

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО РЕЖИМА КОНВЕКЦИИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ

В. Л. ГРЯЗНОВ, В. И. ПОЛЕЖАЕВ

(Москва)

Изложен подход к численному моделированию турбулентных режимов естественной конвекции на основе двумерных нестационарных уравнений Навье – Стокса без использования дополнительной эмпирической информации.

Несмотря на определенные успехи в области численных методов, разнообразные вычислительные и методические трудности расчета турбулентных режимов, исходя из уравнений Навье – Стокса, все еще кажутся непреодолимыми, в особенности если иметь в виду развитые турбулентные течения при наличии твердых поверхностей. Некоторое продвижение в этом направлении имеется лишь для классической задачи об однородной изотропной турбулентности [1]. Тем не менее постановка такой задачи назрела благодаря развитию вычислительной и экспериментальной техники и для некоторого специального класса течений у твердой поверхности можно попытаться предпринять первые шаги в этом направлении, чтобы выяснить реально существующие трудности и возможности.

Наиболее подходят для этой цели низкоскоростные низкочастотные турбулентные течения в замкнутых областях, характеризующиеся сравнительно низким числом Рейнольдса, отнесенным к микромасштабу (порядка десяти), и отсутствием возмущений извне, имеющих обычно случайный характер. Из этого класса течений наименьшим влиянием трехмерности, по-видимому, обладает конвекция в вертикальном слое, подогреваемом сбоку, сравнительно хорошо изученная экспериментально [2–5]. Решение двумерных уравнений Навье – Стокса для этой задачи методом сеток начато более десяти лет назад (библиография дана, например, в [6, 7]). В последние годы предпринимались отдельные попытки численного решения уравнений Навье – Стокса в замкнутых областях при больших числах Рэлея, состоявшие в отыскании либо искусственно стабилизированного решения [8], либо нестационарного решения, но без необходимой обработки и сопоставления с опытными данными [9].

В данной работе используется усовершенствованный метод расчета и ставится задача получения численной «реализации» нестационарных уравнений в том диапазоне режимных параметров, в котором течение согласно опытным данным имеет турбулентный характер, с последующей статистической обработкой и сопоставлением с результатами измерений.

Близкое направление развивается для задачи о конвекции в подогреваемом снизу горизонтальном слое со свободными границами с применением прямых методов в [10, 11]. В этих работах, начало которым положено работой [12], основное внимание уделяется вопросу возникновения турбулентности за порогом устойчивости равновесия, в связи с чем подход авторов к обработке и анализу данных отличается от предпринимаемого здесь. Различаются также сам характер перехода к турбулентности и диапазон чисел Рэлея, однако общий вывод о том, что взаимодействие конечного числа крупномасштабных движений может удовлетворительно описывать основные черты турбулентного режима конвекции, согласуется с выводом данной работы.

Основные результаты работы доложены в 1975 г. на семинаре Г. И. Петрова в ВЦ МГУ [13]. Более полно метод и результаты изложены в [14].

1. Математическая модель. Рассматривается естественная конвекция в замкнутом плоском вертикальном слое высотой H между двумя изотермическими поверхностями, расположенными одна от другой на расстоянии L и имеющими температуры T_2 и T_1 . Основания слоя теплоизолированы, сила тяжести направлена вертикально вниз (фиг. 1).

Исходная безразмерная система двумерных нестационарных уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска в переменных «вихрь, функция тока» имеет вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \\ = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - G \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

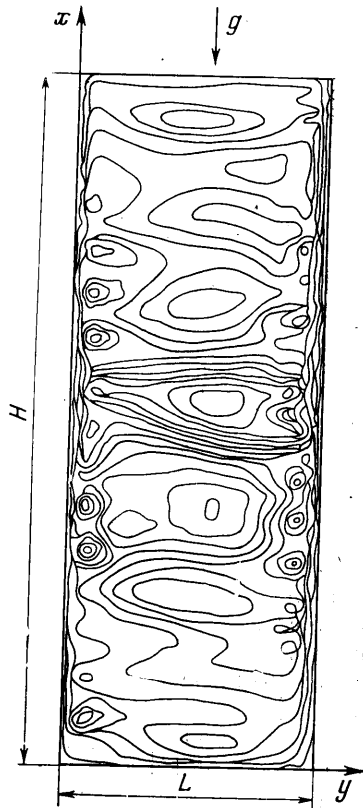
$$(1.2) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega,$$

$$G = \frac{g\beta L^3}{\nu^2} \Delta T, \quad P = \frac{\nu}{a}$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \\ = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right)$$

