненциальной зависимостью и характерное время установления величины  $E_{s\infty}$  равно  $T_1 = \epsilon/4\pi b q_{s\infty}$ . При  $t > T_1$  изменение поля  $E_s$  (а следовательно, и заряда тела  $Q_s \approx \epsilon E_s \Sigma / 4\pi$ ) практически отсутствует.

Однако электрический потенциал тела  $\phi_s(t)$  при  $t > T_1$  может продолжать изменяться. Такая ситуация возникает в том случае, когда заряженные частицы, вышедшие из тела при  $t < T_1$ , в момент  $t = T_1$  находятся достаточно близко от поверхности тела. Их движение вызывает изменение по времени электрического поля в окрестности тела и его потенциала. Эффективная емкость тела  $C = |Q_{s\infty} / \phi_s(t)|$  при этом является монотонно убывающей функцией времени, стремящейся к величине  $Q_{s\infty} / \phi_{s\infty}$ .

Для определения условий, при которых реализуется указанная ситуация, сопоставим характерный размер области, в которой находятся заряженные частицы в момент  $t = T_1$ , с характерным размером тела  $a$ . Если начальный заряд тела равен нулю, то нормальная скорость переднего фронта заряженных частиц в среднем будет равна гидродинамической скорости  $v$ . Поэтому соотношение указанных размеров по порядку величины равно

$$(1.5) \quad \frac{vT_1}{a} = \frac{v\epsilon}{4\pi q_s b a} = \beta^{-1}$$

Параметр  $\beta$  в прикладной электрогазодинамике характеризует эффект изменения траектории заряженных частиц вследствие действия собственных электрических полей [6]. В указанных выше лабораторных условиях ( $a \sim 1$  см) имеем  $\beta \sim 1$ , т. е. заряженные частицы в момент  $t = T_1$  расположены достаточно близко от тела.

Таким образом, при  $\beta \sim 1$  динамика электрической зарядки тела определяется двумя переходными процессами: накоплением на теле заряда  $Q_{s\infty}$  за время  $T_1$  и изменением электрического поля в окружающем тело пространстве (при  $Q_s \approx Q_{s\infty}$ ) в течение времени  $T_2$  (за которое на теле вырабатывается потенциал  $\phi_{s\infty}$ ). В лабораторных условиях  $T_1 \sim 10^{-4} \div 10^{-3}$  сек. Время  $T_2$  должно определяться из решения нестационарной задачи об электрическом поле вне тела. Специальные экспериментальные исследования<sup>1</sup> показали, что время  $T_2$  значительно превышает  $T_1$  и может быть порядка минут.

**2. Сферический источник заряженных частиц.** Рассмотрим электрически изолированное сферическое тело радиуса  $a$ , которое в момент  $t=0$  обладает зарядом  $Q_s(0) = Q_0$ . Сфера является гидродинамическим источником, внутри которого в момент  $t=0$  «включаются» источники ионизации, в результате чего в окружающее пространство начинают истекать заряженные частицы одного знака. (При  $t < 0$  заряженные частицы вне

<sup>1</sup> Эксперименты выполнены В. А. Лихтером и В. И. Шульгиным.

тела отсутствовали.) Гидродинамический и электрический источники обладают сферической симметрией

$$(2.1) \quad \begin{aligned} r \geq a, |t| < \infty: \mathbf{v} = \mathbf{e}_r v, v = v_s(t) a^2 / r^2 \\ r = a, t \geq 0: q_s = q_s(t) \end{aligned}$$

Функции  $v_s(t)$  и  $q_s(t)$  предполагаются заданными.

Вне сферы расположена прозрачная для жидкости сферическая поверхность  $r=L$  ( $L \geq a$ ), находящаяся под фиксированным постоянным потенциалом  $\varphi_L=0$ . Такая поверхность моделирует проводящие объекты вокруг реальных тел (внешние поверхности, окружающие лабораторные источники: облака вокруг летательных аппаратов).

