

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЦИЛИНДРА СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ И СТРУЕЙ

М. А. ГОЛЬДШТИК, В. М. ХАНИН

(Новосибирск)

Рассмотрена задача о несимметричном обтекании цилиндра невязкой струей, и в частности потоком с одной свободной границей. Поставлен вопрос о выборе циркуляции на основе обобщения постулата Жуковского — Чаплыгина. Рассмотрено несколько возможностей и предложен принцип минимума максимальной скорости на контуре, который качественно и количественно верно отражает некоторые аспекты взаимодействия цилиндра с потоком.

1. Качественные соображения. Простой эксперимент по обтеканию свободно вращающегося цилиндра потоком со свободной границей или струей выявляет нетривиальные черты такого взаимодействия. Так, цилиндр, несколько заглубленный в текущую воду, начинает вращаться, но в направлении, противоположном ожидаемому [1]. Цилиндр, поднесенный к краю достаточно толстой струи, отталкивает ее от себя и сам вращается «против мельничного колеса». Если скорость потока недостаточна для возникновения кавитации, то в условиях таких опытов обтекание в конечной стадии безотрывно. При этом течение не зависит от числа Рейнольдса, если только скорость обтекания не очень мала. В частности, скорость вращения цилиндра пропорциональна скорости потока, а картины обтеканий цилиндров разных диаметров геометрически подобны [1]. Эти факты позволяют считать обтекание в целом невязким и описывать его в рамках потенциальной модели с некоторой определенной циркуляцией.

При обтекании классических профилей с острой кромкой проблема определения циркуляции решается известным постулатом Жуковского — Чаплыгина, замыкающим потенциальную модель обтекания требованием конечности скорости на контуре. Отмеченная автомодельность дает основание считать, что при обтекании гладких контуров, так же как и классических, в процессе формирования циркуляции основное значение имеют инерционные эффекты, в которых вязкость играет лишь затравочную роль, так что циркуляция может быть определена с помощью некоторого феноменологического принципа в рамках идеальной модели. Этот тезис подтверждается тем фактом, что в интервале автомодельности картина потока практически не зависит от того, свободно ли вращается цилиндр или он закреплен. Об этом же свидетельствует и небольшое время установления циркуляции, имеющее порядок характерного времени невязкого процесса (L/V). Следовательно, речь идет об обобщении постулата Жуковского — Чаплыгина на случай гладкого контура.

Попытки такого рода известны. В [2] рассматривались профили, близкие к классическим, при этом требовалось, чтобы задней критической точкой была точка максимальной кривизны контура. Ясно, что эта рекомендация не может быть универсальной, так как, например, в случае круглого цилиндра она, очевидно, не работает. В [3] предложено выбирать циркуляцию, минимизирующую нелокальный функционал — интеграл от квадрата скорости по контуру. В [4, 5] выдвинуто предположение, что при обтекании цилиндра тонкой струей критические точки лежат на одном диаметре, что равносильно фиксации циркуляции.

Согласно современной точке зрения [6] циркуляция на крыловом профиле возникает вследствие отрыва и уноса вихря, после чего циркуляция устанавливается такой, чтобы обтекание было безотрывным. В начальной стадии обтекания гладкого профиля также отрываются и уносятся вихри, вследствие чего возникает циркуляция, уменьшающая возможность отрыва. В качестве основной гипотезы можно допустить, что взаимодействие тела с потоком вырабатывает циркуляцию, максимально препятствующую отрыву. По своему духу это допущение близко к известному принципу Ле-Шателье, согласно которому реакция системы на внешнее возмущение стремится уменьшить его воздействие. Чтобы высказанная гипотеза приняла вполне определенную форму принципа выбора циркуляции, должен быть решен вопрос

о том, какая характеристика потока является наиболее адекватной мерой склонности потока к отрыву.

