МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1977

УДК 532.517.2.013.4:538.4

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ТОНКОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

В. Г. БАШТОВОЙ, М. С. КРАКОВ

(Минск)

Рассматривается ламинарное течение тонкого слоя тяжелой вязкой магнитной жидкости вдоль наклонной стенки. Влияние на устойчивость и управление течением обычной жидкости ограничены изменением угла наклона твердой стенки и заданием скорости граничащего потока газа. В случае применения магнитных жидкостей [1, 2] одним из эффективных способов управления течением может оказаться управление магнитным полем. Применяя магнитные поля той или иной конфигурации, окажется возможным управлять течением тонкого слоя вязкой жидкости, влиять на устойчивость ламинарного пленочного течения, изменять форму свободной поверхности стекающей в ламинарном режиме тонкой пленки, что играет роль при массообмене, интенсивность которого определяется площадью поверхности контакта фаз. Заметим, что магнитное поле существенно влияет на форму свободной поверхности магнитной жидкости [3, 4].

В данной работе найден профиль скорости течения граничащего с газовым потоком слоя вязкой магнитной жидкости, стекающей в неоднородном магнитном поле вдоль наклонной твердой стенки. Показана возможность управления течением с помощью магнитного поля. Задача об устойчивости найденного течения решена в линейной постановке с учетом возмущений магнитного поля. Найдено условие устойчивости. Показано, что на устойчивость течения влияет как неоднородный характер поля, так и его направление.

1. Постановка задачи. Течение неэлектропроводной тяжелой магнитной жидкости описывается системой уравнений [1, 2]

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right]=-\nabla p+\rho\mathbf{g}+\eta\Delta\mathbf{v}+\mu_0 M\nabla H \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=0,\ \operatorname{rot}\mathbf{H}=0,\ \operatorname{div}\mathbf{B}=0,\ \mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{M}+\mathbf{H})=\mu\mathbf{H}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость, $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля, $\mathbf{B}$ — индукция, $\mathbf{M}$ — магнитный момент единицы объема жидкости, μ — проницаемость магнитной жидкости (вообще говоря, $\mu=\mu(H)$). Пусть слой жидкости стекает вдоль твердой магнитной стенки с проницаемостью μ_1, наклоненной под углом ϑ к горизонту. Если плоскость xy совпадает с его свободной поверхностью в отсутствие магнитного поля, а координата z возрастает в сторону граничащего со свободной поверхностью газового потока, то вектор $\mathbf{g}$ в такой системе координат имеет вид: $\mathbf{g}=\{g_x\sin\vartheta;\ g_y\sin\vartheta;\ -g\cos\vartheta\}$, где $g_x=g\cos\alpha$; $g_y=-g\sin\alpha$, а α — угол между осью x и проекцией вектора $\mathbf{g}$ на плоскость xy.

Условия на границах слоя вязкой магнитной жидкости имеют вид [5, 6]

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}=0\ (z=-h)\\
&\sigma_{ik}n_k=\tau_i+T_{ik}n_k\ (z=\zeta)\\
&\mathbf{B}^\circ\cdot\mathbf{n}=\mathbf{B}^+\cdot\mathbf{n},\ (\mathbf{H}^\circ-\mathbf{H}^+)x\mathbf{n}=0\ (z=\zeta)\\
&B_z^\circ=B_z^-,\ H_x^\circ=H_x^-,\ H_y^\circ=H_y^-\ (z=-h)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\sigma_{ik}=p\delta_{ik}+\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)+H_i{}^\circ B_k{}^\circ-\frac{1}{2}\delta_{ik}(H^\circ)^2$$

$$T_{ik}=p_g\delta_{ik}+H_i{}^+B_k{}^+-{}^1/_2\delta_{ik}(H^+)^2$$

$$\mathbf{n}=\left\{-\frac{\partial\zeta/\partial x}{\sqrt{Q}},-\frac{\partial\zeta/\partial y}{\sqrt{Q}},\frac{1}{\sqrt{Q}}\right\},\quad Q=1+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}=\{\tau_x,\ \tau_y,\ 0\}$ — постоянный вектор, лежащий в плоскости xy и аппроксимирующий действие потока газа, $\mathbf{n}$ — внешний вектор нормали к свободной поверхности, p_g — давление в газовом потоке, h — толщина пленки, ζ — координата z точек свободной поверхности, η и σ — коэффициенты динамической вязкости и поверхностного натяжения, индексы 0, +, — относятся к магнитному полю соответственно внутри слоя магнитной жидкости, в газовом потоке и внутри твердой стенки.