Здесь G — число Грасгофа, P — число Прандтля. Безразмерные функции тока ψ , вихрь ω и температура θ определены соотношениями

$$(1.4) \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \\ \omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \\ \theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$



Фиг. 1

где u, v — проекции вектора скорости на оси x, y соответственно. Масштабами для безразмерных величин в системе (1.1)–(1.3) являются масштабы длины L , скорости ν/L , времени L^2/ν и температуры $\Delta T = T_2 - T_1$.

Граничными условиями для функции тока (условия прилипания на всем контуре) и для температуры являются

$$(1.5) \quad \psi = 0, \quad \partial \psi / \partial n = 0$$

$$(1.6) \quad \theta = 0 \quad (0 \leq x \leq H/L, y = 1), \quad \theta = 1 \quad (0 \leq x \leq H/L, y = 0) \\ \partial \theta / \partial n = 0 \quad (x = 0, H/L, 0 < y < 1)$$

Начальные условия

$$(1.7) \quad \omega(t=0) = \omega^0(x, y), \quad \psi(t=0) = \psi^0(x, y), \quad \theta(t=0) = \theta^0(x, y)$$

Изменение во времени искомых полей скорости и температуры в соответствии с (1.1)–(1.3), (1.5)–(1.7) определяется критериальными уравнениями вида $u = u(x, y, t, R, P, H/L)$, где $R = GP$ — число Рэлея, H/L — отношение сторон слоя. Имея в виду изучение течений в турбулентном режиме, когда стационарного решения системы (1.1)–(1.7) не существует, будем искать мгновенные значения полей скорости и температуры и при последующей обработке средние и пульсационные характеристики.

Под средней величиной понимается средняя «по реализации» на некотором интервале t^+ , например,

$$(1.8) \quad \langle u(x, y) \rangle = \frac{1}{t^+} \int_{t_1}^{t_1+t^+} u dt, \quad \langle \theta(x, y) \rangle = \frac{1}{t^+} \int_{t_1}^{t_1+t^+} \theta dt$$

где t_1 — время установления некоторого «квазистационарного» режима колебаний, $u(x, y, t)$, $\theta(x, y, t)$ — мгновенные значения скорости и температуры, непосредственно реализуемые в расчете.

Пульсационные составляющие определяются как разности между мгновенными и средними величинами: $u' = u - \langle u \rangle$, $v' = v - \langle v \rangle$, $\theta' = \theta - \langle \theta \rangle$.

Далее могут быть вычислены все необходимые статистические характеристики, например дисперсии скорости и температуры, первые моменты и т. д. ($\sqrt{\langle u'^2 \rangle}$, $\sqrt{\langle v'^2 \rangle}$, $\langle u'v' \rangle$, $\langle u'\theta' \rangle$, $\langle v'\theta' \rangle$).

Основной причиной возникновения турбулентности в длинных замкнутых вертикальных слоях согласно экспериментальным данным [4, 5] является неустойчивость течения в пограничном слое, поэтому число Рэлея перехода из ламинарного режима в турбулентный в этом случае имеет такой же порядок, как и на одиночной вертикальной пластине. Первые признаки гидродинамической неустойчивости на одиночной пластине, связанные с образованием синусоидальных волн на внешней границе пограничного слоя, обнаруживаются при числе Рэлея, отнесенном к высоте, $R_x \sim (4 \div 5) \cdot 10^8$, а развитый турбулентный режим, связанный с неупорядоченными пульсациями, наблюдается при $R_x \sim 10^{10}$. В вертикальном слое этому предшествует конвективная неустойчивость, связанная с появлением вторичных течений в ядре, подробно изучавшаяся в работах [15]. Результаты расчета этих режимов и сопоставление с опытными данными [2, 3] приведены в [14].