Естественной характеристикой подобного рода является максимальное значение скорости на контуре; чем оно выше, тем больше перепад давления и тем более вероятен отрыв, обусловленный действием вязкости при восстановлении давления [6]. Таким образом, в качестве возможного варианта обобщения постулата о циркуляции ниже рассматривается минимаксный вариационный принцип: при реальном обтекании циркуляция принимает такое значение, которое минимизирует максимальную скорость на контуре. Очевидно, что данный принцип в предельном случае крылового профиля дает классический результат, а при симметричном обтекании — нулевую циркуляцию. Во многих конкретных случаях он позволяет определить знак циркуляции без всяких вычислений. Например, при обтекании цилиндра потоком со свободной поверхностью (фиг. 1) очевидно, что при нулевой циркуляции максимум скорости достигается в точке *B*, поэтому должна возникнуть циркуляция по часовой стрелке, выравнивающая скорости в точках *B* и *O* (поток слева направо). Это и наблюдается на опыте. Если вместо свободной поверхности поток ограничен стенкой, то следует ожидать возникновения циркуляции другого знака.

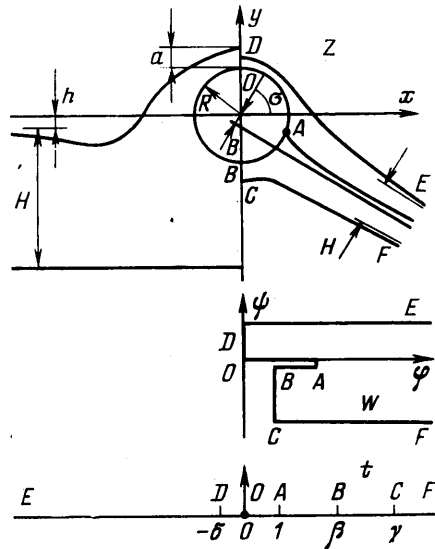
Следует подчеркнуть, что минимаксный принцип не носит универсального характера, в частности он неразрывно связан с представлением об отрыве и уносе вихрей. Если в некоторых условиях возможно безотрывное бесциркуляционное обтекание, при больших числах Рейнольдса такое приближенно и реализуется. Подобная ситуация имеет место, например, при обтекании тела тонкой струей [7].

Заметим, что даже наличие сильного стационарного отрыва, сопровождающее во многих случаях обтекание гладкого контура, не снимает проблемы выбора циркуляции. В данной ситуации обобщение постулата должно строиться для объединения обтекаемого тела с зоной отрыва, вне которого движение практически потенциально [8]. Поскольку, однако, построение отрывного течения — весьма трудная задача, модель струйного несимметричного обтекания круглого цилиндра представляется наиболее подходящей для отбора приемлемой гипотезы именно в силу отмеченной безотрывности и наибольшего отличия от классического случая. Но и независимо от высказанных соображений задача обтекания цилиндра потоком со свободными поверхностями обладает весьма интересными особенностями, чтобы служить объектом самостоятельного изучения.

2. Постановка задачи и метод решения. Задача потенциального обтекания круглого цилиндра невесомой несжимаемой жидкостью для некоторого класса потоков допускает единый метод решения, который для определенности излагается для случая обтекания цилиндра свободной струей. Область течения является двусвязной и симметричной относительно некоторой оси. На фиг. 1 представлена схема течения и соответствующая ее правой половине область изменения комплексного потенциала $w = \phi + i\psi$; разрез соответствует дуге окружности, $\phi = -\Gamma/2$ в точке *B*, Γ — циркуляция. Функция $w(t)$ с производной

$$\frac{dw}{dt} = \lambda \frac{1-t}{\sqrt{t(t+\delta)(\beta-t)(\gamma-t)}}$$

конформно отображает верхнюю полуплоскость вспомогательной переменной t на область w ; соответствие точек указано на фиг. 1. Четыре свободных параметра (λ , δ , β и γ) соответствуют физическим параметрам за-



Фиг. 1

дачи R , H , b и Γ . Скорость на бесконечности полагается единичной. Переход в физическую плоскость осуществляется по формуле

$$(2.1) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{v} \frac{dw}{dt}, \quad v(t) = q(t) \exp[i\theta(t)]$$