При наличии сферической симметрии из (1.4) следует точное условие  $F=0$ . Используя (1.1), (1.2), (1.4) и (2.1), для определения  $q=q(r, t)$ ,  $\mathbf{E}=\mathbf{e}_r E(r, t)$  и электрического потенциала  $\varphi(r, t)$  в пространстве  $a < r < L$  получаем следующую замкнутую систему уравнений, начальных и граничных условий:

$$(2.2) \quad \frac{\partial q}{\partial t} + (v + bE) \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{4\pi b q^2}{\varepsilon} = 0$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial r^2 E}{\partial r} = \frac{4\pi r^2 q}{\varepsilon}, \quad E = - \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

$$(2.4) \quad a < r < L, \quad t=0: \quad E = E_0(r) = \frac{Q_0}{\varepsilon r^2}, \quad \varphi = \varphi_0(r) = \frac{Q_0}{\varepsilon} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{L} \right)$$

$$(2.5) \quad \begin{aligned} r = a, t \geq 0, V_s(t) = v_s(t) + bE_s(t) > 0: q = q_s(t) \\ \frac{dE_s}{dt} + \frac{4\pi b q_s}{\varepsilon} E_s = - \frac{4\pi q_s v_s}{\varepsilon} \quad (E_s = E(a, t)) \end{aligned}$$

$$(2.6) \quad r = L, t \geq 0: \varphi = 0$$

Граничное условие (2.5) вследствие гиперболического характера уравнения (2.2) относительно  $q$  используется только для тех отрезков времени, когда заряженные частицы выходят с эмиттирующей поверхности сферы, т. е. их скорость  $V_s > 0$ . Если же имеются отрезки времени, для которых  $V_s < 0$ , т. е. ранее вышедшие из сферы заряженные частицы возвращаются на эмиттер (возникают «обратные токи»), то соответствующая величина  $q(a+0, t)$  определяется из решения задачи и в общем случае не совпадает с производительностью источника  $q_s(t)$ .

Получим решение системы (2.2)–(2.6). Уравнения характеристик (траекторий заряженных частиц) и соотношения вдоль них находятся из (2.2)

$$(2.7) \quad \frac{dr}{dt} = v + bE, \quad dq = - \frac{4\pi b q^2}{\varepsilon} dt$$

Путем интегрирования (2.7) получаем

$$(2.8) \quad q(r, t) = \frac{q_s(t_s)}{1 + 4\pi \varepsilon^{-1} b q_s(t_s) (t - t_s)}$$

Здесь  $t_s$  – момент времени, в который характеристика (проходящая через точку  $(r, t)$ ) выходит с поверхности  $r=a$  (фиг. 1),  $t$  – «собственное» время вдоль характеристики. Согласно (2.8) плотность электрического заряда вдоль траектории заряженных частиц непрерывно уменьшается.

Получим выражение для электрического поля. Воспользовавшись интегральным аналогом второго уравнения в (1.2), находим

$$(2.9) \quad \epsilon r^2 E(r, t) = Q_i(r, t)$$

Здесь  $Q_i$  — суммарный электрический заряд, находящийся в момент времени  $t$  внутри объема радиуса  $r$ . Заметим, что так как тело электрически изолировано, то электрический заряд в объеме, который ограничен движущейся сферической «материальной» поверхностью, составленной из одних и тех же заряженных частиц, остается неизменным. Будем следить за заряженными частицами, которые в момент времени  $t$  находятся на поверхности радиуса  $r$ . Эти частицы «стартовали» с поверхности  $r=a$  в момент времени  $t=t_s$ . Поэтому заряд  $Q_i$  равен заряду, находящемуся в момент времени  $t_s$  в объеме  $0 < r < a$ , т. е. заряду сферы  $Q_s(t_s)$ . Последняя же величина согласно второму соотношению (1.3) равна  $\epsilon a^2 E_s(t_s)$ . Следовательно

$$(2.10) \quad E(r, t) = \frac{a^2}{r^2} E_s(t_s)$$

Выражения (2.1) и (2.10) позволяют проинтегрировать уравнение характеристик (2.7). Получаем

$$(2.11) \quad r(t; t_s) = \left\{ a^3 + 3a^2 \left[ \int_{t_s}^t v_s dt + b E_s(t_s) (t - t_s) \right] \right\}^{1/2}$$

Наконец, интегрируя уравнение (2.5), находим

$$(2.12) \quad E_s(t) = \chi(t) \left( \frac{Q_0}{\epsilon a^2} - \frac{4\pi}{\epsilon} \int_0^t \frac{q_s v_s}{\chi} dt \right), \quad Q_s(t) = \epsilon a^2 E_s(t)$$

$$\chi(t) = \exp \left( - \frac{4\pi b}{\epsilon} \int_0^t q_s dt \right)$$

Выражение (2.12) справедливо для интервала времени  $0 < t < \tau$ , определяемого из условия  $V_s(t) > 0$ . При этом условия характеристики «выходят» с поверхности сферы (эмиттера).