Ниже изучается вариант расчета, который соответствует условиям одного из опытов [5]

$$(1.9) \quad R_L = 3.75 \cdot 10^8, P = 15, H/L = 11.2$$

Этим безразмерным параметрам согласно [5] соответствуют для спирта значения $L \approx 60$ мм, $H \approx 680$ мм, $T_1 \approx 16^\circ \text{C}$, $T_2 \approx 48^\circ \text{C}$. При этом число R_x , отнесенное к высоте, равно $5.25 \cdot 10^{11}$ и режим течения в слое согласно опытными данными [4, 5] должен быть турбулентным.

2. Метод численного решения. Применяется неявная разностная схема, общая структура которой описана в [16]. Усовершенствованный вариант этой схемы, использовавшийся в конкретных расчетах, дан в [14]. Одна из особенностей этой схемы — новая аппроксимация граничных условий для вихря [16, 17], существенно повышающая устойчивость при больших числах Рэлея и при уменьшении пространственного шага сетки. Последнее особенно важно, так как при больших числах Рэлея требуется значительное сгущение сетки вблизи твердых границ. Условие прилипания (1.5) при использовании указанной аппроксимации граничных условий реализовано по формуле четвертого порядка точности. Неравномерная сетка введена заданием произвольного массива шагов по обеим координатам. Для аппроксимации производных использованы формулы

$$(2.1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} \approx \delta_x f = \frac{1}{2} (\delta_x^+ f + \delta_x^- f), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \delta_{xx} f = \frac{2}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} (\delta_x^+ f - \delta_x^- f)$$

$$\delta_x^+ f = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x_i}, \quad \delta_x^- f = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x_{i-1}}$$

Аналогично записываются $\delta_y f$, $\delta_{yy} f$, $\delta_y^+ f$, $\delta_y^- f$.

Для конвективных членов использована монотонная аппроксимация [18], которая в отличие от [16] записывается только для «верхнего» временного слоя, а для «нижнего» взята аппроксимация (2.4).

Из других модификаций методики [16], существенных при больших числах Рэлея, отметим выбор оптимального набора шагов для уравнения Пуассона внутреннего цикла (1.2), а также использование критерия выхода из внутреннего цикла по величине относительной невязки разностного аналога (1.2). При расчете варианта (1.9) использованы следующие параметры разностной схемы: сетка 93×39 , диапазон шагов по оси x от 0.01 до 0.15, диапазон шагов по оси y от 0.005 до 0.09, итерационные параметры внутреннего цикла $\sigma = 2.5 \cdot 10^{-3}$, $\sigma_{sx} = 0.010394$, 0.12608, 0.00002557, 0.0005863, $\sigma_{sy} = 0.010965$, 0.32420, 0.00004433, 0.0006048, шаг по времени $\tau = 2 \cdot 10^{-5}$ (значение σ соответствует варианту расчета без оптимизации внутреннего цикла; σ_{sx} , σ_{sy} — оптимальные наборы итерационных параметров).

Для рационального выбора сгущения сетки в пристеночной зоне использовались измеренные в работе [5] распределения температуры и скорости, и узлы сетки располагались так, чтобы в пограничном слое было не менее десяти узлов. Сетка сгущалась также вблизи верхнего и нижнего оснований. В трех ближайших к границе узлах, с которыми связана аппроксимация условий прилипания, использована равномерная сетка.

Получение даже одной временной реализации турбулентного режима представляет весьма трудоемкий процесс, который был разбит на два основных этапа: I — переходный режим прогрева от некоторых начальных данных до установления среднего потока тепла через слой ($0 < t < t_1$), II — основной квазистационарный участок ($t_1 < t < t_1 + t^+$) длительностью t^+ , характеризующийся неизменными во времени (или слабо изменяющимися) средними характеристиками. На этом участке осуществляется накопление и статистическая обработка информации. В качестве начальных данных на этапе I принято