где v — комплексная скорость. Для аналитической функции $\zeta(t) = \ln \bar{v}(t)$ в полуплоскости $\text{Im } t \geq 0$ ставится нелинейная смешанная краевая задача: $\ln q = 0$ при $t \in (-\infty, -\delta]$ и $t \in [\gamma, \infty)$, $\theta = 0$ при $t \in [-\delta, 0]$ и $t \in [\beta, \gamma]$. Переход в (2.1) к модулям с учетом того, что на окружности $z = R \exp(i\sigma)$ дает граничное условие на $[0, \beta]$

$$(2.2) \quad R\sigma'(t)q(t) = -\mu(t), \quad \sigma = \theta + \pi/2 \quad (t \in [0, 1)) \quad \sigma = \theta - \pi/2 \quad (t \in (1, \beta))$$

или

$$(2.3) \quad R\theta'q = -\mu, \quad \mu(t) = dw/dt$$

Функция $G(t) = ig(t)\zeta(t)$, где $g(t) = 1/\sqrt{(t+\delta)(\gamma-t)}$ ($g > 0$ при $t \in (-\delta, \gamma)$ и непрерывна в области $\text{Im } t > 0$), у которой действительная часть отлична от нуля только на $t \in [0, \beta]$, аналитична в верхней полуплоскости и на границе имеет интегрируемые особенности, кроме того, $G(\infty) = 0$. Следовательно, граничные значения $G(t)$ удовлетворяют формуле Сохоцкого [8], которая для $s(t) = \text{Im } G(t)$ дает

$$(2.4) \quad s(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\beta \frac{\theta(\tau)g(\tau)}{\tau-t} d\tau$$

В частности, для $t \in [0, \beta]$

$$(2.5) \quad \pi g(t) \ln q(t) = -\int_0^\beta \frac{\theta(\tau)g(\tau)}{\tau-t} d\tau$$

Интегрирование (2.2) от 0 до β дает

$$(2.6) \quad R = \frac{1}{\pi} \int_0^\beta \frac{\mu(\tau)}{q(\tau)} d\tau$$

после чего систему (2.2), (2.5), (2.6) можно рассматривать как интегродифференциальное уравнение для $\sigma(t)$ на $[0, \beta]$ с краевым условием $\sigma(0) = \pi/2$. Сходное уравнение рассмотрено в [9]. Примечательно, что в случае круглого цилиндра задача сводится к одному интегральному уравнению. Пусть

$$\int_0^\tau \frac{g(\tau')d\tau'}{\tau-t} = g(t)P(\tau, t)$$

Интегрирование по частям в (2.5) дает

$$(2.7) \quad \pi \ln q(t) = [\theta(1_+) - \theta(1_-)]P(1, t) + \int_0^\beta P(\tau, t)\theta'(\tau) \times \\ \times d\tau = \pi P(1, t) - 1/R \int_0^\beta P(\tau, t) \frac{\mu(\tau)}{q(\tau)} d\tau$$

$$(2.8) \quad P(\tau, t) = \ln \frac{|\tau-t|}{p(\tau, t)}, \quad p(\tau, t) = (\gamma-\delta)(t+\tau) + 2(\delta\gamma-t\tau) + \\ + 2\sqrt{(t+\delta)(\tau+\delta)(\gamma-t)(\gamma-\tau)}$$

Здесь $\theta(1_-)$ и $\theta(1_+)$ — предельные значения $\theta(t)$ при $t \rightarrow 1$ слева и справа соответственно.

Из (2.7) и (2.6) окончательно следует интегральное уравнение для функции $q(t)$ на отрезке $[0, \beta]$

$$(2.9) \quad q(t) = \frac{|1-t|}{p(1, t)} \exp \left[- \int_0^\beta \ln \frac{|\tau-t|}{p(\tau, t)} \frac{\mu(\tau)}{q(\tau)} d\tau \right] / \int_0^\beta \frac{\mu(\tau)}{q(\tau)} d\tau$$

В это уравнение входят две функции $p(\tau, t)$ и $\mu(t)$, модификация которых приводит к задачам обтекания круглого цилиндра различными потоками. При $p=p_0$ а) $\mu=\mu_0$ соответствует цилиндру в безграничном потоке; б) $\mu=\mu_1$ — цилиндру под плоскостью; в) $\mu=\mu_2$ — цилиндру в прямой канале. При $p=p_1$ а) $\mu=\mu_1$ — цилиндру под свободной поверхностью бесконечно глубокого потока; б) $\mu=\mu_2$ — цилиндру под свободной поверхностью при наличии дна. При $p=p_2$, где p_2 определяется (2.8) и $\mu=\mu_2$ соответствует обтеканию цилиндра струей.

