**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1977**

УДК 532.582

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ МОМЕНТ, ДЕЙСТВУЮЩИЙ СО СТОРОНЫ ЛИНЕЙНОГО ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОТОКА ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ НА ДВИЖУЩЕЕСЯ ДЕФОРМИРУЮЩЕЕСЯ ТЕЛО

С. Д. ВИЛЬХОВЧЕНКО

(Москва)

Решение задачи о движении твердого тела в поступательном потоке изложено в [1]. В задаче о движении тела с деформирующейся поверхностью в потенциальном потоке определенного класса можно воспользоваться следующим приближенным методом. Под внешним к данному телу потоком будем понимать разность между результирующим потоком и потоком, связанным с присутствием тела в потоке, с потенциалом, регулярным вне поверхности тела. Для безграничной задачи понятия внешнего и невозмущенного (поток до внесения в него тела) потоков совпадают. Рассмотрим класс внешних потоков, для которых ряд Тейлора поля скоростей сходится в некотором шаре, содержащем тело. Потоки, описываемые частичными суммами S_1, S_2, ... этого ряда, аппроксимируют с возрастающей точностью внешний поток в шаре. Точное решение задачи о движении тела в безграничном потоке S_n является приближенным решением исходной задачи (не обязательно безграничной). Поток S_1 поступательный. Поток S_2 назовем линейным, поскольку это линейная функция радиус-вектора. Очевидно, S_2 является самым простым непоступательным потоком S_n, $n \geqslant 2$.

По-видимому, [2] — первая работа, в которой рассмотрен пространственный линейный поток. В [3] получено выражение для силы, действующей на деформирующееся тело со стороны линейного потока. В [4] также в приближении линейного потока решалась задача об определении гидродинамического воздействия на твердое тело, однако в выражении для момента получены не все члены, соответствующие точному решению. С целью получить более точное выражение для момента, справедливое и для тела с деформирующейся поверхностью, в настоящей работе получено выражение для момента, действующего на произвольно движущееся тело со стороны линейного потенциального потока. Результат представлен через локальные характеристики внешнего потока и характеристики формы поверхности тела. Исследованы свойства характеристик формы для тела, поверхность которого имеет плоскости симметрии и тела вращения. Проведено сравнение полученного решения с решениями для поступательного потока и [4].

1. Пусть $\mathbf{v}$ — поле скоростей внешнего потока относительно инерциальной системы отсчета. Введем подвижную декартову систему координат с радиус-вектором $\mathbf{x}$, начало которой помещается в центр указанного ряда Тейлора, а движение задается поступательной $\mathbf{V}_0$ и угловой $\mathbf{\Omega}$ скоростями. Справедливо выражение

$$S_2(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_0 + (\mathbf{x} \cdot \nabla)_0 \mathbf{v} \tag{1.1}$$

где t — время, нуль в индексе указывает, что значение поля $\mathbf{v}$ или его производной берется в начале подвижной системы координат. В новой системе отсчета, движущейся поступательно относительно исходной со скоростью $\mathbf{v}_0$, поступательная скорость подвижной системы координат равна $\mathbf{U} = \mathbf{V}_0 - \mathbf{v}_0$, а поток S_2 является линейным однородным. Его потенциал W

можно представить в виде

$$(1.2)\qquad W=\frac{1}{2}u_{ij}\pi_{ij},\qquad \pi_{ij}=x_ix_j-\delta_{ij}x_\alpha^2,\qquad u_{ij}(t)=\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(0,t)$$

Здесь и ниже используется запись суммирования по дважды повторяющимся индексам, пробегающим значения 1, 2, 3, а число α выбирается среди этих значений произвольно, δ_{ij} — символ Кронекера. Потенциал $\Phi=W+\varphi$ результирующего поля скоростей в предположении его непрерывности можно представить в виде

$$(1.3)\qquad \Phi=U_j\varphi_j+\Omega_j\varphi_{j+3}+\varphi_++{}^1/_2u_{jk}(\pi_{jk}-\varphi_{jk})$$