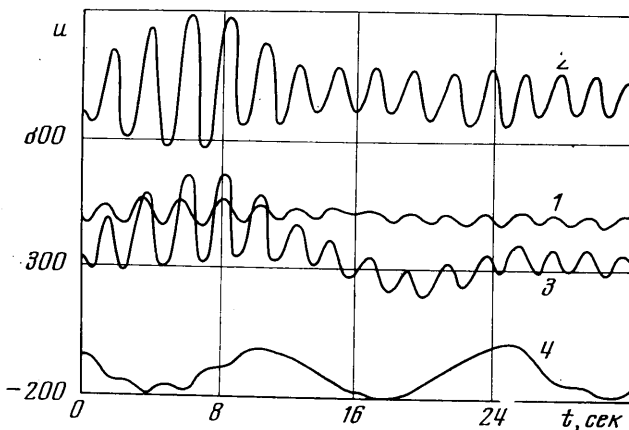
$$\omega^\circ(x, y) = \psi^\circ(x, y) = 0, \theta^\circ(x, y) = 1 - y$$

что соответствует стационарному состоянию неподвижной жидкости с линейным профилем температуры (такой режим реализуется, например, при отсутствии силы тяжести). Этап I состоял в свою очередь из двух участков: установления квазистационарного режима на грубой сетке (93×25) и интерполяции значений ω , ψ , θ на более подробную сетку (93×39) и установления режима на новой сетке. Важно отметить, что значения числа Нуссельта в конце обоих участков отличаются не более чем на 5%. Это, с одной стороны, показывает, что точность расчета в направлении оси y , по видимому, удовлетворительна, а с другой стороны, свидетельствует о сравнительно слабом влиянии начальных данных на средние характеристики квазистационарного режима турбулентной конвекции. На этапе II рассчитано ~650 временных слоев с шагом по времени $\tau = 2 \cdot 10^{-5}$. Этот безразмерный шаг для условий опытов [5] соответствует 0.05 сек. Так как наибольшая частота пульсаций (имеющих при этом довольно малую амплитуду) в турбулентном пограничном слое согласно [5] составляет ~0.1 сек, то такой временной шаг, видимо, достаточно мал. Длительность этапа II для условий опытов [5] ~30 сек, а суммарная длительность этапов I, II 1.5—2 мин.

3. Результаты расчетов. На фиг. 1 дана мгновенная картина линий тока в вертикальном слое в один из моментов времени на участке обработки (вертикальный размер области уменьшен в 4 раза). Мгновенное поле течения состоит из трех характерных зон: тонких пристеночных погранич-

ных слоев, системы сравнительно мелких вихрей, распределенных периодически на внешней части пограничных слоев у нагретой и холодной стенок, и системы крупных вихрей в конвективном ядре. Такая картина возникает при распаде соответствующей ламинарной структуры [14, 15] и качественно согласуется с опытными данными [5, 19].

Изменение во времени скорости, т. е. непосредственно «реализация» в характерных точках на линии $x=1/2H$ ($x=340$ мм), дано на фиг. 2. Здесь кривая 1 соответствует точке вблизи нагретой стенки ($y=0.3$ мм), 2, 3 — на внешней границе пограничного слоя ($y=1.2, 3.0$ мм) и 4 — в конвективном ядре ($y=19.2$ мм).



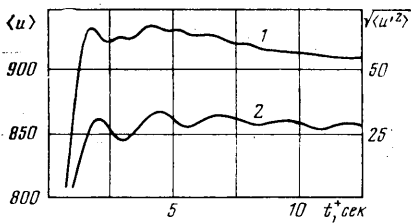
Фиг. 2

Непосредственно в замкнутом вертикальном слое подобные данные неизвестны, и для сопоставления были использованы экспериментальные данные для турбулентного пограничного слоя на пластине в неограниченном объеме [20, 21]. Максимальная амплитуда пульсаций продольной составляющей скорости $u(t)$ составляет 15–20%, температуры ~ 3 –4%, характерный период ~ 2 сек. Пульсации составляющей скорости $v(t)$ достигают нескольких десятков ее абсолютной средней величины. Наиболее интенсивны и имеют большую частоту пульсации в пограничном слое вблизи максимума продольной скорости и на внешней границе пограничного слоя, что объясняется в соответствии с мгновенной картиной течения (фиг. 1) перемещением системы мелких вихрей. Пульсации в конвективном ядре имеют значительно больший период (до 10–15 сек) и на порядок меньшую амплитуду в связи с большим масштабом вихрей в этой зоне.