Рассмотрим функции

$$\mu_0(t) = |1-t|/\sqrt{t(\beta-t)}, \quad p_0(\tau, t) = 1 \quad (g(t) = 1) \\ \mu_1(t) = \mu_0(t)/\sqrt{t+\delta}, \quad p_1(\tau, t) = t+\tau+2\delta+ \\ + 2\sqrt{(t+\delta)(\tau+\delta)} \quad (g(t) = 1/\sqrt{t+\delta}) \quad \mu_2(t) = \mu_1(t)/\sqrt{\gamma-t}$$

Заметим, что, несмотря на нелинейный характер уравнения (2.9), задачи, соответствующие $p(\tau, t) = 1$, по существу линейные. При выводе (2.9) подразумевалось, что критические точки лежат на контуре цилиндра, чему соответствовал определенный порядок точек на оси t . Легко показать, что (2.9) справедливо и для случаев, когда две критические точки сходят с цилиндра, либо сливаясь на оси y , либо располагаясь на твердой стенке при наличии таковой.

Пусть A — нелинейный интегральный оператор, соответствующий правой части (2.9). Численный анализ показывает, что во всей области параметров оператор $1/3(2+A)$ является сжимающим с довольно широкой областью притяжения к решению, так что уравнение (2.9) разрешимо методом итераций по схеме $q_{n+1} = 1/3(2q_n + Aq_n)$. При этом интегралы в (2.9) вычислялись по квадратурной формуле Гаусса с предварительной заменой переменной интегрирования и аддитивным выделением логарифмической особенности при $\tau=t$. Применялась замена $\tau = \delta \operatorname{sh}^2 kx$ на отрезке $[0, 1]$ (и аналогичная на $[1, \beta]$), устраняющая «почти неинтегрируемую» особенность типа $1/\sqrt{\tau(\tau+\delta)}$ вблизи $\tau=0$ с чрезвычайно малыми δ . Последнее связано с логарифмической зависимостью между δ и толщиной струйки над цилиндром a , так, например, $\delta \sim 10^{-20}$ соответствует всего лишь $a/R \sim 0.1$. Тестирование алгоритма решения на задаче обтекания цилиндра под плоскостью дало хорошее соответствие численного решения аналитическому во всей исследованной в дальнейшем области параметров вплоть до значений $\delta \sim 10^{-36}$.

3. Цилиндр под свободной поверхностью бесконечно глубокого потока жидкости (случай $p=p_1, \mu=\mu_1$). В этой задаче нетривиально асимптотическое поведение свободной поверхности. Из (2.4) аналогично выводу

(2.7) для $t \leq -\delta$ следует:

$$(3.1) \quad \theta(t) = -P^*(1, t) + \frac{1}{\pi R} \int_0^{\delta} P^*(\tau, t) \frac{\mu(\tau)}{q(\tau)} d\tau$$

$$P^*(\tau, t) = \arcsin p^*(\tau, t), \quad p^*(\tau, t) = (t + \tau + 2\delta) / (t - \tau)$$

откуда легко получить, что при $t \rightarrow -\infty$

$$(3.2) \quad \theta(t) \sim \kappa / \sqrt{|t|} + \xi / |t|^{3/2}, \quad \kappa = 2 \left(-\sqrt{1 + \delta} + \int_0^{\delta} \sqrt{\tau + \delta} \frac{\mu(\tau)}{q(\tau)} d\tau \right)$$

Из (2.1) следует, что на свободной поверхности

$$(3.3) \quad x(t) = \int_{-\delta}^t \cos \theta(\tau) \mu(\tau) d\tau, \quad y(t) = \int_{-\delta}^t \sin \theta(\tau) \mu(\tau) d\tau + \text{const}$$

и поскольку $\mu(t) \sim 1/\sqrt{|t|}$ при $t \rightarrow -\infty$, то $x \sim \sqrt{|t|}$, $y \sim \kappa \ln |t| \sim \kappa \ln x$, если $\kappa \neq 0$ и $y \sim 1/x + \text{const}$ при $\kappa = 0$.