Потенциалы φ_j, φ_{j+3}, φ_+, φ_{jk} стремятся к нулю при $|\mathbf{x}|=\eta\to\infty$, регулярны вне поверхности тела S и удовлетворяют на ней граничным условиям

$$(1.4)\qquad \frac{\partial\varphi_j}{\partial\nu}=\nu_j,\qquad \frac{\partial\varphi_{j+3}}{\partial\nu}=(\mathbf{x}\times\boldsymbol{\nu})_j,\qquad \frac{\partial\varphi_{jk}}{\partial\nu}=\frac{\partial\pi_{jk}}{\partial\nu},\qquad \frac{\partial\varphi_+}{\partial\nu}=V_+$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали к S, $V_+\boldsymbol{\nu}$ — скорость перемещения S относительно подвижной системы координат [1]. Очевидно

$$(1.5)\qquad \pi_{\alpha\alpha}=\varphi_{\alpha\alpha}=0$$

2. Момент $\mathbf{M}$ гидродинамических сил относительно начала подвижной системы координат определяется выражением [1]

$$(2.1)\qquad \begin{gathered}\frac{\mathbf{M}}{\rho}=\tau\mathbf{c}\times\frac{d\mathbf{v}_0}{dt}-\left(\frac{\delta\mathbf{N}}{\delta t}+\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{N}+\mathbf{U}\times\mathbf{I}\right)+\mathbf{P}\\ \mathbf{I}=-\int\limits_s\Phi\boldsymbol{\nu}\,ds,\qquad \mathbf{N}=-\int\limits_s\Phi\mathbf{x}\times\boldsymbol{\nu}\,ds,\qquad \mathbf{P}=-\int\limits_\Sigma\frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathbf{x}\times\nabla\Phi\,ds\end{gathered}$$

Здесь ρ — плотность жидкости, Σ — сфера с центром в начале подвижной системы координат, охватывающая тело. Производные d/dt и $\delta/\delta t$ соответственно определяют изменение относительно исходной инерциальной системы отсчета и подвижной системы координат, в начале которой помещается центр сферы Σ, τ — объем тела, $\mathbf{c}$ — центр объема тела. Для $\mathbf{I}$ и $\mathbf{N}$ можно получить следующие выражения:

$$(2.2)\qquad \begin{gathered}I_i=U_j\lambda_{ij}+\Omega_j\lambda_{ij+3}+\mu_i-{}^1/_2u_{jk}\lambda_{ijk}\\ N_i=U_j\lambda_{i+3j}+\Omega_j\lambda_{i+3j+3}+\mu_{i+3}-{}^1/_2u_{jk}\lambda_{i+3jk}\end{gathered}$$

$$\lambda_{pq}=-\int\limits_s\varphi_p\frac{\partial\varphi_q}{\partial\nu}ds,\qquad \mu_p=-\int\limits_s\varphi_pV_+\,ds,\qquad \lambda_{pjk}=\int\limits_s(\pi_{jk}-\varphi_{jk})\frac{\partial\varphi_p}{\partial\nu}ds$$

Здесь и далее $p, q=1, 2, \ldots, 6$.

Выведем аналогичную формулу для $\mathbf{P}$. Разложим φ в ряд по сферическим функциям в бесконечно удаленной области [1]

$$(2.3)\qquad \varphi=\frac{\pi_0}{r}+\frac{\pi_1}{r^3}+\ldots+\frac{\pi_n}{r^{2n+1}}+\ldots$$

где π_n — однородный гармонический полином степени n, и выберем сферу Σ, целиком лежащую в области сходимости этого ряда. Используя (2.3), можно выделить в выражении для $\mathbf{P}$ члены, не зависящие от радиуса сферы Σ, а затем преобразовать их, используя аппарат поверхностных сферических функций [5]. В результате получится

$$P_i=\frac{4\pi}{3}\varepsilon_{ijk}u_{jl}a_{kl} \tag{2.4}$$

где ε_{ijk} — компоненты тензора Леви — Чивита, а коэффициенты a_{kl} определяют полином $\pi_2={}^1/_2 a_{kl}\pi_{kl}$.