Соотношения (2.12), (2.11), (2.8) и (2.10) представляют собой полное решение задачи. Ниже будут рассмотрены различные частные случаи полученного решения.

**3. Накопление электрического заряда на теле.** Пусть электрический заряд в момент  $t=0$  равен нулю ( $Q_0=0$ ), поле гидродинамической скорости стационарно ( $v_s=v_*=\text{const}$ ), а из сферы выносятся положительно заряженные частицы ( $q_s \geq 0$ ). С помощью приведенных в п. 2 формул находим

$$(3.1) \quad E_s(t) = - \frac{v_*}{b} [1 - \chi(t)], \quad V_s(t) = v_* \chi(t)$$

$$(3.2) \quad 0 \leq t \leq t_L: \quad \xi(t) = a^3 + 3a^2 t v_*, \quad t_L = \frac{L^3 - a^3}{3a^2 v_*}$$

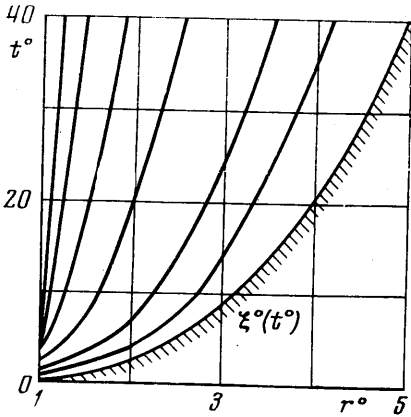
$$(3.3) \quad 0 \leq t \leq t_L: \quad \varphi_s(t) = \int_a^{\xi(t)} E(r, t) dr = -a^4 \int_0^t A(t_s, t) dt_s$$

$$(3.4) \quad t \geq t_L: \quad \varphi_s(t) = \int_a^L E(r, t) dr = -a^4 \int_{t^{\circ 0}}^t A(t_s, t) dt_s$$

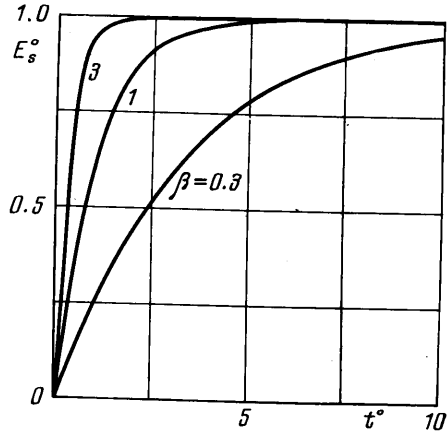
$$A(t_s, t) = \frac{E_s(t_s) \{ (t-t_s) dV_s(t_s)/dt_s - V_s(t_s) \}}{[a^3 + 3a^2(t-t_s)V_s(t_s)]^{1/2}}$$

$$L^3 = a^3 + 3a^2(t-t^{\circ 0}) [v_* + bE_s(t^{\circ 0})]$$

В этих формулах величина  $\xi(t)$  — координата переднего фронта заряженных частиц,  $t_L$  — время достижения передним фронтом поверхности  $r=L$ , а  $t^{\circ 0}$  — время выхода характеристики, которая достигает поверхности  $r=L$  в момент времени  $t$ ,



Фиг. 1



Фиг. 2

с эмиттера  $r=a$ . Из формул (3.1) следует, что скорость заряженных частиц на поверхности сферы всегда положительна, и решение (3.1) справедливо на всем временном интервале. Электрический заряд сферы  $Q_s$  и поле  $E_s$  отрицательны, и их модули являются убывающими функциями времени  $t$ .