Итак, вообще говоря, свободная поверхность при $|x| \rightarrow \infty$ безгранично поднимается или опускается, так что в задаче невозможно ввести геометрический параметр типа глубины погружения. Тем не менее решение расслаивается по значениям параметра a , при этом численный анализ дает основание полагать, что решение существует для всех $a > 0$, при заданной циркуляции — единственно и стремится к определенному пределу при $a \rightarrow 0$.

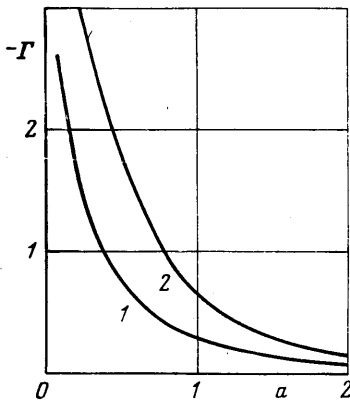
На фиг. 2 кривой 1 представлена сепаратриса $\kappa(a, \Gamma) = 0$, на ней при больших a $\Gamma \sim -1/a^3$ и при $a \rightarrow 0$ $\Gamma \rightarrow \Gamma_0 \simeq -3.6$. Прямая $\Gamma = 0$ целиком лежит в области, где $\kappa > 0$ и свободная поверхность логарифмически уходит в $+\infty$. Кривая 2 соответствует минимальному принципу, на ней везде $\Gamma < 0$, $\kappa < 0$, при $a \rightarrow \infty$ $\Gamma \sim -a^{-2}$, $\lim_{a \rightarrow 0} \Gamma \simeq -4.5$. Так же как и постулат Жуковского — Чаплыгина для пластинки под свободной поверхностью [10], минимальный принцип в данной задаче вырабатывает такую циркуляцию, которая «уводит» свободную поверхность на $-\infty$.

Из других результатов отметим характер поведения скорости на цилиндре. При уменьшении a и $\Gamma = \text{const}$ скорость в верхней точке $q(O)$ монотонно падает до единицы, причем при $a \ll 0.4$ линейно по a : $q(O) = 1 + ka$, где $k \approx 1$ и практически не зависит от Γ . Здесь, как и всюду в дальнейшем при изложении результатов, положено $R = 1$. Подобного рода локальная автомодельность характерна для всех рассматриваемых здесь задач: картина течения в окрестности точек O и D определяется в основном только параметром a (при малых a). В то же время скорость в точке B немонотонна. Так, при $\Gamma = 0$ $q(B)$ падает от 2 (для больших a) до $q_1 \simeq 1.925$ при $a \approx 0.65$ и, далее возрастая, при $a \rightarrow 0$ стремится к значению $q_0 \approx 2.26$; при этом критические точки монотонно «съезжают» вниз от положения на горизонтальном диаметре на угол $\sigma_0 \simeq -0.35$. При движении по кривой 2 вниз по a $q(O)$ и $q(B)$, равные друг другу согласно минимальному принципу, монотонно убывают от 2 до 1, $\sigma_0 \approx -0.9$.

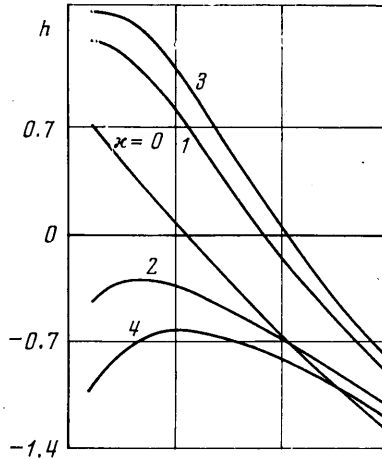
4. Обтекание цилиндра потоком со свободной поверхностью, ограниченного по глубине ($p = p_1 = p_2$). Схема потока соответствует левой половине фиг. 1. Наличие дна, естественно, устраняет логарифмическую расходимость в поведении свободной поверхности, и в задаче возникает естественный геометрический параметр h — глубина погружения (будем

считать $h > 0$ при положении оси цилиндра выше уровня свободной поверхности). Однако введение этого параметра вносит нетривиальные черты в свойства существования и единственности решения: при заданных параметрах H , Γ и h может существовать одно решение, два или ни одного.