Используя выражения a_{kl} через граничные значения φ на S, получаем окончательно

$$\begin{gathered}P_i=\varepsilon_{ijk}u_{jl}(U_m\lambda_{mkl}+\Omega_m\lambda_{m+3kl}+\mu_{kl}-{}^1/_2 u_{mn}A_{mnkl})\\ \mu_{kl}=\int\limits_s(\pi_{kl}-\varphi_{kl})V_+\,ds,\qquad A_{mnkl}=\int\limits_s(\pi_{kl}-\varphi_{kl})\frac{\partial\pi_{mn}}{\partial\nu}\,ds\end{gathered} \tag{2.5}$$

Выпишем еще в обозначениях настоящей работы выражение для гидродинамической силы в линейном потоке [3]

$$\frac{F}{\rho}=-\left(\frac{\delta I_i}{\delta t}+\varepsilon_{ijk}U_jI_k\right)+\tau\frac{dv_{0i}}{dt}-4\pi u_{ij}a_j \tag{2.6}$$

коэффициенты a_j определяют полином $\pi_1=a_jx_j$. Выражая a_j через граничные условия, получаем окончательно

$$\frac{\mathbf{F}}{\rho}=\tau\frac{d\mathbf{v}_0}{dt}-\left(\frac{\delta\mathbf{I}}{\delta t}+\mathbf{U}\times\mathbf{I}\right)-\left(\left[(\mathbf{I}+\tau(\mathbf{U}+\mathbf{\Omega}\times\mathbf{c})+\frac{\delta\tau\mathbf{c}}{\delta t}\right]\cdot\nabla\right)_0\mathbf{v} \tag{2.7}$$

Характеристики формы поверхности обладают следующими свойствами симметрии относительно индексов:

$$\begin{gathered}\lambda_{pq}=\lambda_{qp},\ \lambda_{pjk}=\lambda_{pkj},\ \mu_{kj}=\mu_{jk}\\ A_{mnkj}=A_{nmkj}=A_{kjmn},\ \mu_{\alpha\alpha}=\lambda_{p\alpha\alpha}=A_{mn\alpha\alpha}=0\end{gathered} \tag{2.8}$$

Заметим, что λ_{pq} являются коэффициентами присоединенных масс, отнесенных к плотности жидкости.

Отметим различия решений для линейного и поступательного потоков. Во-первых, изменился вид формулы для момента, а именно добавился член $\mathbf{P}$, и появились дополнительные члены в формулах для $\mathbf{I}$ и $\mathbf{N}$, обусловленные неоднородностью потоков. Во-вторых, увеличилось как число характеристик потока, так и число характеристик формы поверхности. Число характеристик потока увеличивается на число компонент u_{ij}. В силу потенциальности и соленоидальности потока из девяти компонент u_{ij} линейно независимыми будут только пять. Число характеристик формы возрастает с 27 до 77 для тела с деформирующейся поверхностью и с 21 до 66 для твердого тела. Для тела с деформирующейся поверхностью характеристики формы, вообще говоря, зависят от времени. Для твердого тела обращаются в нуль характеристики формы, обозначенные буквой μ, а остальные не зависят от времени и являются постоянными для данного тела.

3. Исследуем свойства характеристик формы тела с плоскостями симметрии и тела вращения. Пусть поверхность тела симметрична относительно плоскости, точки Q и Q' лежат на поверхности тела и симметричны относительно этой плоскости. Выпишем два соотношения

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right)_{Q'}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right)_Q,\qquad\psi(Q')=\psi(Q) \tag{3.1}$$

$$(3.2) \qquad \left(\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right)_{Q'} = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right)_{Q}, \qquad \psi(Q') = -\psi(Q)$$

и примем плоскость симметрии за координатную плоскость $x_j x_k$, а значения индексов j и k, фиксирующих эту плоскость, назовем фиксирующими.