Для определения профиля скорости течения тонкого слоя магнитной жидкости, граничащего с газовым потоком, в неоднородном магнитном поле рассмотрим поле, градиент которого в жидкости есть постоянный вектор $\mathbf{G}$.

Магнитную жидкость полагаем находящейся в состоянии насыщения. В этом случае величина $\mu_0 M\mathbf{G}$ представляет собой постоянный вектор и действие массовой силы $\rho\mathbf{g}+\mu_0 M\mathbf{G}$ эквивалентно действию силы тяжести, с той лишь разницей, что величину и направление этой силы можно изменять, варьируя величину и направление градиента магнитного поля. Тогда искомый профиль скорости совпадает с профилем скорости стационарного ламинарного течения немагнитной жидкости [7], в котором переопределена величина $\mathbf{g}$: ее роль играет вектор $\mathbf{g}+\mu_0 M\mathbf{G}/\rho$.

В режиме противотока известно явление «захлебывания» ламинарного течения [8], которое происходит вследствие увлечения внешних слоев жидкости газовым потоком, приводящего к обращению в нуль средней по сечению скорости жидкости. Условием захлебывания течения магнитной жидкости в рассматриваемом случае при $\alpha=0$ будет

$$-\tau_x>{}^2/_9(\rho g\sin\vartheta+\mu_0 MG_x)h$$

Таким образом, магнитное поле с градиентом, по направлению совпадающим с течением пленки, позволяет применять газовые потоки с большими скоростями, а поле с противоположным градиентом облегчает захлебывание течения пленки магнитной жидкости.

2. Устойчивость ламинарного течения. Рассмотрим в линейном приближении устойчивость ламинарного течения тонкого слоя вязкой магнитной жидкости, стекающей вдоль наклонной стенки и находящейся в неоднородном магнитном поле с градиентом напряженности $\mathbf{G}$, относительно малых возмущений ζ, $\mathbf{v}'=\mathbf{v}-\mathbf{v}_0$, $p'=p-p_0$, $\mathbf{m}^\circ=\mathbf{M}^\circ-\mathbf{M}_s{}^\circ$, $\mathbf{m}^-=\mathbf{M}^--\mathbf{M}_s{}^-$, $\mathbf{h}^+=\mathbf{H}-\mathbf{H}^+(z>\zeta)$, $\mathbf{h}^\circ=\mathbf{H}-\mathbf{H}^\circ(0<z<\zeta)$, $\mathbf{h}^-=\mathbf{H}-\mathbf{H}^-(z<0)$.

Здесь $\mathbf{M}_s{}^\circ$, $\mathbf{M}_s{}^-$, $\mathbf{H}^+$, $\mathbf{H}^\circ$, $\mathbf{H}^-$, $\mathbf{v}_0$ и p_0 — невозмущенные величины, причем полагается $|\mathbf{M}^\circ|=|\mathbf{M}_s{}^\circ|$ и $|\mathbf{M}^-|=|\mathbf{M}_s{}^-|$. Линеаризованная относительно малых возмущений система уравнений (1.1) имеет вид

$$\rho\left[\frac{\partial\mathbf{v}'}{\partial t}+(\mathbf{v}'\nabla)\mathbf{v}_0+(\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{v}'\right]=-\nabla p+\eta\Delta\mathbf{v}'+ \tag{2.1}$$

$$+(\mu-\mu_0)[H_x{}^\circ\nabla h_x{}^\circ+h_x{}^\circ\nabla H_x{}^\circ-(h_x{}^\circ H_x{}^\circ\nabla H^\circ)/H^\circ]+$$

$$+(\mu-\mu_0)[H_y{}^\circ\nabla h_y{}^\circ+h_y{}^\circ\nabla H_y{}^\circ-(h_y{}^\circ H_y{}^\circ\nabla H^\circ)/H^\circ]+$$