Эти свойства решения иллюстрирует кривая 2 на фиг. 3, представляющая собой зависимость $h(a)$ при $\Gamma=0$ ($H=6$). Характер зависимости максимального значения h^* и соответствующего ему a^* от глубины потока H при $\Gamma=0$ ясен из сравнения кривых 2 и 4 ($H=20$). При заданном H и возрастании $|\Gamma|$ точка (a^*, h^*) смещается вверх и вправо при $\Gamma < 0$, вниз и влево для $\Gamma > 0$. Значениям циркуляции, выбранным по минимаксному



Фиг. 2



Фиг. 3

принципу, соответствуют кривые 1 ($H=6$) и 3 ($H=20$). При заданных параметрах минимаксное решение единственно, причем $h^* > 1$, т.е. цилиндр можно «вытащить» из потока. На фиг. 4 даны минимаксные зависимости $\Gamma(h)$ для $h \leq 1$ (кривые 1 и 3, значения H прежние).

Следует отметить, что для значений h , близких к единице, в реальном потоке двусвязный режим обтекания цилиндра неустойчив, на смену ему приходит одностороннее обтекание цилиндра, который, будучи свободным, начинает вращаться «по мельничному колесу». Существование минимаксного решения вблизи $h=1$ и отрицательный знак Γ , чему соответствует вращение «против колеса», должны приводить к разрывному изменению направления вращения цилиндра при смене режимов обтекания. Этот вывод вполне подтверждается предварительным экспериментом, который помимо того дал хорошее количественное соответствие при $h \leq 0.5$ между реально наблюдаемой циркуляцией и вычисленной на основе минимаксного принципа. Значения циркуляции, соответствующие минимуму $C = \oint_{\Sigma} q^2 ds$ при $h = \text{const}$, на фиг. 4 представлены кривыми 2 ($H=6$) и 4 ($H=20$). Характер кривых, в частности малые предельные значения h , не соответствует экспериментальным данным. Здесь эти данные не приводятся, так как подробное описание и обсуждение эксперимента выходит за рамки настоящей работы.

Следует отметить близость кривых 1 и 3 на фиг. 3, 4. Далее, значения циркуляции, соответствующие минимаксному принципу, не зависят от того, какой геометрический параметр фиксирован — h или, например, a . При этом «минимаксные» кривые для разных, достаточно больших H в плоскости (a, Γ) практически совпадают при $a < 2$ и, кроме того, в этом

диапазоне значений a хорошо ложатся на кривую 2 фиг. 2, соответствующую задаче обтекания «бездонным» потоком. Эти свойства консервативности характерны для локальных принципов выбора циркуляции, в частности для постулата Жуковского — Чаплыгина, и в то же время совершенно несвойственны для принципа, требующего минимальности интегрального функционала C .

Анализ формул (3.2) и (3.4), с учетом того что в данной задаче $\mu(t) \sim 1/|t|$ при $t \rightarrow -\infty$, приводит к следующему асимптотическому поведению свободной поверхности: $y \sim \text{const} + \exp(-k|x|)$ при $|x| \rightarrow \infty$, где $k \sim 1/H$. При этом свободная поверхность выходит сверху на константу при $\kappa < 0$ и, будучи немонотонной, снизу при $\kappa > 0$, как показано на фиг. 1. Величина κ по-прежнему дается формулой (3.3). Кривая $\kappa = 0$ при $H = 6$ представлена на фиг. 3 (в области над ней $\kappa < 0$). При $H \rightarrow \infty$ кривая $\kappa = 0$ в плоскости (a, Γ) переходит в кривую 1 фиг. 2. В окрестности точки D (фиг. 1) свободная поверхность при всех значениях параметров вогнута в область течения в отличие от задач обтекания тяжелой жидкостью, в которых возможна противоположная ситуация [11]. Отметим, что в области, прилегающей к цилиндру, поведение свободной поверхности и поле скоростей не зависят от H и близки к соответствующим решениям задачи обтекания потоком без дна (при достаточно больших H), различия существенны только вдали от цилиндра. Это связано с тем, что при $t \ll \gamma$ множитель $1/\sqrt{\gamma - t}$, на который отличаются μ_1 и μ_2 , практически постоянен, а уравнение (2.9) инвариантно относительно замены $\mu(t) \rightarrow k\mu(t)$, $k = \text{const}$ ($\gamma \gg 1$ соответствует большому H).