Методами [1] можно получить следующие свойства потенциалов: φ_+ удовлетворяет соотношению (3.1); φ_m удовлетворяет соотношению (3.1), если значение m является фиксирующим, и (3.2) в противоположном случае; φ_{m+3} удовлетворяет соотношению (3.2), если значение m является фиксирующим, и (3.1) в противоположном случае; φ_{mn} удовлетворяет соотношению (3.2), если ровно одно из значений m и n является фиксирующим, и (3.1) в противоположном случае. Для тела вращения направим ось x_α по оси симметрии и введем цилиндрические координаты x, ρ, θ, связанные с декартовыми соотношениями

$$(3.3) \qquad x_\alpha = x, \; x_\beta = \rho\cos\theta, \; x_\gamma = \rho\sin\theta$$

где последовательность чисел α, β, γ получена из последовательности 1, 2, 3 четной перестановкой. Методами [6] можно получить следующие свойства потенциалов:

φ_+ и φ_γ не зависят от полярного угла θ, а $\varphi_{\alpha+3}=0$; пары φ_β и φ_γ, $\varphi_{\beta+3}$ и $\varphi_{\gamma+3}$, $\varphi_{\alpha\beta}$ и $\varphi_{\alpha\gamma}$, а также их производные по нормали на S удовлетворяют системе

$$(3.4) \qquad \psi_2(x, \rho, \theta) = \psi_1(x, \rho, \theta-\pi/2), \; \psi_1(x, \rho, \theta) = -\psi_2(x, \rho, \theta-\pi/2)$$

где φ_β, $\varphi_{\beta+3}$ и $\varphi_{\alpha\beta}$ соответствуют ψ_1, а φ_γ, $\varphi_{\alpha\gamma}$ и $\varphi_{\gamma+3}$ соответствуют ψ_2; $\varphi_{\beta\beta}$ и $\varphi_{\gamma\gamma}$, а также их производные по нормали на S удовлетворяют системе

$$(3.5) \qquad \varphi_{\gamma\gamma}(x, \rho, \theta) = \varphi_{\beta\beta}\left(x, \rho, \theta - \frac{\pi}{2}\right), \qquad \varphi_{\beta\beta}(x, \rho, \theta) = \varphi_{\gamma\gamma}\left(x, \rho, \theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

Потенциал π_{mn}, а следовательно, и $\varphi_{mn} - \pi_{mn}$ обладают всеми свойствами потенциала φ_{mn}. Из симметрии потенциалов следуют свойства характеристик формы симметричного тела. Часть характеристик формы обращается в нуль, а для тела вращения существуют равные по абсолютной величине пары характеристик. Результаты представлены ниже и в таблице.

i	j	λ_{ij}	$\lambda_{i+3\, j+3}$	μ_{ij}	$\lambda_{j\, i+3}$, $\lambda_{i\, j+3}$
α	α		4		1
α	β	2	2	2	1
α	γ	1	1	1	2
β	β	4+	4+	4+	1
β	γ	1	1	1	3,4−
γ	γ	4+	4+	4+	1

i	μ_i	μ_{i+3}
α	3	1
β	2	1
γ	1	2

Различным типам симметрии соответствуют различные цифры. Если поверхность тела симметрична только относительно одной плоскости симметрии, которую примем за координатную плоскость $x_\alpha x_\beta$, то обращающимся в нуль характеристикам соответствует цифра 1. Если поверхность тела симметрична относительно плоскостей $x_\alpha x_\beta$ и $x_\alpha x_\gamma$, то появляются дополнительные (по сравнению с предыдущим случаем) характеристики, обращающиеся в нуль, которым соответствует цифра 2. Если S симметрична относительно трех координатных плоскостей, то дополнительным характеристикам, обращающимся в нуль (по сравнению с предыдущим случаем), соответ-

j	i	kl: $\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\beta\beta$	$\beta\gamma$	$\gamma\gamma$
				λ_{ikl}		
	α	2	1	3.4+	1	3.4+
	β	3.4×	1	2	1	2
	γ	1	3.4×	1	2	1
				λ_{i+3kl}		
	α	1	2	1	4	1
	β	1	4–	1	2	1
	γ	4–	1	2	1	2
				A_{ijkl}		
α	β	4+	1	2	1	2
α	γ	1	4+	1	2	1
β	β	2	1	4×	1	
β	γ	1	2	1		1
γ	γ	2	1		1	4×