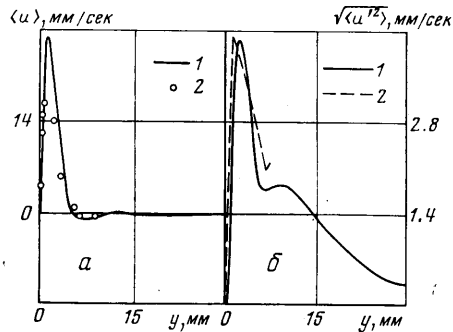
Очевидным отличием мгновенных значений от измеренных в пограничном слое [5, 20, 21] является регулярность, т. е. отсутствие мелкомасштабных пульсаций, в особенности в точках 1–3. Однако в конвективном ядре на фоне крупномасштабных пульсаций хорошо видны мелкомасштабные. Наиболее вероятная причина регулярности пульсаций — сравнительно большой пространственный шаг сетки по вертикальной координате, в связи с чем вихри на внешней части пограничного слоя, размер которых меньше 1–2 шагов сетки, подавляются. Другая возможная причина, которую трудно установить достоверно, но еще труднее устранить, — влияние трехмерных возмущений.

Количественно с опытными данными могут быть сопоставлены лишь осредненные во времени характеристики. Осреднение, выполненное на

участке обработки, выявило, что большинство наиболее важных величин устанавливается «в среднем» уже после нескольких периодов колебаний. Влияние длины участка осреднения на средние значения вертикальной составляющей скорости и среднеквадратичные пульсации скорости в пограничном слое показано на фиг. 3. Кривым 1, 2 соответствуют значения $\sqrt{\langle u'^2 \rangle}$, $\langle u \rangle$. Все указанные средние величины имеют предел, не зависящий от величины интервала осреднения t^+ , начиная с некоторого значения t^+ . Важно, что искомые средние величины в пограничном слое с достаточной степенью точности могут быть получены даже на сравнительно коротком интервале ($t^+ \sim 15-20$ сек). Более медленно устанавливаются средние значения горизонтальной составляющей скорости (при $t^+ \sim 20$ сек отклонение от предельного значения $\sim 20\%$), однако следует учесть, что



Фиг. 3



Фиг. 4

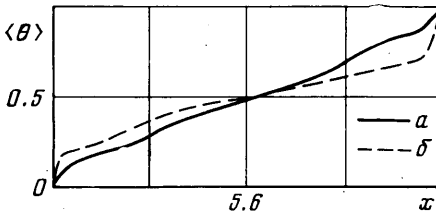
мгновенные пульсации этой величины отклоняются от среднего более чем в 10 раз. Еще более медленно устанавливаются значения $\langle u'v' \rangle$ в конвективном ядре, что обусловлено большой относительной величиной пульсаций в связи с малым значением средней скорости. Однако остальные средние характеристики, такие как дисперсии скоростей и средние значения температур, устанавливаются в ядре так же быстро, как и в пограничном слое.

Сопоставление некоторых средних характеристик турбулентной конвекции с опытными данными [5] приведено на фиг. 4–6. Из-за недостатка опытных данных для вертикального слоя при рассматриваемых условиях часть из них взята по измерениям на одиночной пластине или в вертикальном слое при наиболее близких условиях. На фиг. 4, б сплошной кривой 1 дано распределение среднеквадратичных пульсаций вертикальной составляющей скорости в сечении $x=340$ мм по результатам расчета, кривой 2 — по опытным данным [5]. На фиг. 4, а 1 — профили средней скорости в сечении $x=340$ мм, 2 — опытные данные [5] для вертикального слоя при $H=395$ мм, $L=49$ мм, $\Delta T=29^\circ \text{C}$. На фиг. 5, 6 сопоставлены распределения средней температуры вдоль центральной линии по вертикали ($y=30$ мм) и в двух сечениях по горизонтали (а — расчет, б — измерения [5]). Линии 1, 2 на фиг. 6 соответствуют горизонтальным сечениям $x=263$ и 488 мм соответственно.