$$+(\mu-\mu_0)[H_z{}^\circ\nabla h_z{}^\circ+h_z{}^\circ\nabla H_z{}^\circ-(h_z{}^\circ H_z{}^\circ\nabla H^\circ)/H^\circ]$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}'=0,\ \operatorname{rot} \mathbf{h}^+=0,\ \operatorname{rot} \mathbf{h}^\circ=0,\ \operatorname{rot} \mathbf{h}^-=0$$
$$\operatorname{div} \mathbf{h}^+=0,\ \operatorname{div} \mathbf{h}^\circ=-\operatorname{div} \mathbf{m}^\circ,\ \operatorname{div} \mathbf{h}^-=-\operatorname{div} \mathbf{m}^-$$

Линеаризованные граничные условия (1.2) запишутся следующим образом:

$$\mathbf{v}'(-h)=0 \tag{2.2}$$

$$\left[\eta\left(\frac{\partial v_x'}{\partial z}+\frac{\partial v_z'}{\partial x}\right)+\frac{d^2 v_{0x}}{dz^2}\right]_{z=0}=0,$$

$$\left[\eta\left(\frac{\partial v_y'}{\partial z}+\frac{\partial v_z'}{\partial y}\right)+\frac{d^2 v_{0y}}{dz^2}\right]_{z=0}=0$$

$$\Big[2\eta\frac{\partial v_z'}{\partial z}-p'-\sigma\Delta\zeta-\mu_0(\Delta\mu)^2 H_z^\circ\{[1-(f_z^\circ)^2]h_z^\circ-$$

$$-f_z^\circ(f_x^\circ h_x^\circ+f_y^\circ h_y^\circ)\}-\mu_0(\Delta\mu)^2 H_x^\circ H_z^\circ\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\mu_0(\Delta\mu)^2 H_y^\circ H_z^\circ\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big]_{z=0}=0$$

$$\left[\mu h_z^\circ-\mu_0 h_z^+-(\mu-\mu_0)\left(H_x^\circ\frac{\partial\zeta}{\partial x}+H_y^\circ\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right]_{z=0}=0$$

$$\left[h_x^\circ-h_x^+-\Delta\mu H_z^\circ\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right]_{z=0}=0,\qquad \left[h_y^\circ-h_y^+-\Delta\mu H_z^\circ\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right]_{z=0}=0$$

$$\mu h_z^\circ-\mu_1 h_z^-=0,\ h_x^\circ-h_x^-=0,\ h_y^\circ-h_y^-=0\ (z=-h)$$

$$\mathbf{h}^+=0\ (z=\infty),\ \mathbf{h}^-=0\ (z=-\infty)$$

$$\Delta\mu=\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0},\qquad \Delta\mu_1=\frac{\mu_1-\mu_0}{\mu_0},\qquad \mathbf{f}^\circ=\frac{\mathbf{H}^\circ}{H^\circ},\qquad \mathbf{f}^-=\frac{\mathbf{H}^-}{H^-}$$

При выводе граничных условий (2.2) использовалось обычное в феррогидродинамике предположение о параллельности векторов **M** и **H**, приводящее в линейном приближении к следующей связи между **m** и **h**:

$$\mathbf{m}^\circ=\Delta\mu[\mathbf{h}^\circ-\mathbf{f}^\circ(\mathbf{f}^\circ\cdot\mathbf{h}^\circ)],\ \mathbf{m}^-=\Delta\mu_1[\mathbf{h}^--\mathbf{f}^-(\mathbf{f}^-\cdot\mathbf{h}^-)]$$

Рассмотрим малые возмущения свободной поверхности, распространяющиеся в виде плоской волны вдоль оси x: $\zeta(x, y, t)=\delta\exp[ik(x-ct)]$. В этом случае компонента возмущений скорости v_y' отсутствует и можно ввести функцию тока φ_0 так, что $v_x'=\partial\varphi_0/\partial z$ и $v_z'=-\partial\varphi_0/\partial x$. Рассматривая возмущения, на длине волны которых магнитное поле слабо меняется, т. е. $L\gg 2\pi/k$ (здесь L — характерный размер изменения магнитного поля), можно отбросить в квадратных скобках в правой части уравнения движения два последних члена по сравнению с первым. Такое пренебрежение одновременно означает, что при дифференцировании величин, содержащих произведения вида $(\mu-\mu_0)H_x^\circ h_x^\circ$, равновесное магнитное поле, равно как и $\mu=\mu(H^\circ)$, можно считать постоянной величиной.