ствует цифра 3. Для тела вращения с осью симметрии x_α в таблицах приняты следующие обозначения. Дополнительным характеристикам, обращающимся в нуль (по сравнению с телом, симметричным только относительно плоскостей $x_\alpha x_\beta$ и $x_\alpha x_\gamma$), соответствует цифра 4. Если две характеристики одного типа равны, то в соответствующих местах таблицы ставятся символы 4+ или 4×, а если противоположные значения – то 4–.

4. Сравнение с результатом работы [4] показывает следующие различия. Во-первых, в настоящей работе допускается деформация поверхности тела. С деформацией связаны по одному члену в формулах для I, N и P (члены с μ_p и μ_{kl}). Во-вторых, в случае твердого тела эти же формулы содержат все члены, полученные в [4], и еще имеются один дополнительный член в формуле для N и два дополнительных члена в формуле для P (члены, содержащие λ_{i+3kl} и A_{mnkl}). Дополнительные члены пропорциональны R^5, где R – размер тела. Заметим, что с исчерпывающей полнотой член, пропорциональный R^5 в выражении для момента определяется лишь при решении задачи с потоком S_3. Единственными отличными от коэффициентов присоединенных масс характеристиками формы в [4] являются Γ_{ijk}, которым соответствуют λ_{ijk} настоящей работы. Характеристики λ_{ijk}, однако, обладают тем преимуществом, что они симметричны по последним двум индексам и удовлетворяют соотношению $\lambda_{i\alpha\alpha}\equiv 0$. Это позволяет уменьшить число независимых характеристик этого типа.

В рамках полученного более точного приближения перестает быть справедливым вывод [4] о том, что неоднородность потока не оказывает влияния на вращение тела, имеющего три взаимно ортогональные плоскости симметрии. Более того, это не так и для тела с более высокой степенью симметрии – тела вращения с плоскостью симметрии, ортогональной оси симметрии тела. Например, при обтекании тела установившимся потоком, у которого из компонент u_{ij} отличны от нуля только $u_{\alpha\beta}$ и $u_{\beta\gamma}$, неоднородность потока приводит к появлению дополнительной составляющей момента на ось x_β, равной $\rho u_{\alpha\beta} u_{\beta\gamma}(A_{\beta\gamma\beta\gamma}-A_{\alpha\beta\alpha\beta})$. Если пренебречь вкладом в момент, создаваемым характеристиками μ_{kl} и A_{mnkl} (результат работы [4] является частным случаем такого приближения), то для определения момента достаточно вычислить на S лишь значения потенциалов φ_p. При определении момента в приближении линейного потока необходимо наряду со значениями на S шести потенциалов φ_p вычислить еще значения пяти потенциалов φ_{ij}, что является более трудоемкой задачей.

Автор благодарен Ю. Л. Якимову, осуществлявшему научное руководство, и Г. Ю. Степанову, сделавшему ряд замечаний.

Поступила 22 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 2. М., «Наука», 1973.
2. *Якимов Ю. Л.* Силы, действующие на малую сферу в произвольном потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Науч. тр. Ин-та механ. МГУ, 1971, № 9.
3. *Якимов Ю. Л.* Силы, действующие на малое тело в произвольном потоке несжимаемой жидкости, и уравнения движения двухфазной среды. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, § 3.
4. *Воинов В. В., Воинов О. В., Петров А. Г.* Гидродинамическое взаимодействие тел в идеальной несжимаемой жидкости и их движение в неоднородных потоках. ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
5. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. 3, ч. 2. М., «Наука», 1969.
6. *Седов Л. И.* О неустановившемся движении внутри жидкости тела вращения. Тр. ЦАГИ, 1940, вып. 515.