Если  $q_s$  не очень быстро убывает при  $t \rightarrow \infty$ , то

$$(3.5) \quad E_s(\infty) = E_\infty = -v_*/b, \quad Q_s(\infty) = Q_\infty = -\epsilon a^2 v_*/b.$$

Предельные значения  $E_\infty$  и  $Q_\infty$  не зависят от величины  $q_s$ , а определяются только скоростью  $v_*$  и подвижностью  $b$  заряженных частиц. Однако производительность источника  $q_s$  влияет на время  $T_1$  установления асимптотических значений (3.5).

Потенциал сферы  $\varphi_s(T_1)$  в случае  $\beta \sim 1$  (см. п. 1), как следует из (3.3) и (3.4), еще далек от своего асимптотического значения при  $t \rightarrow \infty$ : установление асимптотики по потенциалу происходит значительно медленнее, чем по электрическому заряду. Чтобы в этом убедиться, приведем асимптотические оценки интегралов (3.3) и (3.4) при больших  $t$ . В случае  $L \rightarrow \infty$  имеем

$$(3.6) \quad \varphi_s(t) = -\frac{av_*}{b} \left[ 1 - \chi(t) - \frac{3^{2/3}}{2} \left( \frac{v_* t}{a} \right)^{-1/3} + o \left( \frac{v_* t}{a} \right)^{-1/3} \right]$$

Как следует из (3.6), при  $\chi(\infty) = 0$  плавающий потенциал  $\varphi_s(\infty) = \varphi_\infty = -av_*/b$ , а асимптотика определяется зависимостью

$$(3.7) \quad \epsilon = \left| \frac{\varphi_s(t) - \varphi_\infty}{\varphi_\infty} \right| \approx \frac{3^{2/3}}{2} \left( \frac{v_* t}{a} \right)^{-1/3}$$

При указанных в п. 1 характерных величинах значение  $\epsilon = 0.03$  достигается при  $t = T_2 \sim 10 \div 20$  сек ( $a = 2.4$  см).

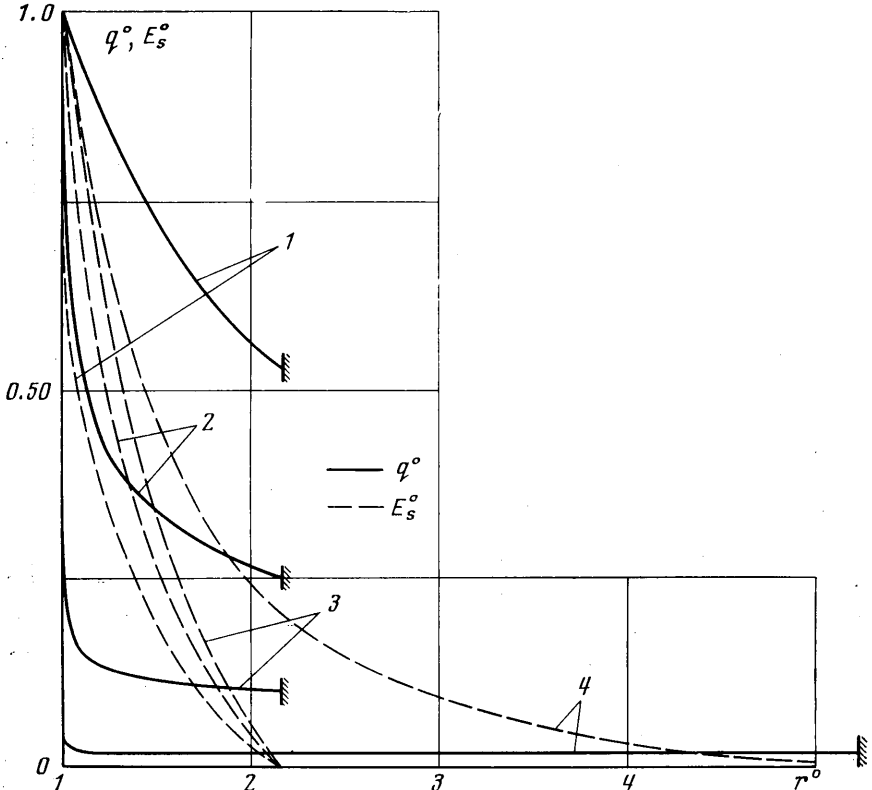
При наличии внешней заземленной поверхности ( $L < \infty$ ) асимптотика имеет следующий вид:

$$(3.8) \quad \varphi_s(t) = -\frac{av_*}{b} \left[ 1 - \frac{1}{l} - \frac{a\lambda(l)}{3v_*t} + o\left(\frac{a}{v_*t}\right) \right]$$

$$l = \frac{L}{a}, \quad \chi(t) = o\left(\frac{a}{v_*t}\right)$$

Согласно (3.8)  $\varphi_\infty = -av_*(l-1)/bl$ , асимптотика определяется зависимостью  $\varepsilon \sim \lambda(l)a/v_*t$  и, следовательно, время  $T_2$  выхода на значение  $\varphi_\infty$  с увеличением  $l$  возрастает от нуля при  $l=1$  до бесконечности при  $l=\infty$ .

На фиг. 1 показаны траектории заряженных частиц в плоскости  $t^\circ = tv_*/a$ ,  $r^\circ = r/a$  при  $q_s = q_* = \text{const}$ ,  $\beta = 4\pi q_* ba / \varepsilon v_* = 1$ ,  $L = \infty$ . Передний фронт заряженных



Фиг. 3

частиц  $\xi(t)$ , движущийся с гидродинамической скоростью, отделяет область с  $q=0$  от области, где  $q \neq 0$ . На  $\xi(t)$  при непрерывном электрическом поле ( $E(\xi(t), t) = 0$ ) терпит разрыв объемная плотность электрического заряда, однако поверхностного заряда при этом не возникает.

Изменение электрического поля на сфере  $E_s^0 = -E_s(t)b/v_*$ , пропорционального заряду  $Q_s(t)$ , при различных  $\beta$  представлено на фиг. 2. С увеличением  $\beta$  величина  $E_s^0$  все быстрее выходит на асимптотическое значение  $E^0 = 1$ , причем  $T_1^0 = T_1 v_*/a \sim 1$ .

Распределения заряда  $q^0 = q/q_*$  и поля  $E^0 = -E(r^\circ, t^\circ)b/v_*$  в пространстве  $1 < r^\circ < \xi^\circ(t^\circ)$  при  $L = \infty$  и различных  $t^\circ$  и  $\beta$  иллюстрируются зависимостями на фиг. 3 (здесь кривые 1-3 нанесены для значений  $t^\circ = 3$ ,  $\beta = 0.3, 1, 3$ , а кривая 4 для  $t^\circ = 50$ ,  $\beta = 1$ ). В случае достаточно больших  $t^\circ$  электрический заряд  $q^0$  во всем пространстве, за исключением узкого слоя вблизи эмиттера  $r^\circ = 1$ , малая величина порядка  $1/\beta t^\circ$ .

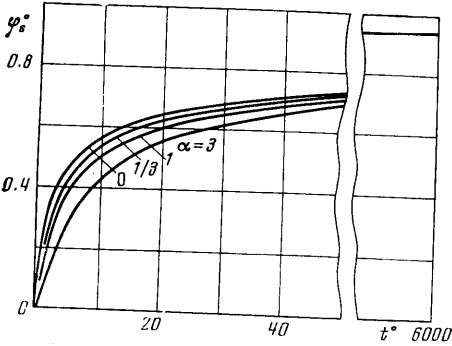
На фиг. 4 показана зависимость  $\varphi_s^0 = -\varphi_s b/v_* a$  от  $t^\circ$ , соответствующая  $L = \infty$  и изменению производительности источника по закону  $q_s(t) = \varepsilon v_* / [4\pi b a (t^\circ + \alpha)]$ . В этом случае интегралы (3.3), (3.4) берутся в квадратурах. Зависимость  $\varphi_s^0$  от параметра  $\alpha$  проявляется лишь при  $t^\circ \lesssim 100$  (с уменьшением  $\alpha$  возрастает выносимый в пространство электрический заряд, становятся большими пространственные

ЭГД эффекты и потенциал  $\varphi_s^\circ$  возрастает быстрее). Однако при  $t^\circ \gg 10^3$  изменение потенциала  $\varphi_s(t)$  практически не зависит от  $\alpha$  и определяется асимптотикой (3.6).