Учитывая это обстоятельство и вводя потенциалы возмущений магнитного поля $h^+=\nabla\psi^+$, $h^\circ=\nabla\psi^\circ$, $h^-=\nabla\psi^-$, придем к уравнениям

$$\Delta\psi^+=0\qquad \Delta\psi^\circ+\Delta\mu\Big\{[1-(f_x^\circ)^2]\frac{\partial^2\psi^\circ}{\partial x^2}+[1-(f_y^\circ)^2]\times \tag{2.3}$$

$$\times\frac{\partial^2\psi^\circ}{\partial y^2}+[1-(f_z^\circ)^2]\frac{\partial^2\psi^\circ}{\partial z^2}-2f_x^\circ f_y^\circ\frac{\partial^2\psi^\circ}{\partial x\,\partial y}-$$

$$-2f_x{}^\circ f_z{}^\circ \frac{\partial^2\psi^\circ}{\partial x\,\partial z}-2f_y{}^\circ f_z{}^\circ \frac{\partial^2\psi^\circ}{\partial y\,\partial z}\Bigg\}=0$$

$$\Delta\psi^- +\Delta\mu_1\Bigg\{[1-(f_x{}^-)^2]\frac{\partial^2\psi^-}{\partial x^2}+[1-(f_y{}^-)^2]\frac{\partial^2\psi^-}{\partial y^2}+$$

$$+[1-(f_z{}^-)^2]\frac{\partial^2\psi^-}{\partial z^2}-2f_x{}^-f_y{}^-\frac{\partial^2\psi^-}{\partial x\,\partial y}-$$

$$-2f_x{}^-f_z{}^-\frac{\partial^2\psi^-}{\partial x\,\partial z}-2f_y{}^-f_z{}^-\frac{\partial^2\psi^-}{\partial y\,\partial z}\Bigg\}=0$$

Поскольку причиной возмущений магнитного поля, скорости, намагниченности и давления являются возмущения свободной поверхности, то в рамках линейного приближения естественно положить возмущения всех переменных пропорциональными нормальному смещению поверхности, т. е. записать в виде $\varphi_0=\varphi(z)\zeta$, $p'=f(z)\zeta$, $\psi^\circ=\psi(z)\zeta$, $\psi^+=g(z)\zeta$, $\psi^-=l(z)\zeta$.

Пропорциональность потенциалов ψ^+, ψ°, ψ^- нормальному смещению свободной поверхности приводит к независимости уравнений и граничных условий для магнитного поля от гидродинамических переменных, что позволяет решить уравнения (2.3) с граничными условиями (2.2) для магнитного поля. Решение имеет вид

$$g(z)=(\mu-\mu_0)e^{-kz}\left[(a+b)\frac{iH_x{}^\circ+H_z{}^\circ}{Z}-\frac{H_z{}^\circ}{\mu_0}\right] \tag{2.4}$$

$$\psi(z)=(\mu-\mu_0)\frac{iH_x{}^\circ+H_z{}^\circ}{Z}\{be^{k(R+iI)z}+ae^{k(-R+iI)z}\}$$

$$l(z)=(\mu-\mu_0)2\mu R(iH_x{}^\circ+H_z{}^\circ)e^{kh[R+R_1+i(I_1-I)]}e^{k(R_1+iI_1)z}$$

$$R=\frac{\sqrt{1+\Delta\mu}}{1+(f_x{}^\circ)^2\Delta\mu}\qquad I=\frac{f_x{}^\circ f_z{}^\circ\Delta\mu}{1+(f_x{}^\circ)^2\Delta\mu}$$

$$R_1=\frac{\sqrt{1+\Delta\mu_1}}{1+(f_x{}^-)^2\Delta\mu_1},\qquad I_1=\frac{f_x{}^-f_z{}^-\Delta\mu_1}{1+(f_x{}^-)^2\Delta\mu_1}$$

$$a\equiv a_r+ia_i=\mu R-\mu_1R_1-i(\mu_1I_1-\mu I)$$
$$b\equiv b_r+ib_i=e^{2khR}[(\mu R+\mu_1R_1)+i(\mu_1I_1-\mu I)]$$
$$Z=\mu R(b-a)+(\mu_0+i\mu I)(b+a)$$