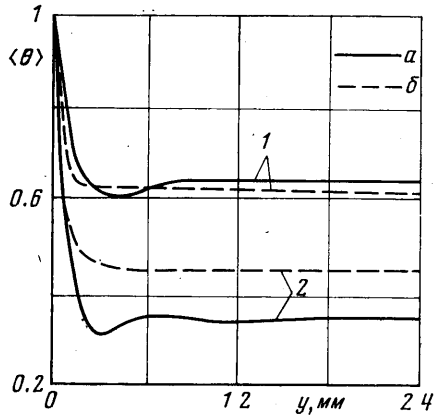
Несмотря на определенные различия в величинах температур в ядре в некоторой части по высоте у нижнего и верхнего торцов, основные выводы о структуре осредненного движения и поля температур согласуются с опытными данными. К ним относятся выводы о наличии изотермического по горизонтали ядра и тонких пристеночных температурного и динамического пограничных слоев ($\delta_T \sim 1 \div 1.5$ мм, $\delta_g \sim 5 \div 6$ мм), градиента температуры у стенки; о максимальной величине пульсаций в пограничном слое

и малых средних скоростях в конвективном ядре, величине вертикальной разности температур вдоль оси и др. Наиболее заметной особенностью рассчитанного среднего поля температур, не наблюдавшейся в опытах [4, 5], является минимум на внешней границе пограничного слоя (фиг. 6), а также увеличенный (по сравнению с измеренным [5]) вертикальный градиент температуры. Возможной причиной этих эффектов является упоминавшаяся неполнота описания вихрей малого размера на внешней границе в связи с относительно большим шагом сетки по вертикали.

Из результатов расчета следует, что турбулентный поток тепла $\langle u'\theta' \rangle$ достигает наибольшего значения внутри пограничного слоя и весьма мал в конвективном ядре. Величина составляющей турбулентного потока $\langle v'\theta' \rangle$ по результатам расчетов почти на порядок меньше. Распределение турбулентного напряжения трения $\langle u'v' \rangle$ имеет более сложный характер. На внешней границе пограничного слоя эта величина имеет резко выраженный



Фиг. 5



Фиг. 6

максимум. В пограничном слое $\langle u'v' \rangle$ меняет знак и достигает максимума на том же расстоянии от стенки, что и $\langle v'\theta' \rangle$; максимальное значение $\langle u'v' \rangle$ в пограничном слое по абсолютной величине в несколько раз меньше, чем на внешней границе пограничного слоя.

Наибольший интерес представляет сравнение относительного вклада турбулентного напряжения трения с молекулярным, т. е. величина $\langle -u'v' \rangle \langle \partial u / \partial y \rangle^{-1}$ (отношение турбулентной вязкости ν_T к молекулярной кинематической вязкости ν). В основной части пограничного слоя величина $\nu_T/\nu \ll 1$, т. е. вклад собственно турбулентности мал. В конвективном ядре эта величина увеличивается по абсолютному значению от 1–3 до 20–30. В промежуточной зоне между внешней частью пограничного слоя и конвективным ядром у нагретой и холодной стенок обнаружены небольшие зоны с отрицательной турбулентной вязкостью $\nu_T/\nu < 0$, достигающей максимального абсолютного значения 3–5; это может означать передачу энергии турбулентности от мелких вихрей к крупным.

В заключение можно сделать вывод, что полученное в работе численное решение нестационарных уравнений Навье — Стокса при $R_H \sim 5 \cdot 10^{11}$ обладает многими качественными свойствами, которые, судя по экспериментальным данным, характерны для турбулентной конвекции: структурой и размерами различных зон (вязкий подслой, внешняя граница пограничного слоя с системой мелких вихрей, крупномасштабное течение в ядре), колебаниями значений скорости и температуры при наличии стационарных средних значений и др. Существуют устойчивые средние значения, не зависящие от длины интервала осреднения (начиная с некоторого ее значения, различного в разных зонах), причем изменение начальных данных и (до некоторого предела) шага по времени практически не влияет на средние величины.

Основной дефект численного решения — относительная регулярность пульсаций температуры и скорости, в связи с чем энергетический спектр пульсаций температуры в вертикальном слое вблизи стенки, рассчитан-

ный по численной реализации, более узок, чем измеренный в аналогичных условиях в пограничном слое на пластине. Однако тот факт, что измеренные средние характеристики описываются удовлетворительно, по-видимому, означает, что в данном случае главную роль играет учет некоторых основных механизмов турбулентного движения. Это открывает определенные возможности для численного моделирования низкоскоростных низкочастотных турбулентных течений, имеющих распространение в технике в технологических процессах.