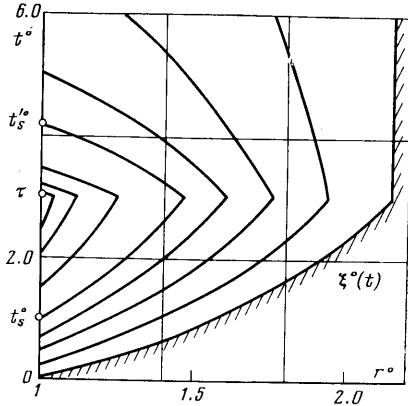
**4. Эффект «скважности».** В практических ситуациях заряженные частицы могут истекать из источника (например, реактивного двигателя) не непрерывно, а через определенные промежутки времени (эффект скважности). Моделирование таких условий проводится заданием следующих граничных условий:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} t &\in \{(0, t^*), (mt^*, (m+1)t^*), \dots, (nmt^*, (nm+1)t^*) \dots\} : q_s = q_* \\ t &\in \{t^*, mt^*, ((m+1)t^*, 2mt^*), \dots, ((nm+1)t^*, (n+1)mt^*), \dots\} : q_s = 0 \\ (q_*, v_s &= v_*, t^*, m = \text{const}, n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Величина  $t^*$  является временем подачи заряженных частиц, параметр  $P = m - 1$  характеризует скважность режима. Решение задачи дается формулами, полученными в п. 2. В потоке имеются области без электрического заряда. Однако вследствие



Фиг. 4



Фиг. 5

действия расталкивающих электростатических сил эти области постепенно сужаются и на больших расстояниях (но меньших  $\xi(t)$ ) электрический заряд заполняет пространство практически непрерывно. Изменение  $E_s(t)$  характеризуется точками разрыва производной. Предельные значения  $E_\infty, Q_\infty$  и  $\varphi_\infty$  совпадают с аналогичными величинами для режима с непрерывной подачей заряженных частиц. Время  $T_1$  выхода на значения  $E_\infty, Q_\infty$  при наличии скважности возрастает по сравнению со случаем  $q_s = \text{const}$ . Однако время  $T_2$  при выбранных параметрах практически не отличается от указанного в п. 3.

**5. Компенсация электрического заряда.** Пусть на теле в момент  $t=0$  сосредоточен заряд  $Q_0 > 0$ . Его можно устранить с помощью специальных устройств – активных компенсаторов, которые «выбрасывают» в окружающее пространство положительно заряженные частицы, а остающиеся на теле отрицательные частицы компенсируют заряд  $Q_0$ .

Полученное в п. 2 общее решение позволяет определить необходимое время  $t_Q$  работы активного компенсатора, за которое заряд тела обращается в нуль ( $Q_s(t_Q) = 0$ ). В момент  $t = t_Q$  компенсатор отключается ( $q_s = 0$  при  $t > t_Q$ ). Однако  $\varphi_s(t_Q) \neq 0$ . Предельное значение  $\varphi_s(\infty) = 0$  устанавливается тогда, когда заряженные частицы, которые вышли с эмиттера в момент  $t = t_Q$ , окажутся достаточно далеко от тела. Соответствующее время  $T_2 \gg t_Q$ . Величина  $t_Q$  определяется функцией

$$(5.1) \quad t_Q = \frac{\epsilon}{4\pi b q_*} \ln \left( 1 + \frac{Q_0 b}{\epsilon v_* a^2} \right) \quad (v_s = v_*; 0 < t < t_Q; q_s = q_*)$$

Асимптотика выхода на значение  $\varphi_s(\infty) = 0$  определяется зависимостью  $\varphi_s b / av_* \sim (tv_* / a)^{-1/2}$ .

**6. Возникновение обратных токов.** При  $v_s = v_s(t)$  заряженные частицы могут изменять направление движения, т. е. двигаться вначале от поверхности сферы, а затем к поверхности. Точки на траекториях заряженных частиц, в которых скорость частиц обращается в нуль, находятся из условия  $V = v(r, t) + bE(r, t) = 0$ .

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть  $Q_0 = 0, q_s = q_* = \text{const}, L = \infty, v_s = v_* = \text{const}$  при  $0 < t < \tau$  и  $v_s = 0$  при  $t > \tau$ . В момент  $t = \tau$  скорость  $V$  скачком изменяется от  $V(r, \tau - 0) > 0$  до  $V(r, \tau + 0) = bE(r, \tau) < 0$  и, следовательно, частицы, вышедшие с поверхности при  $0 < t < \tau$ , начинают двигаться по направлению к поверхности при  $t > \tau$ .