Таким образом, члены в уравнении движения и граничных условиях, зависящие от магнитного поля, определены, что дает возможность решать задачу для гидродинамических переменных. Учитывая пропорциональность всех физических величин ζ и явный вид функции $\psi(z)$ и избавляясь в уравнении движения от членов с давлением, придем к следующему уравнению для функции $\varphi(z)$:

$$\nu(\varphi^{\mathrm{IV}}-2k^2\varphi''+k^4\varphi)=ik[(v_{0x}-c)(\varphi''-k^2\varphi)-v_{0x}''\varphi] \tag{2.5}$$

представляющему собой известное уравнение Орра – Зоммерфельда. Граничные условия (2.2), записанные для функции тока φ_0 с учетом их совместности с кинематическим условием на поверхности $v_z=d\zeta/dt$ (приводящим к равенству $\varphi(0)=c-v_{0x}(0)$), приобретают вид

$$\varphi(-h)=0,\qquad (d\varphi/dz)_{z=0}=0 \tag{2.6}$$
$$-(\rho g_x\sin\vartheta+\mu_0M_s{}^\circ G_x)+\eta(\varphi''+k^2\varphi)=0\qquad(z=0)$$
$$ik\rho\varphi'(c-v_{0x})-ik\rho\varphi v_{0x}'=\eta(\varphi'''-3k_2\varphi)+$$
$$+\{-ik^3\sigma+k^2\mu_0(\Delta\mu)^2H_x{}^\circ H_z{}^\circ-(\mu-\mu_0)k^2H_x{}^\circ\psi[1-\Delta\mu(f_z{}^\circ)^2]+$$
$$+ik(\mu-\mu_0)H_z{}^\circ(d\psi/dz)[1+\Delta\mu(f_x{}^\circ)^2]\}\varphi(c-v_{0x})^{-1}=0\qquad(z=0)$$

Так как в уравнении (2.5) и граничных условиях (2.6) градиент магнитного поля G и напряженность есть постоянные величины, то задача об устойчивости пленки магнитной жидкости, стекающей вдоль наклонной стенки в неоднородном магнитном поле с вычислительной точки зрения с точностью до коэффициентов совпадает с задачей об устойчивости пленки немагнитной жидкости, стекающей вдоль наклонной стенки. Тогда, воспользовавшись результатами работ [9, 10], можно в длинноволновом приближении ($kh\ll 1$) получить выражение для фазовой скорости c

$$
\begin{aligned}
(2.7)\qquad & c=v_{0x}(0)+(\rho g_x\sin\vartheta+\mu_0 M_s{}^\circ G_x)\frac{h^2}{2\eta}-\\
& -i\left(\frac{kh^3}{3\eta}\right)\Big\{\rho g\cos\vartheta+\sigma k^2-\mu_0 M_s{}^\circ G_z+ik^2\mu_0(\Delta\mu)^2H_x{}^\circ H_z{}^\circ-\\
& -i(\mu-\mu_0)H_x{}^\circ k\psi(0)\,[1-\Delta\mu(f_z{}^\circ)^2]-\\
& -(\mu-\mu_0)H_z{}^\circ\left(\frac{d\psi}{dz}\right)_{z=0}[1+\Delta\mu(f_z{}^\circ)^2]\Big\}+\\
& +2ik(\rho g_x\sin\vartheta+\mu_0 M_s{}^\circ G_x)\,[\tau_x+(\rho g_x\sin\vartheta+\mu_0 M_s{}^\circ G_x)h]\,h^5/15\nu\eta^2
\end{aligned}
$$