5. Струйное обтекание ($p = p_2$; $\mu = \mu_2$). Основное уравнение (2.9) допускает кроме отмеченного преобразование вида $p(\tau, t) \rightarrow kp(\tau, t)$ и, поскольку для $t \ll \gamma$ $p_2(\tau, t) \approx p_1(\tau, t)$, многие результаты п. 4 переносятся на случай обтекания цилиндра достаточно толстой струей. Прежде всего это относится к локальным характеристикам потока в окрестности цилиндра, кроме того, остается прежним характер существования и единственности решения при заданных параметрах H, Γ и прицельном расстоянии b , задающем относительное расположение осей струи и цилиндра. В случае достаточно тонких струй при заданных H и Γ интервал значений b , в котором решение существует, по-прежнему ограничен: $0 \leq b \leq b^*$, но в пределах этого интервала, как показывает численный анализ при $H = 2$, решение единственно. Это, по-видимому, связано с наличием «степени свободы» у струи — угла отклонения. Для значений $t \leq -\delta$ и $t \geq \gamma$ справедлива формула (3.1), где теперь

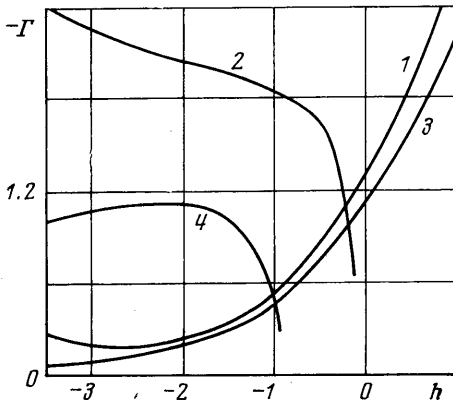
$$D^* = \arcsin \frac{(\gamma - \delta)(t + \tau) + 2(\delta\gamma - t\tau)}{(\tau - t)(\gamma + \delta)}$$

Переход в ней к пределу при $|t| \rightarrow \infty$ позволяет определить θ_∞ (или угол отклонения струи $\theta_0 = 2\theta_\infty$). На фиг. 5 представлена зависимость для $H = 2$ θ_0 от b при $\Gamma = 0$ (кривая 1) и значениях Γ , соответствующих минимаксному принципу (кривая 2); отрицательные значения θ_0 соответствуют повороту струи по часовой стрелке. Этому случаю отвечает картина на фиг. 1. При $\Gamma = 0$ предельное прицельное расстояние $b^* \approx 1.7$. С уменьшением Γ величина b^* возрастает. В минимаксном случае $b^* \approx 2.1$.

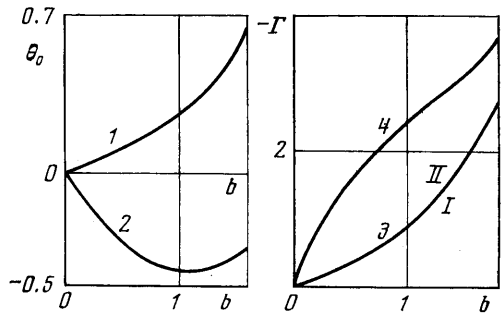
Подъемная сила f_y , действующая на единицу длины цилиндра, однозначно связана с θ_∞ (или θ_0): $f_y = -2\rho H v_\infty^2 \sin \theta_\infty$, ρ — плотность. Отметим, что формула Жуковского $f_y = \rho v \Gamma$ несправедлива, действительно $f_y \neq 0$ при $\Gamma = 0$, если $b \neq 0$. Кривая 3 на фиг. 5 соответствует значениям $\theta_\infty = 0$ при $H = 2$. В области I ($\theta > 0$, $f_y < 0$) цилиндр и струя притягиваются, в области II ($\theta < 0$, $f_y > 0$) имеет место отталкивание. Кривая 4 представляет зависи-

мость минимаксной циркуляции от b . Характер кривых 2 и 4, в частности отрицательность Γ , чему соответствует вращение цилиндра против мельничного колеса, отрицательные значения θ_0 , отвечающие отталкиванию струи от цилиндра, и наличие экстремума на кривой 2, качественно верно отражает ситуацию, наблюдаемую на опыте при $H \gg 1$ и больших числах Рейнольдса.