Время  $t_s'(t_s' > \tau)$  возвращения характеристики  $r(t; t_s)$  на поверхность, электрическое поле и электрический заряд в точке  $(a, t_s')$  определяются формулами

$$(6.1) \quad t_s' = t_s - \frac{(\tau - t_s)v_*}{bE_s(t_s)} = t_s + \frac{\tau - t_s}{1 - \exp(-4\pi\epsilon^{-1}bq_*t_s)}$$

$$E_s(t_s') = E(a, t_s') = E_s(t_s)$$

$$q_s(t_s') = q(a, t_s') = \frac{q_*}{1 + 4\pi\epsilon^{-1}bq_*(t_s' - t_s)}$$

Функции  $r(t; t_s)$ ,  $E_s(t)$ ,  $q_s(t)$  при  $t = \tau$  имеют разрыв своих производных.

Траектории заряженных частиц для случая  $\beta = 1$  показаны на фиг. 5.

7. Истечение нескольких сортов заряженных частиц. Полученные выше результаты можно обобщить на случай истечения из сферы  $N$  сортов заряженных частиц. Пусть сорт  $k$  характеризуется величинами  $q_k(r, t)$ ,  $q_k(a, t) = q_{ks}(t)$ ,  $b_k = \text{const}$ . Для определения функций  $q_k(r, t)$  и  $E(r, t)$  имеем уравнения

$$(7.1) \quad \frac{\partial q_k}{\partial t} + (v + b_k E) \frac{\partial q_k}{\partial r} + \frac{4\pi b_k q_k}{\epsilon} q_\Sigma = 0$$

$$(7.2) \quad \frac{\partial r^2 E}{\partial r} = \frac{4\pi r^2}{\epsilon} q_\Sigma$$

$$(7.3) \quad E(a, t) = E_s(t) = g(t) \left[ \frac{Q_0}{\epsilon a^2} - \int_0^t \frac{m(t)}{g(t)} dt \right]$$

$$q_\Sigma = \sum_{\alpha=1}^N q_\alpha, \quad m(t) = \frac{4\pi v_s}{\epsilon} \sum_{\alpha=1}^N q_{\alpha s}, \quad g(t) = \exp \left[ -\frac{4\pi}{\epsilon} \int_0^t \left( \sum_{\alpha=1}^N b_\alpha q_{\alpha s} \right) dt \right]$$

Условие (7.3), являющееся аналогом (2.5), используется лишь на отрезке времени  $(0, t)$ , когда на эмиттер не приходят обратные токи. Если же имеются обратные токи, то необходима модификация (7.3), аналогичная использованной в п. 6.

Из (7.1) – (7.2) находим

$$(7.4) \quad \frac{dr_k}{dt} = v + b_k E, \quad dq_k = -4\pi\epsilon^{-1}b_k q_k q_\Sigma dt$$

$$(7.5) \quad E(r, t) = \frac{1}{r^2 \epsilon} \left[ Q_0 - \sum_{\alpha=1}^N \int_0^{t_{\alpha s}} J_{\alpha s} dt \right]$$

В этих формулах  $r_k(t)$  – уравнение характеристик для  $k$ -й компоненты,  $dq_k$  – изменение объемной плотности заряда  $k$ -й компоненты вдоль соответствующих характеристик,  $t_{\alpha s}$  – время старта заряженных частиц сорта  $\alpha$  с эмиттера, которые в момент  $t$  располагаются на сфере радиуса  $r$ ,  $J_{\alpha s}$  – ток компоненты  $\alpha$  с эмиттера. Модификация формулы (7.5) в случае, когда на сфере радиуса  $r$  отсутствуют частицы каких-либо сортов, не вызывает затруднений.

К сожалению, дальнейшее упрощение формул (7.4) и (7.5) не представляется возможным. Поэтому для решения конкретных задач необходимо использовать численный метод характеристик.