Течение устойчиво, если малые возмущения затухают во времени, т. е. $\mathrm{Im}(c)<0$ или в явном виде

$$
\begin{aligned}
(2.8)\qquad & 2(\rho g_x\sin\vartheta+\mu_0 M_s{}^\circ G_x)\,[\tau_x+h(\rho g_x\sin\vartheta+\mu_0 M_s{}^\circ G_x)\,]h^2/\\
& /5\nu\eta<\rho g\cos\vartheta+\sigma k^2-\mu_0 M_s{}^\circ G_z+(\mu-\mu_0)kH_x\,\mathrm{Im}\,\psi(0)[1-\\
& -\Delta\mu(f_z{}^\circ)^2]-(\mu-\mu_0)H_z{}^\circ\,\mathrm{Re}\,(d\psi/dz)_{z=0}[1+\Delta\mu(f_x{}^\circ)^2]\\
& \mathrm{Im}\,\psi(0)=(\mu-\mu_0)\,[\,(H_z{}^\circ R_0+H_x{}^\circ I_0)\,(a_i+b_i)+\\
& +(H_x{}^\circ R_0-H_z{}^\circ I_0)\,(a_r+b_r)\,]\,(R_0{}^2+I_0{}^2)^{-1}\\
& \mathrm{Re}\,(d\psi/dz)_{z=0}=k(\mu-\mu_0)\,\{(H_z{}^\circ R_0+H_x{}^\circ I_0)\,[R(a_r-b_r)-\\
& -I(a_i+b_i)\,]-(H_x{}^\circ R_0+H_z{}^\circ I_0)\,[R(a_i-b_i)+I(a_r+b_r)\,]\}\,(R_0{}^2+I_0{}^2)^{-1}\\
& R_0=(\mu R+\mu_0)\,b_r+(\mu_0-\mu R)\,a_r-(a_i+b_i)\,\mu I,\\
& I_0=(\mu R+\mu_0)\,b_i+(\mu_0-\mu R)\,a_i+(a_r+b_r)\,\mu I
\end{aligned}
$$

На устойчивость влияет неоднородный характер магнитного поля. Условие устойчивости (2.8) показывает, что магнитное поле, градиент которого направлен от свободной поверхности к стенке, как и поле с градиентом, уменьшающим компоненту скорости v_{0x}, повышает границу устойчивости. Магнитное поле с противоположно направленным градиентом приводит к обратному эффекту — граница устойчивости понижается.

Вопрос о влиянии направления магнитного поля на устойчивость течения не столь ясен, так как компоненты поля $H_x{}^\circ$ и $H_z{}^\circ$ входят в условие устойчивости не только в явном виде, но и через R_0, I_0, a_r, a_i, b_r и b_i. Условие устойчивости (2.8) существенно упрощается при $M_s{}^\circ/H^\circ\equiv\Delta\mu\ll 1$ и для стенок со слабо выраженными магнитными свойствами ($\Delta\mu_1\ll 1$) или с бесконечной магнитной проницаемостью имеет соответственно вид

$$(2.9)\qquad \sigma k^2+k[A(H_x{}^\circ)^2-Q(H_z{}^\circ)^2]+D>0$$

$$
\begin{aligned}
(2.10)\qquad & [\sigma+F(H_x{}^\circ)^2]k^2-kL(H_z{}^\circ)^2+D>0\\
& D=\rho g\cos\vartheta-\mu_0 M_s{}^\circ G_z-2(\rho g_x\sin\vartheta+\\
& +\mu_0 M_s{}^\circ G_x)\,[\tau_x+h(\rho g_x\sin\vartheta+\mu_0 M_s{}^\circ G_x)\,]h^2/5\nu\eta
\end{aligned}
$$

$$A=\frac{2\mu(\mu-\mu_0)}{(\mu+\mu_1)^2-(\mu-\mu_0)(\mu-\mu_1)},\quad Q=\frac{2\mu_1 A}{\mu}\qquad F=\frac{(\mu-\mu_0)^2h}{\mu}\qquad L=\frac{F}{h}$$

Если возмущения свободной поверхности не сопровождаются возмущениями магнитного поля (поле, будучи неоднородным, имеет лишь компоненту H_y°), то течение абсолютно устойчиво, если $D>0$.