Авторы благодарят А. Г. Кирдяшкина за консультации по методике и результатам эксперимента, Г. С. Глушко за полезные замечания и К. Г. Дубовика за помощь в выполнении расчетов.

Поступила 8 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Orszag S. A., Israeli M. Numerical simulation of viscous incompressible flows. Ann. Rev. Fluid Mech., Palo Alto, Calif., 1974, vol. 6.
2. Eckert E. R., Carlson W. O. Natural convection in an air layer enclosed between two vertical plates with different temperatures. Intern. J. Heat and Mass Transfer, 1961, vol. 2, No. 1/2.
3. Elder J. W. Laminar free convection in a vertical slot. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, pt 1.
4. Elder J. W. Turbulent free convection in a vertical slot. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, pt 1.
5. Кутагеладзе С. С., Ивакин В. П., Кирдяшкин А. Г., Кекалов А. Н. Тепловая гравитационная конвекция в вертикальном слое при турбулентном режиме течения. В сб. «Тепломассообмен — 5», т. 1, ч. 2. Минск, 1976.
6. Полежаев В. И. Течение и теплопередача при ламинарной естественной конвекции в вертикальном слое. В сб. «Тепло- и массоперенос», т. 1, М., «Энергия», 1968.
7. Полежаев В. И. Численное исследование естественной конвекции жидкостей и газов. В сб. «Некоторые применения метода сеток в газовой динамике», вып. 4. М., Изд-во МГУ, 1971.
8. Берковский Б. М., Полевичков В. К. Исследование теплообмена в условиях высокоинтенсивной свободной конвекции. В сб. «Теплообмен», 1974. Советские исследования. М., «Наука», 1975.
9. Fromm J. E. Numerical method for computing nonlinear, time dependent, buoyant circulation of air in rooms. IBM J. Res. and Develop., 1971, vol. 15, No. 3.
10. McLaughlin J. B., Martin P. C. Transition to turbulence in a statically stressed fluid system. Phys. Rev. A: Gen. Phys., 1975, vol. 12, No. 1.
11. Герценштейн С. Я., Шмидт В. М. Нелинейное развитие и взаимодействие возмущений конечной амплитуды при конвективной неустойчивости вращающегося плоского слоя. Докл. АН СССР, 1975, т. 225, № 1.
12. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow. J. Atmos. Sci., 1963, vol. 20, No. 2.
13. Грязнов В. Л., Полежаев В. И. Применение метода сеток к расчету турбулентной естественной конвекции в вертикальном слое. Аннот. докл. на семинаре по численным методам решения задач аэрогидродинамики в Науч.-исслед. ВЦ МГУ. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 4.
14. Грязнов В. Л., Полежаев В. И. Численное решение нестационарных уравнений Навье — Стокса для турбулентного режима естественной конвекции. Препринт ИПМ АН СССР, 1977, № 81.
15. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
16. Грязнов В. Л., Полежаев В. И. Исследование некоторых разностных схем и аппроксимаций граничных условий для численного решения уравнений тепловой конвекции. Препринт ИПМ АН СССР, 1974, № 40.
17. Полежаев В. И., Грязнов В. Л. Метод расчета граничных условий для уравнений Навье — Стокса в переменных «вихрь, функция тока». Докл. АН СССР, 1974, т. 219, № 2.
18. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.
19. Влит, Лайю. Экспериментальное исследование турбулентных пограничных слоев в условиях естественной конвекции. Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Теплопередача, 1969, т. 91, № 4.
20. Lock G. S. H., Trotter E. J. de B. Observations on the structure of a turbulent free convection boundary layer. Intern. J. Heat and Mass Transfer, 1968, vol. 11, No. 8.
21. Ивакин В. П., Кирдяшкин А. Г., Черняховский Л. И. Исследование структуры турбулентного пограничного слоя при естественной конвекции у вертикальной пластины. В сб. «Пристенное турбулентное течение», ч. 2. Новосибирск, 1975.