Однако в некоторых случаях реализация решения не вызывает затруднений. Рассмотрим истечение из сферы  $N$  заряженных компонент при условиях  $|q_{1s}| \ll |q_{is}|$ ,  $\gamma = 2, 3, \dots, N$ . Тогда электрическое поле в основном будет определяться зарядом первой компоненты, и движение компонент  $\gamma$  в первом приближении будет происходить в известном электрическом поле, которое определяется формулами п. 2. Из (7.4) находим

$$(7.6) \quad \frac{dr_\gamma}{dt} = v(r, t) + b_\gamma E(r, t) = B(r, t)$$

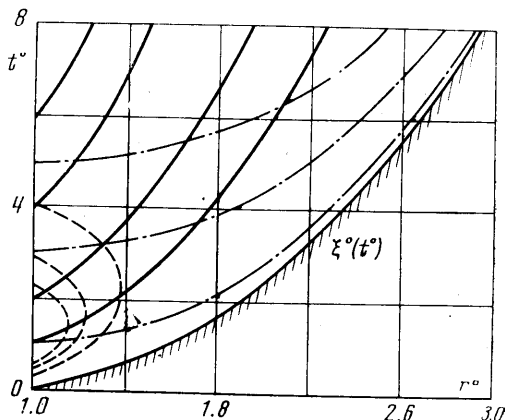
$$(7.7) \quad q_\gamma = q_{\gamma s}(t_{\gamma s}) \exp \left[ -\frac{4\pi b_\gamma}{\varepsilon} \int_{t_{\gamma s}}^t q_1 dt \right]$$

Функции  $B(r, t)$  и  $q_1(r, t)$  считаются известными, из (7.6) определяют траектории заряженных частиц сорта  $\gamma$ , из (7.7) находится изменение  $q_\gamma$  вдоль этих траекторий.

В качестве примера рассмотрим истечение из сферы трех компонент в случае  $Q_0=0, L=\infty, v_s=v_*=\text{const}$ . Компонента 1 является «основной», состоит из положительно заряженных частиц ( $b_1>0$ ), и ее концентрация на эмиттере изменяется согласно зависимости

$$q_{1s}(t) = \frac{\varepsilon v_*}{4\pi b a (t^\circ + \alpha)},$$

$$t^\circ = \frac{t v_*}{a}$$



Фиг. 6

Концентрации компонент 2 и 3 на эмиттере однородны по времени, но по модулю значительно меньше концентрации сорта 1. Компонента 2 положительно заряжена, и  $b_2=2b_1$ . Компонента 3 заряжена отрицательно ( $b_3<0$ ) и  $|b_3|=b_1$ . На фиг. 6 представлены траектории заряженных частиц. Характеристики компоненты 1 (сплошные линии) аналогичны построенным на фиг. 1. Заряженные частицы сорта 2 (пунктирные кривые) вначале уходят с эмиттера, а затем возвращаются на него (эффект обратных токов). Такой характер движения заряженных частиц определяется условием  $b_2>b_1$  и наличием отрицательного электрического поля, которое генерируется компонентой 1. Траектории частиц сорта 3 (штрихпунктирные кривые), наоборот, догоняют передний фронт заряженной области  $\xi(t)$ . В рамках рассматриваемого приближения на фронте  $\xi(t)$  при  $|\xi| \gg 1$  возникает «слабый» поверхностный заряд компоненты 3.

Поступила 19 IV 1977

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вагажин А. Б., Лихтер В. А., Шутьгин В. И. Исследование электрогазодинамической струи за источником заряженных частиц. Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 15.
2. Ушаков В. В., Франчук Г. М. Экспериментальное исследование коронного разряда с острия в воздушном и аэрозольном потоках. В сб.: «Аэродинамика». Вып. 8. Ч. 1. Киев, 1973.
3. Имянитов И. М. Электризация самолетов в облаках и осадках. Л., Гидрометеиздат, 1970.
4. Вагажин А. Б., Казаков А. Ф., Лихтер В. А., Межлумян Р. А., Некрасов И. П., Стрекалов А. П., Трунов О. К., Шутьгин В. М. Исследование электрических характеристик реактивных струй, истекающих из двигателей самолетов. Тр. ЦИАМ, 1974, № 628.
5. Вагажин А. Б. Сглаживание разрывов электрического заряда в электрогидродинамике в результате диффузионных процессов. Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 1.
6. Вагажин А. Б., Грабовский В. И. Распространение униполярно заряженных струй в гидродинамических потоках. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.