При наличии у поля компоненты H_z° условие абсолютной устойчивости приобретает вид $D>Q^2(H_z^\circ)^4/4\sigma$ для $\Delta\mu_1\ll 1$, $D>L^2(H_z^\circ)^4/4\sigma$ для $\mu_1=\infty$. Отсюда следует, что поле, нормальное к свободной поверхности, понижает границу устойчивости исследуемого течения.

Если поле имеет только касательную свободной поверхности составляющую H_x°, то условия (2.9) и (2.10) редуцируются в

$$\sigma k^2+kA(H_x^\circ)^2+D>0 \quad (\Delta\mu_1\ll 1)$$
$$[\sigma+F(H_x^\circ)^2]k^2+D>0 \quad (\mu_1=\infty)$$

Отсюда следует, что течение абсолютно устойчиво, если $D>0$, т. е. поле, касательное поверхности, не оказывает влияния на границу абсолютной устойчивости исследуемого течения. При $D<0$ течение неустойчиво для волновых чисел, удовлетворяющих неравенству

$$k<\frac{A}{\sigma}(H_x^\circ)^2\left[-1+\sqrt{1-\frac{D\sigma}{A^2(H_x^\circ)^4}}\right] \quad (\Delta\mu_1\ll 1)$$
$$k^2<-\frac{D}{\sigma+F(H_x^\circ)^2} \quad (\mu_1=\infty)$$

т. е. поле, касательное поверхности, увеличивает критическую длину волны λ_*, которая разделяет неустойчивые $(\lambda>\lambda_*)$ и устойчивые $(\lambda<\lambda_*)$ возмущения.

Следует отметить, что для неподвижной магнитной жидкости со свободной поверхностью, находящейся в гравитационном поле, влияние касательного поверхности поля состоит в изменении профиля свободной поверхности, устанавливающегося из-за ее неустойчивости. Условие устойчивости плоской поверхности в поле, имеющем компоненты H_x° и H_z°, имеет вид

$$\frac{\mu}{\mu_0}(H_z^\circ)^2-\cos^2\beta(H_x^\circ)^2\leqslant\frac{\mu_0(\mu+\mu_0)}{(\mu-\mu_0)^2}2\sqrt{\rho g\sigma}$$

где β — угол между осью x и волновым вектором возмущений. Таким образом, наиболее опасны возмущения, перпендикулярные H_x. Такие возмущения, начиная развиваться ранее других, приводят к гофрированному виду свободной поверхности (линии гофра параллельны H_x) в отличие от гексагональной структуры поверхности в случае поля, имеющего только нормальную составляющую [4].

Однордное магнитное поле, направленное вдоль оси y, т. е. перпендикулярное волновому вектору гидродинамических возмущений, как следует из (2.8), не оказывает на последние никакого влияния.

Определенную роль на устойчивость течения магнитной жидкости оказывают магнитные свойства твердой стенки. Сравнивая коэффициенты L и Q в выражениях (2.9) и (2.10), заметим, что $L/Q\approx 2$, что означает увеличение дестабилизирующего влияния нормального поля при возрастании магнитной проницаемости стенки.

Поступила 23 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Neuringer J. L., Rosensweig R. E.* Ferrohydrodynamics. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 12.
2. *Баштовой В. Г., Берковский Б. М.* Термомеханика ферромагнитных жидкостей. Магнитная гидродинамика, 1973, № 3.

3. *Берковский Б. М., Орлов Л. П.* К исследованию формы свободной поверхности и аналога пинч-эффекта в намагничивающихся жидкостях. Магнитная гидродинамика, 1973, № 4.
4. *Cowley M. D., Rosensweig R. E.* The interfacial stability of ferromagnetic fluid. J. Fluid Mech., 1967, vol. 30, pt 4.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.
7. *Jeffreys H.* The draining of a vertical plate. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1930, vol. 26, p. 204—205.
8. *Кутателадзе С. С., Стырикович М. А.* Гидродинамика газожидкостных систем. М., «Энергия», 1976.
9. *Yih Chia-shun.* Stability of liquid flow down an inclined plane. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 3.
10. *Smith F. I. P.* Stability of liquid film flow down on inclined plane with oblique airflow. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 7.