В случае обтекания цилиндра более тонкой струей эксперимент выявляет очень сложную и интересную картину. Для некоторых значений H и v_∞ при одних и тех же значениях b существуют два метастабильных состояния. В одном из них картина обтекания качественно совпадает с



Фиг. 4



Фиг. 5

рассмотренной в случае толстых струй, в другом — совершенно противоположна: цилиндр притягивает струю, вращаясь при этом «по мельничному колесу». Ярко выражены гистерезисные явления. При дальнейшем уменьшении H начинает преобладать «притягивающий» режим, противоположный ему вытесняется и при очень малых H перестает проявляться. Влияние отрыва на процесс установления циркуляции ярко проявляется при изменении в другую сторону. С ростом H режимы расслаиваются: «притягивающий» стабилен только на периферии, при $b \sim R$, в случае же почти симметричного обтекания, когда в начальной стадии неизбежен отрыв, проявляется «отталкивающий» режим.

Существование притягивающего режима, как уже отмечалось, связано с возможностью безотрывного бесциркуляционного обтекания цилиндра тонкой струей. В этом случае $\Gamma=0$ и при всех b угол $\theta_0 > 0$, что демонстрирует кривая 1 (фиг. 5). Тем самым эффект притяжения находит естественное объяснение. Однако при обтекании тонкими струями становятся существенными эффекты вязкости. Это приводит к смещению задней критической точки и возникновению положительной циркуляции по механизму, изложенному в [4, 5]. Действительно, при достаточно малых b тонкая струя разделяется на две приблизительно одинаковые ветви, так что уже при нулевой циркуляции критические точки лежат вблизи одного диаметра, хотя и смещены несколько в сторону более толстой ветви. Влияние трения компенсирует это смещение, так как более толстая струя имеет меньшие потери. В результате с хорошей точностью реализуется условие М. А. Лаврентьева о том, что критические точки лежат на одном диаметре. Это допущение нашло хорошее экспериментальное подтверждение [12]. Следует отметить, что в случае тонких струй существенно, закреплен ли цилиндр. Способность свободно вращаться приводит к сильному сближе-

нию критических точек при большой положительной циркуляции, так что струя может поворачиваться на угол, близкий к 180° .

Таким образом, можно констатировать, что минимаксный принцип и постулат М. А. Лаврентьева, каждый в своей области, качественно верно соответствуют картине обтекания и, по-видимому, могут служить отправными точками при построении адекватной теории, хотя и не отражают всего многообразия явлений, приводящих к возникновению циркуляции и вращению цилиндра.

Поступила 15 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштик М. А., Сорокин В. Н. О вращении цилиндра на границе струи. ПМТФ, 1966, № 1.
2. Жуковский М. И. Расчет обтекания решеток профилей турбомашин. М.—Л., Машгиз, 1960.
3. Сарен В. Э. Система гладких профилей в потенциальном потоке несжимаемой жидкости. В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 22. Новосибирск, 1975.
4. Лаврентьев М. А. О некоторых задачах движения жидкости при наличии свободных поверхностей. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., «Наука», 1973.
6. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
7. Исатаев С. И. Экспериментальное исследование турбулентного движения жидкости в следе за плохо обтекаемым телом. Уч. зап. Казахск. гос. ун-та, 1957, т. 30, вып. 5.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
9. Хмельник М. И. Обтекание цилиндрического тела свободной струей конечной ширины. В сб. «Промышленная аэродинамика», вып. 27. М., «Машиностроение», 1966.
10. Кузнецов А. В. Обтекание пластинки потоком невесомой жидкости со свободной границей. ПМТФ, 1963, № 6.
11. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. 1. М., Физматгиз, 1963.
12. Вильгельми Т. А. О струйном обтекании шара. ПМТФ, 1969, № 5.